

**А. Н. Ширяев, И. Г. Эрлих
П. А. Яськов**

**Вероятность в теоремах
и задачах
(с доказательствами
и решениями)
Книга 1**

МЦНМО

А. Н. Ширяев, И. Г. Эрлих, П. А. Яськов

Вероятность в теоремах и задачах

(с доказательствами и решениями)

Книга 1

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2014

УДК 519.21(075.8)

ББК 22.171

Ш64

Ширяев А. Н., Эрлих И. Г., Яськов П. А.

Вероятность в теоремах и задачах (с доказательствами и решениями). Книга 1

Электронное издание

М.: МЦНМО, 2014

648 с.

ISBN 978-5-4439-2082-5

Настоящая книга является «решебником» задач из первых двух глав учебника А. Н. Ширяева «Вероятность-1» и задачника «Задачи по теории вероятностей». Добавлено также много новых задач. Приводимые доказательства и решения будут полезны как студентам и аспирантам, так и преподавателям, демонстрируя как следует решать вероятностные задачи, доказывать вероятностные теоремы и как их излагать.

Подготовлено на основе книги: *Ширяев А. Н., Эрлих И. Г., Яськов П. А.* Вероятность в теоремах и задачах (с доказательствами и решениями). Книга 1. — М.: МЦНМО, 2013. — 648 с.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241–74–83.
<http://www.mccme.ru>

© А. Н. Ширяев, И. Г. Эрлих, П. А. Яськов, 2013.

ISBN 978-5-4439-2082-5 © МЦНМО, 2014.

Предисловие

В качестве дополнения к нашему учебнику «Вероятность» (1980, 1989, 2004, 2006, 2011) в 2006 и 2011 гг. было издано учебное пособие «Задачи по теории вероятностей» (издательство МЦНМО). В это пособие вошли как «старые» задачи из учебника, так и большое количество «новых» задач, которые мною собирались в течение многих лет. Многие задачи возникали на наших специальных семинарах для студентов и аспирантов в МГУ. В предисловии к пособию «Задачи» мы отмечали, что приводимые, скажем, в § 5 второй главы задачи непосредственно примыкают к теоретическому материалу в § 5 второй главы учебника «Вероятность». При этом, например, запись В1.П.11.1 означает ссылку на книгу А. Н. Ширяева «Вероятность-1», гл. II, § 11, пункт 1, а запись П.11.1 — ссылку на задачу 1, гл. II, § 11 данного пособия.

Тем самым читатель в дополнение к теоретическому материалу получает возможность самоконтроля, решая соответствующие задачи из пособия. Задачи, приводимые в этом пособии, носят разный характер. Некоторые из них можно назвать *задачами-упражнениями* на проверку усвоения понятий, фактов, теоретических результатов из учебника «Вероятность». Другие задачи (средней и повышенной трудности) требуют уже больше усилий в их решении. Наконец, многие задачи, в сущности, являются *теоретическими* и призваны дать дополнительный теоретический материал.

Нам неоднократно задавали вопросы по поводу решения многих задач. Именно это и побудило нас подготовить данное издание, содержащее решение задач из пособия. Настоящая «Книга 1» охватывает материал первых двух глав. Следует подчеркнуть, что у нас были многие решения, подготовленные как мною, так и нашими студентами и аспирантами в течение многих лет. Вместе с этими решениями или указаниями, а также решениями из многих других источников у нас образовался первый вариант «решебника». На заключительном этапе основную работу по подготовке текстов решений выполнили И. Эрлих (глава I) и П. Яськов (глава II). Следует особо отметить, что П. Яськов добавил во вторую главу множество новых задач и дал ко многим из задач, и «старым», и «новым», оригинальные решения.

Мы надеемся, что настоящее пособие с решениями задач и доказательствами многих теорем будет полезно как студентам и аспирантам,

так и научным работникам, демонстрируя, как следует решать вероятностные задачи, доказывать теоремы и как надо, по нашему мнению, их излагать. Авторы пособия будут признательны читателям как за замечания к нашим решениям, так и за предложения по поводу решения приводимых задач.

А. Ширяев

Кафедра теории вероятностей
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова,
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

Глава I

Элементарная теория вероятностей

§ 1. Вероятностная модель эксперимента с конечным числом исходов

1. Установить справедливость следующих свойств операций $\cap$ (пересечения) и $\cup$ (объединения):

$$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A \text{ (коммутативность),}$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \text{ (ассоциативность),}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \text{ (дистрибутивность),}$$

$$A \cup A = A, A \cap A = A \text{ (идемпотентность).}$$

$$\text{Показать также, что } \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Решение. Для доказательства равенства множеств необходимо и достаточно показать, что каждый элемент одного множества является элементом другого и наоборот. Например, равенство $A \cup B = B \cup A$ проверяется так: если $x \in A \cup B$, то либо $x \in A$, либо $x \in B$. В обоих случаях $x \in B \cup A$. Значит, $A \cup B \subseteq B \cup A$. Точно так же проверяется, что $B \cup A \subseteq A \cup B$. Остальные свойства проверяются аналогично. $\square$

2. (Разные интерпретации неполного факториала $(N)_n \equiv N(N-1)\dots(N-n+1)$ — числа размещений из N по n .) Показать, что

(а) число упорядоченных выборок (...) размера n (без повторений элементов — «выбор без возвращения»), составленных из элементов множества A с числом элементов $|A| = N$, равно $(N)_n$, $1 \leq n \leq N$;

(б) число слов длины n , составленных из различных букв, выбранных из алфавита, содержащего N букв, равно $(N)_n$, $1 \leq n \leq N$;

(с) число различных функций $y = f(x)$, определенных на множестве X с $|X| = n$, принимающих значения в множестве Y с $|Y| = N$, $n \leq N$, и таких, что если $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$ (т. е. $f: X \rightarrow Y$ является инъекцией), равно $(N)_n$.

Решение. (а) Поскольку выборки упорядоченные, у каждого элемента выборки есть номер. Есть N способов выбрать первый элемент. Когда первый элемент фиксирован, следующий можно выбрать $N-1$ способами, и т. д. Наконец, когда фиксированы $n-1$ пер-

вых элементов, последний можно выбрать $N - n + 1$ способами. Отсюда следует, что общее число требуемых последовательностей есть $N(N - 1) \dots (N - n + 1) \equiv (N)_n$.

(b) Каждое интересующее нас слово есть упорядоченная выборка длины n . Выборка производится без возвращения элементов (буквы в слове различны) из множества (алфавита), состоящего из N элементов. Таким образом, задача сведена к предыдущей.

(c) Функция определена тогда, когда при каждом значении аргумента определено значение функции. Занумеруем значения аргумента числами от 1 до n , и тогда каждой функции взаимно однозначно ставится в соответствие упорядоченная выборка элементов из Y длины n (i -й элемент выборки есть значение функции при i -м значении аргумента). Задача сведена к п. (a) данной задачи. $\square$

3. (Разные интерпретации биномиальных коэффициентов

$$C_N^n \equiv \frac{N!}{n!(N-n)!} \cdot$$

Показать, что

(a) число *неупорядоченных* выборок [...] размера n (без повторений) элементов — «выбор без возвращения», составленных из элементов множества A с $|A| = N$, равно C_N^n , $1 \leq n \leq N$;

(b) число *упорядоченных* последовательностей (...) длины N , состоящих из n «единиц» и $(N - n)$ «нулей», равно C_N^n , $1 \leq n \leq N$;

(c) число способов, которыми n *неразличимых* дробинok можно разместить по N различным ячейкам, причем так, чтобы в каждой ячейке было не больше одной дробинки («размещение с запретом»), равно C_N^n , $1 \leq n \leq N$;

(d) число *неубывающих* путей на двумерной целочисленной решетке $\mathbb{Z}_+^2 = \{(i, j) : i, j = 0, 1, 2, \dots\}$, начинающихся в точке $(0, 0)$ и приходящих в точку $(n, N - n)$, равно C_N^n (неубывающий путь — это такой путь, у которого на каждом шаге сдвиг происходит либо вверх на единицу, либо вправо на единицу), $0 \leq n \leq N$, $C_N^0 = 1$;

(e) число *различных* подмножеств D множества A с $|A| = N$, состоящих из n элементов ($|D| = n$, $n \leq N$), равно C_N^n .

Решение. (a) Согласно задаче I.1.2(a) число упорядоченных выборок длины n из N элементов без повторений есть $(N)_n$. При этом каждая неупорядоченная выборка подсчитана $n!$ раз. (Действительно, неупорядоченная выборка есть множество из n элементов. Число упорядоченных выборок из него есть $(n)_n = n!$.) Таким образом, число требуемых в задаче выборок есть $\frac{(N)_n}{n!} = C_N^n$.

(b) Для задания упорядоченной последовательности из n единиц и $N - n$ нулей необходимо и достаточно задать номера позиций, на которых будут стоять единицы. Таким образом, число требуемых последовательностей есть число способов выбрать неупорядоченно n натуральных чисел (номеров позиций) из чисел от 1 до N . Это число подсчитано в п. (a) данной задачи.

(c) Каждому способу размещения дробинки можно однозначно поставить в соответствие упорядоченную последовательность из нулей и единиц: на i -й позиции последовательности стоит 1, если в i -й ячейке есть дробинка, и 0 иначе. Задача сведена к п. (b) данной задачи.

(d) Интересующий нас путь состоит из n отрезков, расположенных горизонтально, и $N - n$ отрезков, расположенных вертикально. Аналогично п. (c) строится взаимно однозначное соответствие между всеми последовательностями из n единиц и $N - n$ нулей и данными путями: на i -й позиции последовательности стоит 1, если i -й отрезок пути расположен горизонтально, и 0 иначе. Задача сведена к п. (b) данной задачи.

(e) Нумеруем элементы множества A числами от 1 до N . Аналогично предыдущим пунктам строится взаимно однозначное соответствие между всеми последовательностями из n единиц и $N - n$ нулей и всеми подмножествами множества A : на i -й позиции последовательности стоит 1, если i -й элемент множества A принадлежит выбранному подмножеству, и 0 иначе. Задача сведена к п. (b) данной задачи. $\square$

4. Рассматриваются *неубывающие пути* на целочисленной решетке $\mathbb{Z}_+^2 = \{(i, j) : i, j = 0, 1, 2, \dots\}$, которые выходят из точки $(0, 0)$ и приходят в точку (n, n) , при этом, однако, оставаясь ниже «диагонали» или касаясь ее (т. е. пути, проходящие через точки множества $\{(i, j) \in \mathbb{Z}_+^2, 0 \leq j \leq i \leq n\}$).

Показать, что число таких путей равно C_{n+1} , где

$$C_n = \frac{1}{n} C_{2(n-1)}^{n-1}, \quad n \geq 1,$$

— числа Каталана. (Иногда под числами Каталана понимают числа $c_n = C_{n+1}$, $n \geq 0$.)

Решение. По утверждению I.1.3(d) при $N = 2n$ всего неубывающих путей, идущих из $(0, 0)$ в (n, n) , ровно C_{2n}^n . Нас интересуют только те из них, которые не пересекаются и не касаются прямой $y = x + 1$. Подсчитаем число ломаных, имеющих общие точки с указанной прямой. Для этого каждой такой ломаной однозначно поставим в соответствие ломаную, идущую из точки $(0, 0)$ в точку $(n - 1, n + 1)$, по такому правилу — выбираем самую верхнюю вершину ломаной на указанной

прямой и отражаем часть ломаной, расположенную правее этой точки, относительно нашей прямой. Обратное отображение строится аналогично (общая точка с прямой $y = x + 1$ будет существовать, так как начало ломаной лежит ниже прямой, а конец выше). Следовательно, в силу задачи I.1.3(d) число ломаных, имеющих с нашей прямой общие точки, есть C_{2n}^{n-1} . Искомое же число равно

$$C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1} = \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n = C_{n+1}. \quad \square$$

5. Числа Каталана C_n , $n \geq 1$, допускают много интересных комбинаторных интерпретаций. Например, рассмотрим число N_n разных способов подсчета суммы n чисел $a, b, c, d, \dots$, при которых каждый раз складываются лишь *два* числа (изменение порядка следования слагаемых не допускается). Скажем, при $n = 3$ сумму $a + b + c$ можно подсчитывать, удовлетворяя сформулированному требованию «складывать по два числа», расставляя соответствующим образом скобки $(\cdot)$: $a + b + c = (a + (b + c)) = ((a + b) + c)$. (Здесь число разных способов $N_3 = 2$.) При $n = 4$ имеем уже пять возможностей ($N_4 = 5$):

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= ((a + b) + (c + d)) = (((a + b) + c) + d) = \\ &= ((a + (b + c)) + d) = (a + ((b + c) + d)) = \\ &= (a + (b + (c + d))). \end{aligned}$$

(а) Показать, что при любом $n \geq 3$ число N_n разных способов подсчета равно C_n .

(б) Рассматриваются *диагональные триангуляции* правильного n -угольника, $n \geq 4$, т. е. разбиения на треугольники с помощью непересекающихся диагоналей (выходящих из той или иной вершины; очевидно, что число таких диагоналей, выходящих из одной вершины, равно $n - 3$). Показать, что число N_n таких триангуляций равно C_{n-1} .

(с) Показать, что числа Каталана C_n , $n > 1$, удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$C_n^* = \sum_{i=1}^{n-1} C_i^* C_{n-i}^* \quad (*)$$

(с $C_0^* = 0$ и $C_1^* = 1$).

(d) Установить, что производящая функция $F^*(x) = \sum_{n \geq 1} C_n^* x^n$ последовательности $(C_n^*)_{n \geq 1}$, определенной рекуррентными соотношениями (*), удовлетворяет уравнению

$$F^*(x) = x + (F^*(x))^2.$$

(е) Показать, что (с учетом условия $F^*(0) = 0$)

$$F^*(x) = \frac{1}{2} (1 - (1 - 4x)^{1/2}), \quad |x| \leq \frac{1}{4},$$

и вывести отсюда, что коэффициенты C_n^* (при x^n) совпадают, как и следовало ожидать, с числами Каталана C_n :

$$C_n^* = -\frac{1}{2} C_{1/2}^n (-4)^n = \frac{1}{n} C_{2(n-1)}^{n-1} = C_n.$$

Решение. (а) Построим взаимно однозначное соответствие между ломаными из задачи I.1.4 и алгебраическими записями разных способов подсчета суммы n чисел. Будем двигаться по такой записи слева направо. Заменяем каждую открывающуюся скобку на шаг вправо в нашей ломаной, а каждый плюс — на шаг вверх. Поскольку открывающихся скобок в выражении столько же, сколько и знаков суммирования, т. е. $n - 1$, мы получим ломаную, идущую из точки $(0, 0)$ в точку $(n - 1, n - 1)$. Поскольку перед каждым плюсом должна идти своя открывающаяся скобка, в любой момент времени число сделанных шагов направо в ломаной не меньше, чем число шагов вверх, и ломаная действительно не поднимается выше прямой $y = x$.

Построим обратное отображение. Будем двигаться по ломаной из точки $(0, 0)$ в точку $(n - 1, n - 1)$. Шаг направо мы заменяем на открывающуюся скобку, шаг вверх — на плюс. В получившейся последовательности открывающихся скобок и знаков сложения расставляем буквы перед каждым знаком сложения и в конце получившегося выражения. Теперь расставляем закрывающиеся скобки так: выберем самую правую открывающуюся скобку, тогда следующие три символа будут — буква, плюс и еще буква (плюс будет, поскольку последний отрезок ломаной — шаг вверх, буква будет, поскольку буквы расставлялись так, чтобы выражение было правильным). Поставим после этих четырех символов закрывающуюся скобку и временно заменим это подвыражение на какую-нибудь букву. С точки зрения ломаной, мы убрали один «уголок», состоящий из шагов направо и вверх, поэтому ее свойство не пересекать прямую $y = x$ сохранилось. Продолжим эту операцию, пока не получим одну букву. Затем постепенно развернем все выражение, заменяя каждую новую букву обратно на подвыражение. Итак, доказано, что отображение взаимно однозначно, значит, число описанных способов действительно равно C_n .

(b) Сначала докажем по индукции, что число диагоналей при триангуляции равно $n - 3$. Для четырехугольника это очевидно. Диагональ

разбивает n -угольник на m -угольник и $(n - m + 2)$ -угольник, и тогда общее количество диагоналей будет равно сумме чисел 1 , $m - 3$ и $n - m - 1$, т. е. $n - 3$. Кроме того, при триангуляции образуется $n - 2$ треугольника. Действительно, первая диагональ разбивает многоугольник на два, а каждая последующая увеличивает число многоугольников на 1.

Построим биективное отображение между триангуляциями и способами подсчета суммы $n - 1$ числа. Для этого покрасим какую-нибудь сторону в красный цвет и напишем на каждой стороне, начиная со следующей и обходя их по часовой стрелке, буквы $a, b, c, d, \dots$ — всего букв будет $n - 1$. Поскольку всего треугольников $n - 2$, существует хотя бы один треугольник, на сторонах которого написаны 2 буквы. Напишем на его третьей стороне сумму этих двух букв (в алфавитном порядке в скобках) и сотрем две стороны с этими буквами — останется триангуляция $(n - 1)$ -угольника, с которой мы будем поступать точно так же, только теперь вместо букв иногда будут выражения. В конце мы получим один отрезок, покрашенный в красный цвет, на стороне которого записан некоторый способ сложить $n - 1$ число. Аналогично строится обратное отображение — мы сначала красным выделяем одну из сторон и пишем буквы на сторонах, как раньше. Выбираем последнее действие, которое нужно произвести при выбранном способе; ищем вершину, отделяющую стороны, соответствующие ближайшим буквам к выбранному действию; проводим отрезки, соединяющие концы стороны, покрашенной в красный цвет, и данную вершину. Если построенный отрезок совпал со стороной, то с ним ничего делать не надо, а если нет — нужно покрасить его в красный цвет и применить все действия к полученному многоугольнику и соответствующему способу суммирования, который есть подвыражение исходного. Тем самым, искомая биекция построена.

(с) Рассмотрим различные способы расстановки скобок в сумме из n слагаемых. Выберем знак того сложения, которое выполняется последним. Если слева от него i , а справа — $(n - i)$ слагаемых, то существует ровно $C_i C_{n-i}$ способов подсчитать сумму. Поскольку i может быть любым от 1 до $n - 1$, получаем, что $C_n = \sum_{i=1}^{n-1} C_i C_{n-i}$.

(d) Имеем

$$|F^*(x)|^2 = \left| \sum_{n \geq 1} C_n^* x^n \right|^2 = \sum_{n \geq 2} \sum_{i=1}^{n-1} C_i^* C_{n-i}^* x^n = \sum_{n \geq 2} C_n^* x^n = F^*(x) - x,$$

что и требовалось доказать.

(е) Решая полученное в предыдущем пункте уравнение как квадратное относительно $F^*(x)$, получаем, что

$$F^*(x) = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1-4x}).$$

Поскольку $F(0) = 0$, мы выбираем решение со знаком минус. Раскладывая $\sqrt{1-4x}$ в ряд Маклорена, получаем

$$\sqrt{1-4x} = \sum_{k \geq 0} C_{1/2}^k (-4x)^k,$$

а значит,

$$\begin{aligned} C_n^* &= -\frac{1}{2} C_{1/2}^n (-4)^n = -\frac{1}{2n!} \cdot \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \dots \left(\frac{1}{2} - n + 1\right) (-4)^n = \\ &= 2^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{n!}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3) = \frac{(2n-2)!}{(2n-2)!!} = \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!},$$

получаем, что

$$C_n^* = \frac{1}{n} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} = \frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1} = C_n. \quad \square$$

6. (Разные интерпретации биномиальных коэффициентов C_{N+n-1}^n .) Показать, что

(а) число *неупорядоченных* выборок [...] размера n при «выборе с возвращением», составленных из элементов множества A с $|A| = N$, равно C_{N+n-1}^n ;

(б) число *упорядоченных* векторов $(n_1, \dots, n_N)$ с неотрицательными целыми числами n_i , $i = 1, \dots, N$, удовлетворяющими условию $n_1 + \dots + n_N = n$, равно C_{N+n-1}^n , $n \geq 1$, $N \geq 1$;

(с) число способов, которыми n *неразличимых* дробинok можно разместить по N различным ячейкам (без ограничений на число дробинok в каждой ячейке — «размещение без запрета»), равно C_{N+n-1}^n , $n \geq 1$, $N \geq 1$.

Решение. (а) Построим взаимно однозначное соответствие между интересующими нас выборками и упорядоченными последовательностями из n единиц и $N-1$ нулей, которых в силу задачи I.1.3(b) ровно C_{N+n-1}^n . Для этого занумеруем элементы множества A числами от 1 до N и припишем к каждой последовательности перед первым элемен-

том и после последнего элемента по нулю. Тогда выборке, в которой i -й элемент A встречается a_i раз, $i = 1, \dots, N$, ставится в соответствие последовательность, в которой между i -м и $(i + 1)$ -м нулем стоит a_i единиц. Обратное отображение аналогично.

(b) Построим взаимно однозначное соответствие между описанными векторами и неупорядоченными выборками при выборе с возвращением из множества, элементы которого занумерованы числами от 1 до N . Для этого каждому числу n_i поставим в соответствие число элементов с номером i в выборке, и наоборот. Тогда размер выборки равен $n_1 + n_2 + \dots + n_N = n$, а число таких выборок подсчитано в п. (a) данной задачи.

(c) Каждому способу разложить дробинки по N ячейкам ставим в соответствие упорядоченный вектор $(n_1, \dots, n_N)$, где n_i — число дробин в i -й ячейке. Поскольку $n_1 + n_2 + \dots + n_N = n$, задача сведена к предыдущей. $\square$

7. Рассматриваются *неупорядоченные* решения $[n_1, \dots, n_N]$ системы $n_1 + \dots + n_N = n$, $n \geq 1$, $N \geq 1$, с неотрицательными целыми $n_i \geq 0$, $i = 1, \dots, N$. Чему равно число таких решений? Чему равно число таких решений, если допускаются лишь положительные решения ($n_i > 0$, $i = 1, \dots, N$)? Чему равно число *упорядоченных* решений $(n_1, \dots, n_N)$ той же системы $n_1 + \dots + n_N = n$, $n \geq 1$, $N \geq 1$, с положительными n_i , $i = 1, \dots, N$?

Решение. Обозначим число неупорядоченных неотрицательных решений уравнения $n_1 + \dots + n_N = n$ за R_n^N . Тогда все решения делятся на содержащие хотя бы один нуль — число таких решений R_n^{N-1} — и не содержащие — число таких решений R_{n-N}^N (поскольку мы можем вычесть из всех слагаемых по 1 и получить решение системы с $n' = n - N$). Таким образом, $R_n^N = R_n^{N-1} + R_{n-N}^N$, что вкупе с граничными условиями $R_n^1 = 1$ при $n \geq 0$ и $R_n^N = 0$ при $n < 0$ дает возможность быстро находить R_n^N . Однако в явном виде формула для R_n^N , насколько мы знаем, неизвестна.

Число неупорядоченных положительных решений этого же уравнения равно R_{n-N}^N — это в точности те неотрицательные решения, которые не содержат 0.

Упорядоченных положительных решений указанного уравнения ровно столько же, сколько неотрицательных решений у уравнения $n_1 + \dots + n_N = n - N$, — достаточно из каждого числа в каждом положительном решении вычесть 1. Таким образом, в этом случае ответ — C_{n-1}^{n-N} в силу задачи I.1.6(b). $\square$

8. Рассматриваются *неравенства* $n_1 + \dots + n_N \leq n$ с целыми неотрицательными или положительными n_i , $i = 1, \dots, N$. Подсчитайте число упорядоченных векторов $(n_1, \dots, n_N)$, удовлетворяющих неравенствам $n_1 + \dots + n_N \leq n$, $n \geq 1$, $N \geq 1$.

Решение. Упорядоченных неотрицательных решений у неравенства $n_1 + \dots + n_N \leq n$ столько же, сколько неотрицательных решений у уравнения $n_1 + \dots + n_N + n_{N+1} = n$, поскольку задание первых N значений однозначно задает значение n_{N+1} . Итого имеем C_{N+n}^n решений. В случае поиска положительных решений действуем так же, как и раньше, — вычитая из каждого слагаемого в положительном решении по единице, получаем неотрицательное решение аналогичного неравенства с $n' = n - N$. Итого получаем C_n^{n-N} положительных решений данного неравенства. $\square$

9. Найти максимальное число фигур (или тел), которые могут образоваться

- (a) при размещении n прямых в $\mathbb{R}^2$;
- (b) при размещении n плоскостей в $\mathbb{R}^3$;
- (c) при размещении n окружностей в $\mathbb{R}^2$;
- (d) при размещении n сфер в $\mathbb{R}^3$.

Решение. Пусть x_n — максимальное число фигур в пп. (a)–(d). Имеем $x_1 = 2$. Найдем рекуррентные уравнения для x_n , $n \geq 2$. Предположим, что уже имеется размещение A_{n-1} , дающее x_{n-1} фигур. Новый объект (т. е. прямая, плоскость, окружность или сфера) добавит столько фигур, на сколько частей этот объект делится объектами из A_{n-1} .

(a) Новая прямая, пересекающая прямые из A_{n-1} в $n - 1$ различных точках, даст n фигур. Больше фигур появиться не может. Поэтому $x_n = x_{n-1} + n$ и, значит,

$$x_n = x_1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

(b) Согласно п. (a) новая плоскость даст не более $n(n-1)/2 + 1$ фигур. Можно показать, что плоскость, дающая ровно столько фигур, всегда найдется. Значит, $x_n = x_{n-1} + n(n-1)/2 + 1$, откуда находим $x_n = (n^3 + 5n)/6 + 1$.

(c) Новая окружность даст не более $2(n-1)$ фигур (две окружности пересекаются не более чем в 2 точках). Если проводить окружности так, чтобы все они имели общую внутреннюю окрестность, то новая окружность, проходящая через эту окрестность, будет пересекать каждую из них в 2 точках. Отсюда нетрудно вывести, что $x_n = x_{n-1} + 2(n-1)$ и, следовательно, $x_n = (n-1)n + 2$.

(d) Рассуждая так же, как в п. (с), можно показать, что максимальное число частей, на которые n окружностей на сфере в $\mathbb{R}^3$ делят эту сферу, есть $(n-1)n+2$. Поэтому аналогично п. (b) получаем $x_n = x_{n-1} + (n-2)(n-1) + 2$, или $x_n = n(n^2 - 3n + 8)/3$. $\square$

10. Показать, что алгебра $\alpha(A_1, \dots, A_n)$, порожденная системой $\{A_1, \dots, A_n\}$, где $A_i \subseteq \Omega$, $1 \leq i \leq n$, состоит не более чем из 2^{2^n} элементов.

Так, например, $\alpha(A, B)$, $A \triangle B \neq \emptyset$, состоит из 16 элементов вида

$$A, B, \bar{A}, \bar{B}, A \cap B, \bar{A} \cap \bar{B}, A \setminus B, B \setminus A,$$

$$A \cup B, A \cup \bar{B}, \bar{A} \cup B, \bar{A} \cup \bar{B}, A \triangle B, \overline{A \triangle B}, \Omega, \emptyset,$$

где $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ — «симметрическая разность» множеств A и B .

Решение. Полагая $A^1 = A$ и $A^0 = \bar{A}$, получаем

$$\mathcal{A} = \alpha(A_1, \dots, A_n) = \alpha(A_\sigma, \sigma \in \{0, 1\}^n), \quad A_\sigma = A_1^{\sigma_1} \cap \dots \cap A_n^{\sigma_n}, \\ \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n).$$

Поэтому $\mathcal{A}$ состоит из всевозможных объединений множеств A_σ . Всего их $2^{|\{A_\sigma : \sigma \in \{0, 1\}^n\}|} \leq 2^{2^n}$, где $|C|$ — мощность множества C . $\square$

11. Доказать *неравенство Буля*

$$(a) \quad P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i), \quad P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^n P(\bar{A}_i).$$

Показать также, что для любого $n \geq 1$ справедливы неравенство

$$(b) \quad P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \geq \sum_{i=1}^n P(A_i) - (n-1)$$

и *неравенство Куниаса*

$$(c) \quad P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \min_k \left\{ \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i \neq k} P(A_i \cap A_k) \right\}.$$

Доказать *взвешенное неравенство Чжуна—Эрдёша*

$$(d) \quad P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \geq \frac{\left[\sum_{i=1}^n \alpha_i P(A_i)\right]^2}{\sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j P(A_i \cap A_j)}, \quad \alpha_i \in \mathbb{R},$$

а также его частный случай

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \geq n^2 \left[\sum_{i,j=1}^n \frac{P(A_i \cap A_j)}{P(A_i)P(A_j)} \right]^{-1}, \quad P(A_i) > 0; \quad (*)$$

неравенство Каена—Селлберга

$$(e) \quad P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \frac{P(A_i)^2}{\sum_{j=1}^n P(A_i \cap A_j)}$$

и неравенство Хантера—Ворсли

$$(f) \quad P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{\{i,j\} \in \Gamma} P(A_i \cap A_j),$$

где суммирование во второй сумме ведется по всем ребрам $\{i, j\}$ произвольного дерева Γ с вершинами $\{1, \dots, n\}$.

Решение. (а) и (б) Утверждения являются тривиальными следствиями формулы включения-исключения из задачи I.1.12 и того факта, что $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}$.

(с) Из элементарных свойств вероятности находим, что

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= P\left(A_k \cup \bigcup_{i \neq k} (A_i \setminus A_k)\right) = P(A_k) + P\left(\bigcup_{i \neq k} (A_i \setminus A_k)\right) \leq \\ &\leq P(A_k) + \sum_{i \neq k} P(A_i \setminus A_k) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i \neq k} P(A_i \cap A_k). \end{aligned}$$

(d) Обозначим

$$\xi = \sum_{i=1}^n I_{A_i}, \quad \eta = \sum_{i=1}^n \alpha_i I_{A_i}.$$

Тогда $(E\eta)^2 = (E\eta I(\xi \neq 0))^2 \leq P(\xi \neq 0) E\eta^2$. Неравенство (*) есть частный случай взвешенного неравенства Чжуна—Эрдёша при $\alpha_i = 1/P(A_i)$.

(е) Определим разбиение $\mathcal{A}$ пространства исходов Ω всевозможными пересечениями событий $A_1, \bar{A}_1, \dots, A_n, \bar{A}_n$. Пусть A — элемент разбиения $\mathcal{A}$. Имеет место равенство

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{\exists i: A \subset A_i} P(A) = \sum_{i=1}^n \sum_{A \subset A_i} \frac{P(A)}{d(A)}, \quad d(A) = |\{i: A \subset A_i\}|.$$

По неравенству Коши—Буняковского

$$\sum_{A \subset A_i} \frac{P(A)}{d(A)} \cdot \sum_{A \subset A_i} P(A)d(A) \geq \left(\sum_{A \subset A_i} P(A) \right)^2 = P(A_i)^2.$$

Осталось заметить, что $\sum_{A \subset A_i} P(A)d(A) = \sum_{j=1}^n P(A_i \cap A_j)$, $1 \leq i \leq n$.

(i) Для вывода искомой оценки нам понадобится равенство

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P(A_{\pi(1)}) + P(\bar{A}_{\pi(1)} \cap A_{\pi(2)}) + \dots + P(\bar{A}_{\pi(1)} \cap \bar{A}_{\pi(2)} \dots \cap A_{\pi(n)}),$$

где π — произвольная перестановка чисел $1, \dots, n$.

Пусть, например, $\{1, 3\}, \{1, 4\}, \dots, \{1, n\}, \{2, 3\}$ — все ребра графа Γ . Тогда, полагая в последнем соотношении $\pi(1, \dots, n) = (1, 3, 4, \dots, n, 2)$, получаем

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq P(A_1) + P(\bar{A}_1 \cap A_3) + \dots + P(\bar{A}_1 \cap A_n) + P(\bar{A}_2 \cap A_3).$$

Левая часть данного неравенства равна $\sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{\{i,j\} \in \Gamma} P(A_i \cap A_j)$.

Случай произвольного графа Γ рассматривается аналогично. $\square$

12. Доказать следующие формулы «включения-исключения» (называемые *формулами Пуанкаре, теоремами Пуанкаре, тождествами Пуанкаре*) для вероятностей объединения и пересечения событий $A_1, \dots, A_n$: для каждого $n \geq 1$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad P(A_1 \cup \dots \cup A_n) &= \sum_{1 \leq i_1 \leq n} P(A_{i_1}) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \dots \\ &\quad \dots + (-1)^{m+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m}) + \dots \\ &\quad \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad P(A_1 \cap \dots \cap A_n) &= \sum_{1 \leq i_1 \leq n} P(A_{i_1}) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cup A_{i_2}) + \dots \\ &\quad \dots + (-1)^{m+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} P(A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_m}) + \dots \\ &\quad \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cup \dots \cup A_n). \end{aligned}$$

Замечание. Формулы (а) и (б) кратко можно записать в виде

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{m=1}^n (-1)^{m+1} S_m, \quad P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{m=1}^n (-1)^{m+1} \tilde{S}_m,$$

где

$$S_m = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m}), \quad \tilde{S}_m = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} P(A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_m}).$$

Решение. (а) Доказательство проведем по индукции.

База индукции: $n = 2$. Имеем

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) &= P((A_1 \setminus (A_1 \cap A_2)) \sqcup (A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)) \sqcup (A_1 \cap A_2)) = \\ &= (P(A_1) - P(A_1 \cap A_2)) + (P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_2)) = \\ &= [P(A_1) + P(A_2)] - P(A_1 \cap A_2), \end{aligned}$$

где $\sqcup$ — объединение непересекающихся множеств.

Шаг индукции: пусть утверждение верно для $n = k$. Докажем его для $n = k + 1$. Применяя предположение индукции для $n = k$ и $n = 2$, получаем

$$\begin{aligned} P((A_1 \cup \dots \cup A_k) \cup A_{k+1}) &= \\ &= P(A_1 \cup \dots \cup A_k) + P(A_{k+1}) - P((A_1 \cup \dots \cup A_k) \cap A_{k+1}) = \\ &= \sum_{1 \leq i_1 \leq k+1} P(A_{i_1}) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \dots \\ &\quad \dots + (-1)^{m+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq k} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m}) + \dots \\ &\quad \dots + (-1)^{k+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_k) - P((A_1 \cup \dots \cup A_k) \cap A_{k+1}). \quad (*) \end{aligned}$$

Остается применить предположение индукции к последнему вычитаемому из формулы (*):

$$\begin{aligned} P((A_1 \cap A_{k+1}) \cup \dots \cup (A_k \cap A_{k+1})) &= \\ &= \sum_{1 \leq i_1 \leq k} P(A_{i_1} \cap A_{k+1}) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{k+1}) + \dots \\ &\quad \dots + (-1)^{m+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq k} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m} \cap A_{k+1}) + \dots \\ &\quad \dots + (-1)^{k+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_{k+1}). \end{aligned}$$

Подставляя последнее выражение в формулу (*), получаем требуемое утверждение.

(b) Заметим, что

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P\left(\overline{\bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i\right).$$

Воспользуемся результатом п. (a), взяв вместо $A_1, \dots, A_n$ множества $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n$. Получим

$$\begin{aligned} 1 - P(A_1 \cap \dots \cap A_n) &= \sum_{1 \leq i_1 \leq n} [1 - P(A_{i_1})] - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} [1 - P(A_{i_1} \cup A_{i_2})] + \dots \\ &\dots + (-1)^{m+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} [1 - P(A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_m})] + \dots \\ &\dots + (-1)^{n+1} [1 - P(A_1 \cup \dots \cup A_n)]. \end{aligned}$$

Для доказательства п. (b) остается показать, что все единицы взаимно уничтожаются. Это следует из п. (a), если взять $A_1 = \dots = A_n = \Omega$. $\square$

13. Пусть B_m есть событие, состоящее в том, что одновременно произойдет *в точности* m событий из n событий $A_1, \dots, A_n$, $0 \leq m \leq n$.

Показать, что

$$P(B_m) = \sum_{k=m}^n (-1)^{k-m} C_k^m S_k,$$

или, в развернутом виде,

$$P(B_m) = S_m - C_{m+1}^1 S_{m+1} + \dots + (-1)^{n-m} C_n^{n-m} S_n.$$

Вывести отсюда, что вероятность $P(B_{\geq m})$ события $B_{\geq m}$, состоящего в том, что одновременно произойдет *по крайней мере* m событий из n событий $A_1, \dots, A_n$, определяется формулой

$$P(B_{\geq m}) (= P(B_m) + \dots + P(B_n)) = \sum_{k=m}^n (-1)^{k-m} C_{k-1}^{m-1} S_k,$$

или, эквивалентно,

$$P(B_{\geq m}) = S_m - C_m^1 S_{m+1} + \dots + (-1)^{n-m} C_{n-1}^{n-m} S_n.$$

Решение. Воспользуемся понятием математического ожидания (см. В1.1.4).

Пусть X_i — индикатор события A_i . Рассмотрим случайную величину

$$\xi_m = \sum X_{i_1} \dots X_{i_m} (1 - X_{i_{m+1}}) \dots (1 - X_{i_n}), \quad (*)$$

где суммирование ведется по всем таким упорядоченным наборам $(i_1, \dots, i_n)$, что $\{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\}$.

Заметим, что $\xi_m(\omega)$ обращается в нуль, если при данном ω произошло более или менее, чем m событий. Если произошло в точности m событий, то в сумме (*) ровно $m!(n-m)!$ слагаемых не равны нулю, а значит, $\xi_m(\omega) = m!(n-m)!$. Поскольку ξ_m принимает ровно два значения, получаем, что $E\xi_m = m!(n-m)!P(B_m)$. Далее,

$$(1 - X_{i_{m+1}}) \dots (1 - X_{i_n}) = \sum_{t=0}^{n-m} \left((-1)^t \sum_{m+1 \leq j_1 < \dots < j_t \leq n} X_{i_{j_1}} \dots X_{i_{j_t}} \right).$$

Подставляя последнее выражение в формулу (*), получаем

$$\xi_m = \sum_{t=0}^{n-m} \sum_{t=0}^{n-m} (-1)^t \left(X_{i_1} \dots X_{i_m} \sum_{m+1 \leq j_1 < \dots < j_t \leq n} X_{i_{j_1}} \dots X_{i_{j_t}} \right).$$

За счет внутренней суммы каждое слагаемое (после раскрытия скобок) будет встречаться в большой сумме C_{n-m}^t раз, значит,

$$\xi_m = \sum_{t=0}^{n-m} (-1)^t C_{n-m}^t \sum X_{i_1} \dots X_{i_{m+t}},$$

где суммирование ведется по всем таким упорядоченным наборам $(i_1, \dots, i_n)$, что $\{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\}$. Поскольку последние $n - (m+k)$ индексов не задействованы, данная сумма равна

$$(n - (m+t))! \sum X_{i_1} \dots X_{i_{m+t}},$$

где суммирование ведется по всем упорядоченным наборам чисел от 1 до n длины $m+t$. В данной сумме каждое слагаемое повторялось $(m+t)!$ раз, поэтому она равна

$$(n - (m+t))! (m+t)! \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{m+t} \leq n} X_{i_1} \dots X_{i_{m+t}}.$$

Используя то, что $E X_{i_1} \dots X_{i_t} = P(A_{i_1} \dots A_{i_t})$, получаем

$$\begin{aligned} E\xi_m &= \sum_{t=0}^{n-m} (-1)^t C_{n-m}^t (n-m-t)! (m+t)! S_{m+t} = \\ &= \sum_{t=0}^{n-m} (-1)^t \frac{(n-m)! (m+t)!}{t!} S_{m+t}. \end{aligned}$$

Сделав замену переменной $k = m+t$, получим

$$P(B_m) = \frac{E\xi_m}{m! (n-m)!} = \sum_{k=m}^n (-1)^{k-m} C_k^m S_k.$$

Формулу для $P(B_{\geq m})$ докажем по индукции.

База индукции: $m = n$, тогда

$$P(B_{\geq n}) = P(B_n) = S_n = C_{n-1}^{n-1} S_n.$$

Шаг индукции: пусть формула для $P(B_{\geq m})$ верна для $m = t + 1$. Докажем ее для $m = t$. Имеем

$$\begin{aligned} P(B_{\geq t}) &= P(B_t) + P(B_{\geq t+1}) = \\ &= \sum_{k=t}^n (-1)^{k-t} C_k^t S_k + \sum_{k=t+1}^n (-1)^{k-t-1} C_{k-1}^t S_k = \\ &= \sum_{k=t+1}^n (-1)^{k-t} (C_k^t - C_{k-1}^t) S_k + S_t. \end{aligned} \quad (**)$$

Поскольку $C_k^t - C_{k-1}^t = C_{k-1}^{t-1}$ в силу задачи I.2.2(b) и $C_{t-1}^{t-1} = 1$, выражение (**) равно

$$\sum_{k=t}^n (-1)^{k-t} C_{k-1}^{t-1} S_k. \quad \square$$

14. Вывести из формул для $P(B_m)$ и $P(B_{\geq m})$ из задачи I.1.13, что для всякого четного r справедливы *формулы Бонферрони*

$$\begin{aligned} S_m + \sum_{k=1}^{r+1} (-1)^k C_{m+k}^k S_{m+k} &\leq P(B_m) \leq S_m + \sum_{k=1}^r (-1)^k C_{m+k}^k S_{m+k}, \\ S_m + \sum_{k=1}^{r+1} (-1)^k C_{m+k-1}^k S_{m+k} &\leq P(B_{\geq m}) \leq S_m + \sum_{k=1}^r (-1)^k C_{m+k-1}^k S_{m+k}. \end{aligned}$$

Решение. Докажем вспомогательные формулы

$$S_m = \sum_{r=m}^n C_r^m P(B_r), \quad S_m = \sum_{r=m}^n C_{r-1}^{m-1} P(B_{\geq r}).$$

Рассмотрим все возможные пересечения m множеств A_i . Пусть при элементарном исходе ω произошло ровно t ($n \geq t \geq m$) событий A_i . При подсчете S_m этот элементарный исход учитывался C_t^m раз. Таким образом, при подсчете S_m мы C_m^m раз посчитали исходы из B_m , ..., C_n^m раз посчитали исходы из B_n . Значит, $S_m = \sum_{r=m}^n C_r^m P(B_r)$.

Поскольку $P(B_r) = P(B_{\geq r}) - P(B_{\geq r+1})$, получаем, что

$$\begin{aligned} S_m &= \sum_{r=m}^n C_r^m P(B_r) = \sum_{r=m}^n C_r^m P(B_{\geq r}) - \sum_{r=m}^{n-1} C_r^m P(B_{\geq r+1}) = \\ &= \sum_{r=m}^n C_r^m P(B_{\geq r}) - \sum_{r=m+1}^n C_{r-1}^m P(B_{\geq r}) = \\ &= \sum_{r=m+1}^n (C_r^m - C_{r-1}^m) P(B_{\geq r}) + P(B_{\geq m}) = \sum_{r=m}^n C_{r-1}^{m-1} P(B_{\geq m}). \end{aligned}$$

Последнее равенство верно в силу задачи I.2.2(b): $C_r^m - C_{r-1}^m = C_{r-1}^{m-1}$ и $C_{m-1}^{m-1} = 1$. Таким образом, вспомогательные формулы доказаны.

В силу задачи I.1.13 имеем

$$P(B_m) = S_m + \sum_{k=1}^{n-m} (-1)^k C_{k+m}^k S_{k+m}.$$

Если обозначить $\xi_r = \sum_{k=r}^{n-m} (-1)^k C_{k+m}^k S_{k+m}$, то для доказательства первого неравенства из формулировки достаточно показать, что при допустимых четных r верны неравенства $\xi_{r+2} \geq 0$ и $\xi_{r+1} \leq 0$, т. е. для любого r , $0 \leq r \leq n-m$, верно, что $(-1)^r \xi_r \geq 0$. Далее,

$$(-1)^r \xi_r = \sum_{k=r}^{n-m} (-1)^{k-r} C_{k+m}^m S_{k+m} = \sum_{k=r+m}^n (-1)^{k+m-r} C_k^m S_k.$$

Неотрицательность $(-1)^r \xi_r$ для любого r , $1 \leq r \leq n-m$, эквивалентна неотрицательности $\eta_h := \sum_{k=h}^n (-1)^{k-h} C_k^m S_k$ для любого h , $m \leq h \leq n$.

Пользуясь первой вспомогательной формулой для S_k , находим, что

$$\begin{aligned} \eta_h &= \sum_{k=h}^n (-1)^{k-h} C_k^m \sum_{r=k}^n C_r^k P(B_r) = \\ &= \sum_{k=h}^n \sum_{r=k}^n (-1)^{k-h} C_k^m C_r^k P(B_r) = \sum_{r=h}^n P(B_r) \sum_{k=h}^r (-1)^{k-h} C_k^m C_r^k. \end{aligned}$$

Для доказательства того, что $\eta_h \geq 0$ для всех h , $m \leq h \leq n$, достаточно доказать, что $\zeta_{r,h} := \sum_{k=h}^r (-1)^{k-h} C_k^m C_r^k \geq 0$ для всех h , $m \leq h \leq n$, и всех

$r, h \leq r \leq n$. Заметим, что

$$C_k^m C_r^k = \frac{k!}{m!(k-m)!} \cdot \frac{r!}{k!(r-k)!} = \frac{r!}{m!(r-m)!} \cdot \frac{(r-m)!}{(r-k)!(k-m)!} = C_r^m C_{r-m}^{k-m}.$$

Таким образом, $\zeta_{r,h} = C_r^m \sum_{k=h}^r (-1)^{k-h} C_{r-m}^{k-m}$. Докажем по индукции, что

$$\sum_{k=h}^r (-1)^{k-h} C_{r-m}^{k-m} = C_{r-m-1}^{h-m-1} \quad (\text{считаем, что } C_{-1}^{-1} = C_{-1}^0 = C_0^0 = 1).$$

Отсюда будет следовать неотрицательность $\zeta_{r,h}$.

При $h = r$ утверждение очевидно. Если утверждение доказано при $h = t + 1$, то при $h = t$ к сумме добавляется еще одно слагаемое и по предположению индукции сумма будет иметь вид $C_{r-m}^{t-m} - C_{r-m-1}^{t-m-1}$. Тем самым первое неравенство Бонферрони доказано. Второе называется аналогично с соответствующими заменами в индексах числа сочетаний. $\square$

15. Используя определение чисел S_m и $\tilde{S}_m$ из задачи I.1.12, доказать

(а) *неравенства Бонферрони* (частный случай формул из предыдущей задачи)

$$S_1 - S_2 + \dots - S_{2k} \leq P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq S_1 - S_2 + \dots + S_{2k-1},$$

где $k \geq 1$ таково, что $2k \leq n$;

(б) *неравенство Гумбеля*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \frac{\tilde{S}_m}{C_{n-1}^{m-1}}, \quad m = 1, \dots, n;$$

(с) *неравенство Фреше*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \frac{\tilde{S}_{m+1}}{C_{n-1}^m} \leq \frac{\tilde{S}_m}{C_{n-1}^{m-1}}, \quad m = 0, 1, \dots, n-1;$$

Решение. (а) Заметим, что $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P(B_{\leq 1})$. Утверждение задачи следует из второго неравенства Бонферрони из задачи I.1.14.

(б) Каждое ω из множества $\bigcup_{i=1}^n A_i$ принадлежит какому-то A_k (может быть, нескольким). В $\tilde{S}_m$ событие A_k участвует в C_{n-1}^{m-1} слагаемых, т. е. при подсчете $\tilde{S}_m$ исход ω учтен по меньшей мере C_{n-1}^{m-1} раз, откуда следует, что $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \tilde{S}_m / C_{n-1}^{m-1}$.

(с) Заметим, что вторая часть неравенства означает невозрастание $\tilde{S}_m/C_{n-1}^{m-1}$, когда m убывает от n до 1, причем $\tilde{S}_1/C_{m-1}^0 = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)$, так что первая часть неравенства следует из второй. Далее, $\tilde{S}_m = C_n^m - \bar{S}_m$, где $\bar{S}_m = \sum P(\bar{A}_{i_1} \cap \dots \cap \bar{A}_{i_m})$, суммирование ведется по множеству $I_m := \{(i_1, \dots, i_m) : 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n\}$. Следовательно, доказываемое неравенство имеет вид

$$\frac{C_n^{m+1} - \bar{S}_{m+1}}{C_{n-1}^m} \leq \frac{C_n^m - \bar{S}_m}{C_{n-1}^{m-1}}. \quad (*)$$

Пусть $\bar{X}_i$ — индикатор множества $\bar{A}_i$. Тогда $\bar{S}_m = \sum_{I_m} E\bar{X}_{i_1} \dots \bar{X}_{i_m}$. В силу свойств математического ожидания неравенство (*) будет верно, если для каждого ω выполнено неравенство

$$\frac{C_n^{m+1} - \sum_{I_{m+1}} \bar{X}_{i_1} \dots \bar{X}_{i_{m+1}}}{C_{n-1}^m} \leq \frac{C_n^m - \sum_{I_m} \bar{X}_{i_1} \dots \bar{X}_{i_m}}{C_{n-1}^{m-1}}. \quad (**)$$

Пусть при данном ω произошло менее m событий из $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n$. Тогда неравенство (**) имеет вид $C_n^{m+1}/C_{n-1}^m \leq C_n^m/C_{n-1}^{m-1}$, что равносильно неравенству $\frac{n}{m+1} \leq \frac{n}{m}$, которое, очевидно, выполнено.

Пусть при данном ω произошло t событий из $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n$ ($t \geq m$). Тогда неравенство (**) будет иметь вид

$$\frac{C_n^{m+1} - C_t^{m+1}}{C_{n-1}^m} \leq \frac{C_n^m - C_t^m}{C_{n-1}^{m-1}}.$$

После сокращения общих множителей и приведения подобных слагаемых данное неравенство приводится к виду

$$C_t^m(nm - tm + n - m) \leq C_n^m(n - m). \quad (***)$$

При $t = n$ это неравенство обращается в равенство, и для его доказательства достаточно показать невозрастание $C_t^m(nm - tm + n - m)$, когда t убывает от n до m , т. е. проверить, что

$$C_{t+1}^m(nm - (t+1)m + n - m) \geq C_t^m(nm - tm + n - m)$$

при $m \leq t \leq n-1$. Расписав C_{t+1}^m и C_t^m по определению, домножив неравенство на знаменатели, сократив общие множители, перенеся все

слагаемые в правую часть и приведя подобные слагаемые, получаем неравенство $nm + n - m - mt - t - 1 \geq 0$, или, что равносильно, $(m+1)((n-1)-t) \geq 0$. Последнее неравенство выполнено при $m \leq t \leq n-1$. $\square$

16. («Задача о беспорядках».) Пусть $(i_1, \dots, i_n)$ — случайная перестановка (с вероятностью $1/n!$) чисел $1, \dots, n$. Показать, что

(а) вероятность $P_{(m)}$ того, что при перестановках чисел $1, \dots, n$ в точности m чисел останутся на своих местах, равна

$$\frac{1}{m!} \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n-m} \frac{1}{(n-m)!} \right) \quad \left(\sim \frac{e^{-1}}{m!}, \text{ при } n \rightarrow \infty \right);$$

(б) вероятность $P_{(\geq 1)}$ того, что в результате перестановок по крайней мере одно из чисел $1, \dots, n$ останется на своем месте, равна

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} \quad (\sim 1 - e^{-1}, \quad n \rightarrow \infty),$$

и, следовательно, вероятность полного «беспорядка» (когда ни одно из чисел не остается на своем месте) равна $1 - P_{(\geq 1)} = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!} \quad (\sim e^{-1} \text{ при } n \rightarrow \infty)$.

Решение. (а) Пусть $A_i = \{i\text{-е число на своем месте}\}$. Тогда $P_{(m)} = P(B_m)$, где B_m определено в задаче I.1.13. Утверждение будет следовать из задачи I.1.13, если показать, что $S_k = \frac{1}{k!}$, $1 \leq k \leq n$.

Поскольку все перестановки равновероятны,

$$\begin{aligned} S_k &= \frac{1}{n!} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = \frac{1}{n!} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (n-k)! = \\ &= \frac{(n-k)!}{n!} C_n^k = \frac{1}{k!}, \end{aligned}$$

где $|C|$ — мощность множества C .

(б) Утверждение задачи напрямую следует из формулы для $P(B_{\geq 1}) = P_{(\geq 1)}$ из задачи I.1.13 и формулы для S_k , полученной в п. (а) данной задачи. $\square$

17. («Задача о совпадениях».) Пусть имеется n писем и n конвертов. Письма по конвертам раскладываются «случайным образом», иначе говоря, предполагается, что приписывание соответствующих вероятностей осуществляется в соответствии с «классическим» способом задания вероятностей. Пусть $P_{(m)}$ — вероятность того, что в точности m писем попадут в «свои» конверты.

Показать, что

$$P_{(m)} = \frac{1}{m!} \left(1 + \sum_{j=1}^{n-m} \frac{(-1)^j}{j!} \right).$$

Решение. Естественно прежде всего задаться вопросом о том, что следует понимать под словами «письма раскладываются по конвертам случайным образом». Если считать, что письмо с номером 1 помещается наугад в один из n конвертов, письмо с номером 2 — наугад в любой из $n - 1$ конвертов и т. д., то такая процедура может рассматриваться как «выбор без возвращения», ставящий в соответствие номерам $(1, \dots, n)$ раскладываемых писем упорядоченный набор $(a_1, \dots, a_n)$ номеров конвертов. Таких разных наборов будет $(n)_n = n!$, и в соответствии с классическим принципом «равновозможности» вероятность получения конкретного набора $(a_1, \dots, a_n)$ считается равной $1/n!$.

Обозначим через A_i событие, состоящее в том, что i -е письмо попадет в i -й конверт. Тогда (в обозначениях задачи I.1.13) $P_{(m)} = P(B_m)$ и, следовательно,

$$P_{(m)} = \sum_{k=m}^n (-1)^{k-m} C_k^m S_k. \quad (*)$$

По аналогии с решением задачи I.1.16(a) находим, что $S_k = \frac{1}{k!}$. Подставляя значение S_k в формулу (*), получаем требуемое утверждение. $\square$

18. Уходя из детского сада, каждый из n детей «случайным образом» берет один левый и один правый ботинок. Показать, что

(a) вероятность P_a того, что все они уйдут не в своих парах ботинок, равна

$$P_a = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n-k)!}{k! n!};$$

(b) вероятность P_b того, что каждый из них возьмет не свой левый и не свой правый ботинок, равна

$$P_b = \left(\sum_{k=2}^n (-1)^k \frac{1}{k!} \right)^2.$$

Решение. Придадим смысл словам «случайным образом». Пусть сначала дети берут левые ботинки с вероятностью получения каждого

набора, как и в предыдущих задачах, $\frac{1}{n!}$, потом так же правые, причем выбор правого ботинка не зависит от выбора левого, т. е. вероятность каждого набора $\left(\frac{1}{n!}\right)^2$. Обозначим через A_i событие, состоящее в том, что i -й ребенок возьмет свою пару ботинок.

(а) Нас интересует вероятность того, что не произойдет ни одно из событий A_i . В обозначениях задачи I.1.12 она равна $1 - P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - S_1 + \dots + (-1)^n S_n$. Вычислим S_k . В силу симметрии вероятность пересечения k различных событий $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ не зависит от набора $(i_1, \dots, i_k)$. Каждая такая вероятность равна отношению числа «удачных» исходов $((n-k)!)^2$ к числу всех исходов $(n!)^2$. Таким образом, $S_k = C_n^k \frac{((n-k)!)^2}{(n!)^2} = \frac{(n-k)!}{n!k!}$. Отсюда получаем формулу для искомой вероятности:

$$P_a = 1 - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{(n-k)!}{k!n!}.$$

(б) Пусть C_{0l} есть событие, состоящее в том, что каждый ребенок взял не свой левый ботинок, C_{0r} — не свой правый. В силу симметрии и независимости выбора правого и левого ботинка $P(C_{0l} \cap C_{0r}) = P^2(C_{0l})$. С учетом задачи I.1.17 получаем, что

$$P(C_{0l}) = \sum_{k=2}^n (-1)^k \frac{1}{k!}.$$

$$\text{Тем самым } P(C_{0l} \cap C_{0r}) = \left(\sum_{k=2}^n (-1)^k \frac{1}{k!}\right)^2. \quad \square$$

19. Рассматриваются n частиц, размещаемых по M ячейкам в соответствии со статистикой *Максвелла—Больцмана* («различимые частицы, размещение без запрета»). Придерживаясь классического способа Лапласа задания вероятностей по формуле (10) из В1.1.1 (что соответствует, как говорят, «случайному» характеру размещения частиц), показать, что вероятность $P_k(n; M)$ того, что в фиксированной ячейке содержится k частиц, определяется формулой

$$P_k(n; M) = C_n^k \frac{(M-1)^{n-k}}{M^n}.$$

Вывести отсюда, что если $n \rightarrow \infty$, $M \rightarrow \infty$, но так, что $n/M \rightarrow \lambda > 0$, то

$$P_k(n; M) \rightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Решение. Найдем число элементарных событий, составляющих событие A — «в фиксированной ячейке содержится k частиц». Число различных упорядоченных наборов из k различных частиц есть C_n^k , каждому набору соответствует еще $(M-1)^{n-k}$ способов размещения остальных $n-k$ частиц по $M-1$ ячейкам. Всего элементарных событий M^n , так что искомая вероятность действительно равна $C_n^k \frac{(M-1)^{n-k}}{M^n}$. Предположим, что $n \rightarrow \infty$, $M \rightarrow \infty$, причем $\frac{n}{M} \rightarrow \lambda > 0$. Тогда

$$C_n^k = \frac{1}{k!} n(n-1)\dots(n-k+1) \quad \text{и} \quad \frac{C_n^k}{n^k} \rightarrow \frac{1}{k!}.$$

Таким образом,

$$P_k(n; M) \sim \frac{1}{k!} \frac{n^k}{M^k} \left(1 - \frac{1}{M}\right)^{n-k} \sim \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{M}\right)^{\lambda M},$$

что, в свою очередь, стремится к $e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$. $\square$

20. (Продолжение задачи I.1.19.) Пусть $R_m(n; M)$ означает вероятность того, что в точности m ячеек останутся пустыми. Показать, что

$$R_m(n; M) = C_M^n \sum_{k=0}^{M-m} (-1)^k C_{M-m}^k \left(1 - \frac{m+k}{M}\right)^n.$$

Решение. Пусть A_i — событие « i -я ячейка осталась пустой». В обозначениях задачи I.1.12 нас интересует вероятность $P(B_m)$. Найдем S_k . Из симметрии все вероятности пересечений k событий A_i равны. Каждому пересечению соответствует $(M-k)^n$ исходов, таким образом, $S_k = C_M^k \frac{(M-k)^n}{M^n}$ и

$$\begin{aligned} R_m(n; M) &= \sum_{k=m}^M (-1)^{k-m} C_k^m C_M^k \frac{(M-k)^n}{M^n} = \\ &= C_M^m \sum_{k=m}^M (-1)^{k-m} C_{M-m}^{k-m} \frac{(M-k)^n}{M^n}. \end{aligned}$$

В последнем переходе мы преобразовали произведение биномиальных коэффициентов аналогично тому, как делалось в задаче I.1.14. Теперь сделаем замену переменной, обозначив $k-m$ за k . Получим

$$R_m(n; M) = C_M^n \sum_{k=0}^{M-m} (-1)^k C_{M-m}^k \left(1 - \frac{m+k}{M}\right)^n. \quad \square$$

21. Рассматривается «случайное» размещение n частиц по M ячейкам в соответствии со статистикой *Бозе–Эйнштейна* («неразличимые частицы, размещение без запрета»). Пусть $Q_k(n; M)$ — вероятность того, что в фиксированной ячейке содержится k частиц.

Показать, что

$$Q_k(n; M) = \frac{C_{M+n-k-2}^{n-k}}{C_{M+n-1}^n}$$

и если $n \rightarrow \infty$, $M \rightarrow \infty$, но так, что $n/M \rightarrow \lambda > 0$, то

$$Q_k(n; M) \rightarrow p(1-p)^k, \quad \text{где } p = \frac{1}{1+\lambda}.$$

Решение. Заметим, что согласно задаче I.1.6 всего различных размещений C_{M+n-1}^n , а удовлетворяющих указанному свойству столько же, сколько всего размещений $n-k$ частиц по $M-1$ ячейке. Значит, искомая вероятность равна

$$\begin{aligned} Q_k(n; M) &= \frac{C_{M+n-k-2}^{n-k}}{C_{M+n-1}^n} = \frac{(M+n-k-2)! n! (M-1)!}{(n-k)! (M-2)! (M+n-1)!} = \\ &= (M-1) \frac{(M+n-k-2)!}{(M+n-1)!} \frac{n!}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

Первая дробь есть единица, деленная на произведение $k+1$ чисел, асимптотически эквивалентных $(M+n) \sim (1+\lambda)M$, вторая эквивалентна $\lambda^k M^k$. Таким образом, все выражение асимптотически эквивалентно

$$\frac{\lambda^k}{(1+\lambda)^{k+1}} = \frac{1}{1+\lambda} \left(\frac{\lambda}{1+\lambda} \right)^k = p(1-p)^k, \quad \text{где } p = \frac{1}{1+\lambda}. \quad \square$$

22. Из урны, содержащей M шаров с номерами $1, \dots, M$, «случайным» образом n раз осуществляется выбор с возвращением. Рассматривается событие A_k , состоящее в том, что максимальный номер у извлеченных шаров равен k . Показать, что

$$P(A_k) = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n}.$$

Показать также, что если осуществляется выбор без возвращения, то

$$P(A_k) = \frac{C_{k-1}^{n-1}}{C_N^k}, \quad n \leq k \leq N.$$

Решение. Рассмотрим события D_m , состоящие в том, что номера всех вытащенных шаров не превосходят m . Тогда $P(D_m) = \frac{m^n}{N^n}$,

поскольку вероятность того, что каждый из n шаров будет из первых m , есть $\frac{m}{n}$. Но тогда $D_{k-1} \subset D_k$ и $D_k \setminus D_{k-1} = A_k$, а значит, $P(A_k) = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n}$.

При выборе без возвращения есть всего C_N^n всевозможных способов выбора и из них нам нужно выбрать те, в которых присутствует шар с номером k , а остальные $n-1$ шаров содержатся среди первых $k-1$. Таким образом, искомая вероятность равна $\frac{C_{k-1}^{n-1}}{C_N^n}$. $\square$

23. Доказать *формулу Лейбница* дифференцирования произведения двух функций f и g :

$$D^N(fg) = \sum_{n=0}^N C_N^n (D^n f)(D^{N-n} g).$$

Решение. Проведем доказательство по индукции. В случае $N=1$ утверждение имеет вид $(fg)' = fg' + f'g$, что верно в силу свойства дифференцирования. Пусть утверждение доказано для N -й производной, тогда

$$\begin{aligned} D^{N+1}(fg) &= \left(\sum_{n=0}^N C_N^n (D^n f)(D^{N-n} g) \right)' = \\ &= \sum_{n=0}^N C_N^n (D^n f)(D^{N-n+1} g) + \sum_{n=0}^N C_N^n (D^{n+1} f)(D^{N-n} g) = \\ &= \sum_{n=0}^N C_N^n (D^n f)(D^{N-n+1} g) + \sum_{n=1}^{N+1} C_N^{n-1} (D^n f)(D^{N-n+1} g) = \\ &= \sum_{n=1}^N (C_N^n + C_N^{n-1}) (D^n f)(D^{N-n+1} g) + \\ &\quad + C_N^0 (D^0 f)(D^{N+1} g) + C_N^N (D^{N+1} f)(D^0 g). \end{aligned} \quad (*)$$

Воспользуемся тем, что $C_N^n + C_N^{n-1} = C_{N+1}^n$ и что $C_n^0 = C_{N+1}^0 = 1 = C_{N+1}^{N+1} = C_N^N$. С учетом этого из формулы (*) непосредственно получаем, что

$$D^{N+1}(fg) = \sum_{n=0}^{N+1} C_{N+1}^n (D^n f)(D^{N-n+1} g),$$

что и требовалось доказать. $\square$

§ 2. Некоторые классические задачи и распределения

1. Показать, что

$$(a) \quad (x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k} \quad (\text{биномиальное тождество}),$$

$$(b) \quad (x + y)_n = \sum_{k=0}^n C_n^k (x)_k (y)_{n-k} \quad (\text{тождество Вандермонда}),$$

$$(c) \quad [x + y]_n = \sum_{k=0}^n C_n^k [x]_k [y]_{n-k} \quad (\text{тождество Нёрлунда}),$$

где

$$(x)_n = x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1),$$

$$[x]_n = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1).$$

Решение. (a) Если раскрыть все скобки в $(x + y)^n$ без приведения подобных слагаемых, получится 2^n слагаемых вида $x^k y^{n-k}$, $k = 0, \dots, n$. Слагаемое $x^k y^{n-k}$ получается, если от k скобок в $(x + y)^n$ взять слагаемое x , а от оставшихся $-y$. В произведении $(x + y)^n$ ровно k скобок можно выбрать C_n^k способами, значит, и слагаемых $x^k y^{n-k}$ при раскрытии скобок в $(x + y)^n$ будет столько же.

(b) Пусть $x, y \in \mathbb{N}$, $x \geq n$, $y \geq n$. Рассмотрим множество X , состоящее из x различных элементов, и множество Y , состоящее из y различных элементов, отличных от элементов множества X . Найдем число упорядоченных наборов элементов из $X \cup Y$ длины n .

С одной стороны, это есть число размещений из $x + y$ по n . С другой стороны, все наборы можно разбить на классы по числу в них элементов из X , обозначив число этих элементов за k . Число упорядоченных наборов элементов из X длины k есть $(x)_k$, а из Y длины $n - k$ есть $(y)_{n-k}$. Число способов перемешать эти наборы с сохранением порядка среди элементов из X и среди элементов из Y есть C_n^k . Таким образом, число наборов в каждом классе есть $C_n^k (x)_k (y)_{n-k}$, что и доказывает требуемую формулу для $x, y \in \mathbb{N}$, $x \geq n$, $y \geq n$.

В случае, когда $x, y \in \mathbb{R}$, получаем, что левая и правая части тождества Вандермонда суть многочлены по x и y , значения которых совпадают в счетном числе точек. Значит, многочлены тождественно равны.

(с) Тождество Нёрлунда следует из тождества Вандермонда, если взять x и y с противоположным знаком и заметить, что

$$(-x)_n = [x]_n (-1)^n. \quad \square$$

2. Используя вероятностные, комбинаторные, геометрические рассуждения (типа подсчета разными способами числа благоприятствующих возможностей или числа путей, ведущих из одной точки в другую) и другие соображения (скажем, алгебраические, заключающиеся, например, в подсчете и сравнении коэффициентов при x^n в равенствах вида

$$(1+x)^a(1+x)^b = (1+x)^{a+b},$$

установить следующие свойства биномиальных коэффициентов:

(а) $1 = C_n^0 < C_n^1 < \dots < C_n^{[n/2]} = C_n^{[n/2]} > \dots > C_n^{n-1} > C_n^n = 1$
(свойство *симметрии* и *унимодальности*; здесь

$$[x] = \max\{n \in \mathbb{Z}: n \leq x\}, \quad [x] = \min\{n \in \mathbb{Z}: n \geq x\},$$

(b) $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$ — «треугольник Паскаля», «тождество Паскаля»,

$$(c) C_n^k = C_{n-2}^k + 2C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{k-2},$$

$$(d) \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n,$$

$$(e) \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n,$$

$$(f) \sum_{k=0}^n 2^k C_n^k = 3^n,$$

$$(g) \sum_{k=1}^n k C_n^k = n 2^{n-1},$$

$$(h) \sum_{m=0}^k (-1)^{k-m} C_n^m = C_{n-1}^k, \quad n \geq k+1,$$

$$(i) \sum_{k=0}^n k(k-1) C_n^k = n(n-1) 2^{n-2}, \quad n \geq 2,$$

$$(j) k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1},$$

$$(k) \sum_{m=k}^n C_m^k = C_{n+1}^{k+1},$$

$$(l) C_n^m C_m^k = C_n^k C_{n-k}^{m-k}, \quad k \leq m \leq n,$$

$$(m) \sum_{m=0}^k C_{n+m}^m = C_{n+k+1}^k,$$

$$(n) \sum_{m=0}^k C_{n+1}^m = \sum_{m=0}^k 2^m C_{n-m}^{k-m}, \quad k \leq n,$$

$$(a^*) C_{n-k}^k + C_{n-k-1}^{k-1} = \frac{n}{n-k} C_{n-k}^k, \quad 0 \leq k \leq n,$$

$$(b^*) C_{n_1+n_2}^n = \sum_{k=0}^{n_1} C_{n_1}^k C_{n_2}^{n-k} - \text{биномиальная свертка Вандермонда},$$

$$(c^*) C_n^{k-1} C_n^{k+1} \leq (C_n^k)^2, \quad k \leq n-1,$$

$$(d^*) C_{m+n}^n \leq \left(1 + \frac{m}{n}\right)^n \left(1 + \frac{n}{m}\right)^m, \text{ или, что равносильно,}$$

$$\frac{(m+n)!}{(m+n)^{m+n}} \leq \frac{m!n!}{m^m n^n},$$

$$(e^*) \frac{n^k}{k^k} \leq C_n^k \leq \frac{n^k}{k!},$$

$$(f^*) \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} 2^k = 1,$$

$$(g^*) C_n^k = \sum_{m=k}^n (-1)^{n-m} C_n^m C_m^k 2^{m-k}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

$$(h^*) \sum_{k=0}^n (-1)^k (C_n^k)^2 = \begin{cases} (-1)^m \frac{(2m)!}{(m!)^2}, & \text{если } n = 2m, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$(i^*) \sum_{k=0}^n (-1)^k (C_n^k)^3 = \begin{cases} (-1)^m \frac{(3m)!}{(m!)^3}, & \text{если } n = 2m, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

— тождество Диксона,

$$(j^*) \sum_{k=1}^n C_n^k \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

$$(k^*) \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} k^m C_n^k = \begin{cases} 0, & \text{если } m < n, \\ n!, & \text{если } m = n, \end{cases}$$

$$(l^*) \sum_{k=0}^n C_{2(n-k)}^{n-k} C_{2k}^k = 2^{2n},$$

$$(m^*) \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} C_n^k \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} = \frac{1}{n},$$

$$(n^*) \sum_{m=0}^k C_n^m C_m^k = 2^{n-k} C_n^k.$$

Решение. Для краткости изложения при доказательствах мы будем использовать лишь алгебраические соображения. Соотношения (a), (b), (c), (j), (l), (a*), (c*), (e*) устанавливаются прямой проверкой. Равенства (d), (f), (f*) вытекают из разложения $(x+y)^n$ при различных способах выбора x и y . Обе части равенств (g), (i) равны соответственно $((1+x)^n)'|_{x=1}$ и $((1+x)^n)''|_{x=1}$. Далее, соотношения (b*), (e), (h*)

выводятся, с учетом свойства $C_n^k = C_n^{n-k}$, как равенства коэффициентов при x^n соответственно в разложениях

$$\begin{aligned}(1+x)^{n_1}(1+x)^{n_2} &= (1+x)^{n_1+n_2}, \\ (1+x)^n(1+x)^n &= (1+x)^{2n}, \\ (x-1)^n(x+1)^n &= (x^2-1)^n.\end{aligned}$$

(h) Из тождества Паскаля получаем $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$, откуда следует, что

$$\begin{aligned}C_n^k - C_n^{k-1} + C_n^{k-2} - \dots + (-1)^k &= \\ = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} - C_{n-1}^{k-1} - C_{n-1}^{k-2} + C_{n-1}^{k-2} + C_{n-1}^{k-3} - \dots &= C_{n-1}^k.\end{aligned}$$

(к) Пользуясь тождеством Паскаля и свойством $C_k^k = C_{k+1}^{k+1}$, находим

$$\begin{aligned}C_{k+1}^{k+1} + C_{k+1}^k + C_{k+2}^k + \dots + C_n^k &= C_{k+2}^{k+1} + C_{k+2}^k + \dots + C_n^k = \\ = C_{k+3}^{k+1} + C_{k+2}^k + \dots + C_n^k &= C_{n+1}^{k+1}.\end{aligned}$$

(м) Равенство следует из равенства коэффициентов при x^n в разложениях

$$\sum_{m=0}^k (1+x)^{m+n} = \frac{1}{x} ((1+x)^{n+k+1} - (1+x)^n).$$

(п) Заметим, что $\sum_{m=0}^k C_{n+1}^m = 2^{n+1} - \sum_{m=0}^{n-k} C_{n+1}^m$. Искомое свойство — это равенство коэффициентов при x^{n-k} в разложениях

$$\begin{aligned}(1+x+x^2+\dots)(2^{n+1} - (1+x)^{n+1}) &= \frac{2^{n+1} - (1+x)^{n+1}}{1-x} = \\ &= \sum_{m=0}^n (1+x)^{n-m} 2^m.\end{aligned}$$

(d*) Имеем $C_{m+n}^m = \frac{(m+n)!}{m!n!} = \left(\frac{1}{n} + \frac{m}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{m}{n}\right) \leq \left(1 + \frac{m}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{m}{n}\right)^n \left(1 + \frac{n}{m}\right)^m$.

(i*) Величина $\sum_{k=0}^n (-1)^k (C_n^k)^3$ равна коэффициенту при $x^n y^n z^n$ в разложении

$$(x-y)^n (y-z)^n (z-x)^n.$$

Многочлен $(x - y)^{n-1}(y - z)^{n-1}(z - x)^{n-1}$ является симметричным при нечетном n . Отсюда, учитывая, что $(x - y)(y - z)(z - x) = x^2z - x^2y + y^2x - y^2z + z^2y - z^2x$, легко вывести равенство нулю коэффициента при $x^n y^n z^n$.

Пусть теперь n четно. Положим

$$C_x^k = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}.$$

Докажем следующее равенство многочленов степени $2n$:

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k C_{2n}^k C_x^k C_x^{2n-k} = (-1)^n C_x^n C_{x+n}^n.$$

При $x = 0, 1, \dots, n-1$ обе части, очевидно, равны нулю, так как $C_x^n = 0$, а также либо $C_x^k = 0$, либо $C_x^{2n-k} = 0$. При $x = n$ в первом многочлене будет одно ненулевое слагаемое, равное значению второго многочлена в точке $x = n$. При $x = -n, -n+1, \dots$ имеем $C_{x+n}^n = 0$, а функция

$$f(k) = C_x^k C_x^{2n-k} = C_{|x|+k-1}^k C_{|x|+2n-k-1}^{2n-k} = C_{|x|+k-1}^{|x|-1} C_{|x|+2n-k-1}^{|x|-1}$$

является многочленом от k (степени $2|x| - 2 < 2n$), поэтому ввиду свойства (k^*) получаем

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k C_{2n}^k f(k) = 0.$$

Итак, многочлены степени $2n$ совпали в $2n+1$ точках, следовательно, они равны между собой. Полагая $x = 2n$, получаем тождество Диксона для четного n .

Соотношения (g^*) и (n^*) — это равенства коэффициентов при x^{n-k} соответственно в разложениях

$$(1+x)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m (1+2x)^m (-x)^{n-m}$$

и

$$(1+2x)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m (1+x)^m x^{n-m}.$$

$$\begin{aligned} (j^*) \text{ Имеем } \sum_{k=1}^n C_n^k \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \int_0^1 \frac{1 - (1-x)^n}{x} dx = \int_0^1 (1 + (1-x) + \dots \\ &\dots + (1-x)^{n-1}) dx = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

(k*) Значение $f_0(1)$ образует искомую сумму при $m = 0$, где $f_0(x) = (x - 1)^n$. Определим $f_m(x)$ рекуррентно: $f_m(x) = x f'_{m-1}(x)$. Тогда $f_m(1)$ и есть искомая сумма при $m \leq n$. Отсюда легко вывести, что $f_m(1) = 0$ при $m < n$ и $f_n(1) = n!$.

(l*) Равенство эквивалентно соотношению

$$f(x)^2 = \frac{1}{1-4x} = \sum_{n \geq 0} 2^{2n} x^n \quad \text{при} \quad f(x) = \sum_{n \geq 0} C_{2n}^n x^n.$$

Последнее следует из равенства $f(x) = (1 - 4x)^{-1/2}$, которое легко проверить, разлагая функцию $(1 - 4x)^{-1/2}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0$.

(m*) Так как

$$\sum_{m=1}^k \frac{1}{m} = \int_0^1 (1 + x + \dots + x^{k-1}) dx = \int_0^1 \frac{1 - x^k}{1 - x} dx,$$

получаем, что

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} C_n^k \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} = \int_0^1 \frac{1 + (1-x)^n - 1}{1-x} dx = \frac{1}{n}. \quad \square$$

3. (a) (Арнольд.) Доказать, что C_n^k делится на n , если k и n взаимно просты ($k < n$).

(b) Пусть p — простое число. Показать, что $C_{2p}^p \equiv 2 \pmod{p}$.

Решение. (a) Пусть X — произвольное k -элементное подмножество в множестве $\mathbb{Z}_n$ остатков от деления на n . Если $(k, n) = 1$, то $X + a$, $a \in \mathbb{Z}_n$, образуют n различных подмножеств в $\mathbb{Z}_n$. Действительно, иначе $X = X + b - a$ для некоторых $a, b \in \mathbb{Z}_n$, $a \neq b$. Но тогда $T: x \rightarrow x + b - a$ — циклическая перестановка элементов множества X , упорядоченных естественным образом, а значит, T^k тождественно на X . Поэтому $k(b - a)$ делится на n . Последнее невозможно, так как $0 < |b - a| < n$ и $(k, n) = 1$.

Таким образом, множество всех k -элементных подмножеств в $\mathbb{Z}_n$ (их число C_n^k) распадается на непересекающиеся классы вида $\{X + a, a \in \mathbb{Z}_n\}$ одинаковой мощности n . Следовательно, C_n^k делится на n .

(b) Имеем

$$C_{2p}^p - 2 = \frac{(2p) \dots (p+1) - 2p!}{p!} = \frac{2p((2p-1) \dots (p+1) - (p-1)!)}{p!}.$$

Поскольку последняя дробь является целым числом, для доказательства того, что она делится на p , достаточно показать, что

$((2p-1)\dots(p+1) - (p-1)!)$ делится на p . Запишем

$$(2p-1)\dots(p+1) = (p+(p-1)) \cdot (p+(p-2)) \cdot \dots \cdot (p+1).$$

Если в последнем произведении раскрыть только внешние скобки, то последнее слагаемое будет равно $(p-1)!$, а все другие имеют множитель p . $\square$

4. Показать, что число разбиений числа N самое большее на две части равно $[N/2] + 1$, где $[x]$ — целая часть числа x .

Решение. Представить число N в виде суммы одного числа можно только одним способом. Пусть $N = N_1 + N_2$. Будем считать, что $0 < N_1 \leq N_2$, тогда N_1 может быть любым числом, удовлетворяющие неравенству $N_1 \leq [N/2]$. $\square$

5. Число Стирлинга второго рода S_N^n определяется как число всевозможных разбиений множества из N элементов, скажем, $\{1, 2, \dots, N\}$, на n непустых подмножеств¹.

Показать, что при $1 \leq n \leq N$ имеют место следующие свойства:

$$(a) \quad S_N^1 = S_N^N = 1, \quad S_N^2 = 2^{N-1} - 1, \quad S_N^{N-1} = C_N^2;$$

$$(b) \quad S_{N+1}^n = S_N^{n-1} + nS_N^n;$$

$$(c) \quad S_{N+1}^n = \sum_{k=0}^N C_N^k S_k^{n-1} \quad (S_k^p = 0 \text{ при } p > k);$$

$$(d) \quad S_N^n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k k^N;$$

$$(e) \quad S_N^n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k (n-k)^N;$$

$$(f) \quad S_N^n \leq n^{N-n} C_{N-1}^{n-1}.$$

Решение. (a) Равенство $S_N^1 = S_N^N = 1$ напрямую следует из определения.

Докажем равенство $S_n^2 = 2^{N-1} - 1$. Разбиение множества на два непустых множества есть просто выбор одного множества мощности k (это можно сделать C_N^k способами), где $1 \leq k \leq N-1$. При этом каждое представление подсчитано дважды. С помощью бинома Ньютона получаем

$$S_n^2 = \frac{1}{2} (C_N^1 + \dots + C_N^{N-1}) = \frac{1}{2} (2^N - 2).$$

¹ По поводу вводимых здесь и далее чисел Стирлинга первого и второго рода и чисел Белла, а также некоторых их свойств см. § 1 приложения.

Докажем равенство $S_N^{N-1} = C_N^2$. Разбиение множества из N элементов на $N - 1$ непустых подмножеств есть выбор подмножества из двух элементов. Это можно сделать C_N^2 способами.

(b) Зафиксируем один элемент множества, состоящего из $N + 1$ элементов. При разбиении этого множества на n непустых подмножеств возможны два варианта. Первый: данный элемент составляет отдельное множество. Тогда другие $n - 1$ множеств можно выбрать S_N^{n-1} способами. Второй: данный элемент является не единственным элементом подмножества разбиения. Тогда разбиваем множество без данного элемента на n непустых подмножеств (это можно сделать S_N^n способами) и добавляем данный элемент в одно из подмножеств (это можно сделать n способами).

(c) Зафиксируем один элемент множества из $N + 1$ элемента. Все разбиения данного подмножества на n непустых подмножеств можно сгруппировать по классам по числу элементов, которые не содержатся с данным в одном подмножестве, обозначив число этих элементов за k . Каждый такой класс разбиений можно разбить по группам так, что в каждой группе у разбиений совпадают подмножества, содержащие данный элемент (подмножества можно выбрать $C_N^{N-k} = C_N^k$ способами). Если фиксировано подмножество, содержащее данный элемент, то остальные подмножества можно выбрать S_k^{n-1} способами.

(d) Доказательство проведем по индукции по N . База индукции при $N = 1$ проверяется непосредственно. Пусть формула для S_N^n верна при $N = m$ и всех n , $1 \leq n \leq m$. Покажем, что она верна при $N = m + 1$ и всех n , $1 \leq n \leq m + 1$. Формула для S_{m+1}^1 проверяется непосредственно. Поскольку в силу п. (a) имеем $S_{m+1}^{m+1} = 1$, формула для S_{m+1}^{m+1} следует из задачи I.2.2 (k^*).

Пусть $1 < n < m + 1$. Тогда в силу п. (b) и предположения индукции

$$\begin{aligned}
 S_{m+1}^n &= S_m^{n-1} + nS_m^n = \\
 &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} C_{n-1}^k k^m + \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k k^m = \\
 &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} (C_n^k - C_{n-1}^k) k^m + \frac{n^m}{(n-1)!} = \\
 &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k k^{m+1}.
 \end{aligned}$$

(e) Утверждение следует из п. (d), если сделать замену $k' = n - k$.

(i) Доказательство проведем по индукции по N . База индукции при $N = 2$ проверяется непосредственно. Пусть оценка для S_N^n верна при $N = m$ и всех n , $1 \leq n \leq m$. Покажем, что она верна при $N = m + 1$ и всех n , $1 \leq n \leq m + 1$.

При $n = 1$ и $n = m + 1$ оценка проверяется непосредственно. Пусть $1 < n < m + 1$. Тогда в силу п. (b) и предположения индукции

$$\begin{aligned} S_{m+1}^n &= S_m^{n-1} + n S_m^n \leq (n-1)^{m-n+1} C_{m-1}^{n-2} + n^{m-n+1} C_{m-1}^{n-1} \leq \\ &\leq n^{m-n+1} (C_{m-1}^{n-2} + C_{m-1}^{n-1}) = n^{m+1-n} C_m^{n-1}. \quad \square \end{aligned}$$

6. В § 3 приложения показывается (с использованием соотношения $x^N = \sum_{n=0}^N S_N^n(x)_n$), что экспоненциальная производящая функция

$$E_{S_\bullet^n}(x) = \sum_{N \geq 0} S_N^n \frac{x^N}{N!}$$

последовательности $S_\bullet^n = (S_N^n)_{N \geq 0}$ чисел Стирлинга второго рода задается формулой

$$E_{S_\bullet^n}(x) = \frac{(e^x - 1)^n}{n!}.$$

Доказать эту формулу, основываясь на свойстве I.2.5(d).

Решение. В силу свойства I.2.5(d) имеем

$$\begin{aligned} E_{S_\bullet^n}(x) &= \sum_{N \geq 0} S_N^n \frac{x^N}{N!} = \sum_{N \geq 0} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k \frac{k^N}{n!} \frac{x^N}{N!} = \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k \sum_{N \geq 0} \frac{(kx)^N}{N!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} (e^x)^k = \\ &= \frac{(e^x - 1)^n}{n!}. \quad \square \end{aligned}$$

7. Согласно одному из определений чисел Стирлинга первого рода s_N^n число $(-1)^{N-n} s_N^n$ есть число перестановок (подстановок) чисел $1, 2, \dots, N$, имеющих в точности n циклов ($s_N^0 = 0$).

Показать, что

- (a) $s_N^1 = s_N^N = 1$,
- (b) $s_{N+1}^n = s_N^{n-1} - N s_N^n$, $1 \leq n \leq N$,
- (c) $\sum_{n=1}^N (-1)^{N-n} s_N^n = \sum_{n=1}^N |s_N^n| = N!$.

Показать также, что числа s_N^n , $0 \leq n \leq N$, удовлетворяют алгебраическому соотношению (см. также § 3 приложения)

$$(d) (x)_N = \sum_{n=0}^N s_N^n x^n,$$

где $(x)_N = x(x-1)\dots(x-N+1)$.

Решение. (а) Проверяется непосредственно.

(b) Фиксируем один элемент перестановки из $N+1$ и рассматриваем все перестановки с n циклами. Возможны два варианта. Первый: данный элемент переходит в себя, образуя цикл. Таких перестановок будет $(-1)^{N-n+1} s_N^{n-1}$. Второй: данный элемент входит в цикл не единичной длины. Если изъять данный элемент, то число перестановок будет $(-1)^{N-n} s_N^n$. Данный элемент можно вставить после любого из N элементов. Складывая число перестановок первого и второго типа, получаем $(-1)^{N-n+1} (s_N^{n-1} - N s_N^n)$.

(с) Доказательство проведем по индукции по N . База индукции при $N=1$ проверяется непосредственно. Пусть утверждение верно при $N=m$. Тогда в силу п. (b) и предположения индукции

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{m+1} |s_{m+1}^n| &= \sum_{n=1}^m (|s_m^{n-1}| + m |s_m^n|) + 1 = \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} |s_m^n| + m \sum_{n=1}^m |s_m^n| + 1 = (m+1) \sum_{n=1}^m |s_m^n| = (m+1)!. \end{aligned}$$

(d) Доказательство проведем по индукции по N . База индукции при $N=1$ проверяется непосредственно. Пусть утверждение верно при $N=m$. Тогда в силу в силу п. (b) и предположения индукции

$$\begin{aligned} (x)_{m+1} &= (x-m)(x)_m = (x-m) \sum_{n=0}^m s_m^n x^n = \\ &= \sum_{n=0}^m s_m^n x^{n+1} - m \sum_{n=0}^m s_m^n x^n = \\ &= \sum_{n=1}^m (s_m^{n-1} - m s_m^n) x^n + x^{m+1} = \sum_{n=0}^{m+1} s_{m+1}^n x^n. \quad \square \end{aligned}$$

8. Доказать следующее свойство *двойственности* чисел Стирлинга первого и второго рода:

$$\sum_{n \geq 0} S_N^n s_n^M = \delta_{NM},$$

где δ_{ab} — символ Кронекера ($\delta_{aa} = 1$, $\delta_{ab} = 0$, если $a \neq b$).

Решение. Поскольку $S_n^m = 0$ и $s_n^m = 0$ при $n > m$, в силу приложения 1 и задачи I.2.7 имеем

$$x^N = \sum_{n \geq 0} S_N^n(x) x^n = \sum_{n \geq 0} \left(S_N^n \sum_{M \geq 0} s_n^M x^M \right) = \sum_{M \geq 0} \left(x^M \sum_{n \geq 0} S_N^n s_n^M \right).$$

Из равенства многочленов получаем равенство коэффициентов:

$$\sum_{n \geq 0} S_N^n s_n^M = \delta_{NM}. \quad \square$$

9. Показать, что экспоненциальная производящая функция

$$E_{s_\bullet^n}(x) = \sum_{N \geq 0} s_N^n \frac{x^N}{N!}$$

последовательности $s_\bullet^n = (s_N^n)_{N \geq 0}$ чисел Стирлинга первого рода определяется формулой

$$E_{s_\bullet^n}(x) = \frac{(\ln(1+x))^n}{n!}.$$

Решение. Используя формулу Тейлора $(1+x)^y = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} (y)_n$ и свойство I.2.7(d), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \left\{ \sum_{N \geq 0} s_N^n \frac{x^N}{N!} \right\} y^n &= \sum_{N \geq 0} \frac{(y)_N x^N}{N!} = (1+x)^y = e^{y \ln(1+x)} = \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(y \ln(1+x))^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \left\{ \frac{\ln^n(1+x)}{n!} \right\} y^n. \quad \square \end{aligned}$$

10. Число Белла B_N , $N \geq 1$, по определению (см. § 1 приложения) есть число *всевозможных* разбиений множества $\{1, 2, \dots, N\}$. Иначе говоря,

$$B_N = \sum_{n=1}^N S_N^n,$$

где S_N^n — числа Стирлинга второго рода.

Полагая $B_0 = 1$, установить, что

(а) имеют место рекуррентные соотношения

$$B_N = \sum_{k=1}^N C_{N-1}^{k-1} B_{N-k};$$

(b) экспоненциальная производящая функция $E_B(x) = \sum_{N \geq 0} B_N \frac{x^N}{N!}$ задается формулой

$$E_B(x) = \exp\{e^x - 1\};$$

(c) $B_N < N!$ и $\lim_{N \rightarrow \infty} (B_N/N!)^{1/N} = 0$.

Убедиться в том, что числа $B_1, \dots, B_5$ равны 1, 2, 5, 15, 52 соответственно.

Решение. (a) В силу свойства I.2.5(c) имеем

$$S_N^n = \sum_{k=0}^{N-1} C_{N-1}^k S_k^{n-1} = \sum_{k=1}^N C_{N-1}^{N-k} S_{N-k}^{n-1} = \sum_{k=1}^N C_{N-1}^{k-1} S_{N-k}^{n-1}.$$

Сложив данные равенства по $n = 1, \dots, N$, получим требуемое соотношение.

(b) Имеем

$$\begin{aligned} E_B(x) &= \sum_{N \geq 0} B_N \frac{x^N}{N!} = \sum_{N \geq 0} \sum_{n \geq 0} S_N^n \frac{x^N}{N!} = \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{N \geq 0} S_N^n \frac{x^N}{N!} = \sum_{n \geq 0} \frac{(e^x - 1)^n}{n!} = \exp\{e^x - 1\}. \end{aligned}$$

(c) Рассмотрим урновую схему. Подмножества — это урны, элементы множества — шары. Есть N неразличимых урн и N различных шаров. Первый шар кладем в пустую урну (1 вариант), второй шар кладем либо в пустую урну, либо в непустую (2 варианта), ..., k -й шар кладем либо в пустую урну, либо в непустую, которых к этому моменту может быть не более $k-1$ (всего k вариантов), и т. д. Урны упорядочены по номерам первых шаров, попавших в урну. Всего получается не более $N!$ вариантов.

Рассмотрим радиус сходимости $R = 1/\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{B_N}{N!} \right)^{1/N}$ ряда $\sum_{N \geq 0} B_N \frac{x^N}{N!}$.

В силу п. (b) данный ряд сходится при всех x , значит, $R = \infty$. $\square$

11. (Числа Фибоначчи.) Пусть $n \geq 1$ и F_n — число возможностей представления числа n как упорядоченной суммы единиц и двоек. Тогда ясно, что

$$F_1 = 1,$$

$$F_2 = 2 \quad (\text{поскольку } 2 = 1 + 1 = 2),$$

$$F_3 = 3 \quad (3 = 1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 2 + 1),$$

$$F_4 = 5 \quad (4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 2 = 2 + 2).$$

(а) Показать, что для $n \geq 2$ числа Фибоначчи F_n удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (*)$$

(с $F_0 = 1, F_1 = 1$).

(б) Вывести из рекуррентных соотношений (*), что

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right], \quad (**)$$

где $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180\dots$, $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0,6180\dots$

(с) Используя рекуррентные соотношения (*), показать, что производящая функция $F(x) = \sum_{n \geq 0} F_n x^n$ последовательности $(F_n)_{n \geq 0}$ задается формулой

$$F(x) = \frac{1}{1-x-x^2}. \quad (***)$$

(д) Числа Фибоначчи (традиционно связанные с размножением кроликов, на что еще в тринадцатом веке указывал и сам Леонардо Фибоначчи в сочинении «Книга абака») обладают многими интересными свойствами, например,

$$\begin{aligned} F_0 + F_1 + \dots + F_{n-1} &= F_{n+1} - 1, & F_{n-1}^2 + F_n^2 &= F_{2n}, \\ F_{n-1}F_n + F_nF_{n+1} &= F_{2n+1}, & F_mF_n + F_{m-1}F_{n-1} &= F_{m+n} \end{aligned}$$

(с $m, n \geq 0$ и $F_{-1} = 0$).

Убедиться в справедливости этих равенств.

(е) Доказать, что для чисел Фибоначчи справедлива формула

$$F_n = \sum_{k=0}^{[n/2]} C_{n-k}^k.$$

(Можно убедиться, что $(F_0, F_1, \dots, F_{17}) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584)$.)

(і) Показать, что для $n \leq 9$ выполняется равенство

$$\frac{F_n}{[e^{(n-1)/2}]} = 1,$$

но для $n = 10$ справедливо соотношение $F_{10}/[e^{9/2}] < 1$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{[e^{(n-1)/2}]} = 0. \quad (****)$$

Решение. (а) Рассмотрим первое слагаемое в упорядоченной сумме из единиц и двоек, равной n . Оно есть либо единица, либо двойка. Если единица, то оставшиеся слагаемые можно выбрать F_{n-1} способами, если двойка, то F_{n-2} способами.

(б) Найдем решение уравнения (*) вида $F_n = \alpha^n$. При подстановке и упрощении получаем уравнение на α : $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$. Его корни $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Среди решений уравнения (*) вида $F_n = A\alpha_1^n + B\alpha_2^n$ выберем то, которое удовлетворяет начальным условиям $F_0 = 1, F_1 = 1$. Получаем $A = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, B = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$.

(с) Умножим соотношение (*) на x^n и просуммируем по всем n начиная с $n = 2$. Получим уравнение $F(x) - x - 1 = xF(x) - x + x^2F(x)$, решив которое относительно $F(x)$, получим соотношение (**).

(д) Равенство $F_0 + F_1 + \dots + F_{n-1} = F_{n+1} - 1$ докажем по индукции. База проверяется непосредственно. Если равенство верно при $n = m$, то, прибавив к обеим частям этого равенства F_m , с помощью равенства (*) получим

$$F_0 + F_1 + \dots + F_{m-1} + F_m = F_m + F_{m+1} - 1 = F_{m+2} - 1.$$

Равенство $F_m F_n + F_{m-1} F_{n-1} = F_{m+n}$ докажем по индукции по m . База индукции при $m = 1$ и $m = 2$ следует непосредственно из равенства (*). Пусть равенство верно при всех $m, m \leq k, k > 2$. Тогда в силу равенства (*) имеем

$$\begin{aligned} F_{n+k+1} &= F_{n+k} + F_{n+k-1} = F_k F_n + F_{k-1} F_{n-1} + F_n F_{k-1} + F_{n-1} F_{k-2} = \\ &= F_{k+1} F_n + F_k F_{n-1}. \end{aligned}$$

Оставшиеся два равенства следуют из доказанного при $m = n$ и $m = n + 1$.

(е) Разобьем множество представлений числа n в виде упорядоченных сумм единиц и двоек на классы по числу двоек в сумме, обозначив число двоек за k . Тогда $0 \leq k \leq [n/2]$ и при фиксированном k в сумме будет $n - k$ чисел, значит, в каждом классе будет C_{n-k}^k представлений.

(ф) Равенство при $n \leq 9$ проверяется непосредственно. При $n \rightarrow \infty$ в силу п. (б) $F_n \sim \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} (1,618\dots)^n$ и $[e^{(n-1)/2}] \sim e^{-1/2} (1,648\dots)^n$. $\square$

12. Доказать, что для мультиномиальных (полиномиальных) коэффициентов

$$C_N(n_1, \dots, n_r) = \frac{N!}{n_1! \dots n_r!}, \quad n_1 + \dots + n_r = N, \quad n_i \geq 0,$$

справедлива следующая формула (*мультиномиальная свертка Вандермонда*):

$$C_{N_1+N_2}(n_1, \dots, n_r) = \sum C_{N_1}(k_1, \dots, k_r) C_{N_2}(n_1 - k_1, \dots, n_r - k_r),$$

где сумма берется по всем таким $k_i \geq 0$, что $k_i \leq n_i$ и $\sum_{i=1}^r k_i = N_1$, $n_1 + \dots + n_r = N_1 + N_2$.

Решение. Число $C_{N_1+N_2}(n_1, \dots, n_r)$ есть количество последовательностей $(a_1, \dots, a_{N_1+N_2})$, у которых элемент b_1 встречается n_1 раз, ..., элемент b_r встречается n_r раз. Разобьем последовательность на две: $(a_1, \dots, a_{N_1})$ и $(a_{N_1+1}, \dots, a_{N_1+N_2})$.

Если обозначить число раз, которое элемент b_i встречается в первой последовательности, индексом k_i , $i = 1, \dots, r$, то число таких последовательностей будет равно $C_{N_1}(k_1, \dots, k_r)$. Для второй последовательности, соответственно, существует $C_{N_2}(n_1 - k_1, \dots, n_r - k_r)$ вариантов. Если теперь просуммировать полученное число вариантов по всем возможным наборам индексов $(k_1, \dots, k_r)$, то получим необходимое число наборов $(a_1, \dots, a_{N_1+N_2})$. $\square$

13. Показать, что

$$(x_1 + \dots + x_r)^N = \sum C_N(n_1, \dots, n_r) x_1^{n_1} \dots x_r^{n_r},$$

где суммирование распространяется на все такие $n_i \geq 0$, что $\sum_{i=1}^r n_i = N$.

Решение. Пусть $a_{n_1, \dots, n_r}$ — коэффициент при $x_1^{n_1} \dots x_r^{n_r}$, получившийся после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых в $(x_1 + \dots + x_r)^N$. Возьмем n_1 раз частную производную по x_1 от $(x_1 + \dots + x_r)^N$ и от выражения, получающегося после раскрытия скобок в $(x_1 + \dots + x_r)^N$, далее возьмем n_2 раз частную производную по x_2 и т. д. Получим $N! = a_{n_1, \dots, n_r} n_1! \dots n_r!$, следовательно, $a_{n_1, \dots, n_r} = C_N(n_1, \dots, n_r)$. $\square$

14. Показать, что число *неубывающих* путей (на целочисленной решетке $\mathbb{Z}_+^r = \{(i_1, \dots, i_r); i_1, \dots, i_r = 0, 1, 2, \dots\}$), выходящих из точки $(0, \dots, 0)$ и приходящих в точку $(n_1, \dots, n_r)$ с $\sum_{i=1}^r n_i = N$, равно $C_N(n_1, \dots, n_r)$. (Путь считается неубывающим, если на каждом шаге меняется лишь одна координата, увеличиваясь на единицу.)

Решение. Каждому неубывающему пути на $\mathbb{Z}_+^r$ однозначно ставится в соответствие последовательность $(a_1, \dots, a_N)$, где a_i — номер изменившейся координаты на i -м шаге. Число таких последовательностей есть $C_N(n_1, \dots, n_r)$ (см., например, п. 2 § 2 гл. I из книги [24]). $\square$

15. Пусть A и B — два множества, состоящие из конечного числа элементов ($|A|$ и $|B|$ соответственно).

Под *функцией* $\mathbb{F}: A \rightarrow B$ понимается правило, ставящее в соответствие каждому $a \in A$ некоторое $b \in B$.

Под *инъекцией* $\mathbb{I}: A \rightarrow B$ понимается правило, которое разным элементам из A ставит в соответствие разные элементы из B . (В этом случае $|A| \leq |B|$.)

Под *сюръекцией* $\mathbb{S}: A \rightarrow B$ понимается правило, согласно которому для каждого $b \in B$ можно найти такое $a \in A$, что $\mathbb{S}(a) = b$. (В этом случае $|A| \geq |B|$.)

Под *биекцией* $\mathbb{B}: A \rightarrow B$ понимается правило, которое является одновременно и инъекцией, и сюръекцией. (В этом случае $|A| = |B|$.)

Показать, что соответствующие числа функций, инъекций, сюръекций и биекций задаются следующими формулами (с $|A| = N$, $|B| = M$):

$$N(\mathbb{F}) = M^N, \quad N(\mathbb{I}) = (M)_N, \quad N(\mathbb{S}) = M! S_N^M, \quad N(\mathbb{B}) = N!.$$

Решение. ($\mathbb{F}$) Каждому элементу из A сопоставляется любой элемент из B . Получаем M^N вариантов.

($\mathbb{I}$) Каждому элементу из A последовательно сопоставляем любой элемент из B , кроме выбранных ранее. Получаем $(M)_N$ вариантов.

($\mathbb{B}$) Как в случае ($\mathbb{I}$), только $M = N$. Получаем $N!$ вариантов.

($\mathbb{S}$) Разбиваем A на M непустых подмножеств, на каждом из которых функция будет постоянна. Это можно сделать S_N^M способами в силу задачи I.2.5. Теперь каждому подмножеству однозначно ставится в соответствие элемент из B . В силу п. ($\mathbb{B}$) это можно сделать $M!$ способами. Получаем $M! S_N^M$ вариантов. $\square$

16. Пусть $P_N = \sum_{n=0}^N (N)_n$ — общее число размещений из N элементов ($(N)_0 = 1$, $(N)_n = N(N-1)\dots(N-n+1)$), $N \geq 1$. Показать, что числа P_N удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям ($P_0 = 1$):

$$P_N = NP_{N-1} + 1, \quad N \geq 1. \quad (*)$$

Показать также, что

$$P_N = N! \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!}$$

и что P_N есть ближайшее целое к $eN!$.

Решение. По определению P_N получаем

$$P_N = \sum_{n=0}^N (N)_n = 1 + N \sum_{n=0}^{N-1} (N-1)_n = 1 + NP_{N-1}.$$

Формулу для P_N докажем по индукции. База индукции при $N = 1$ проверяется непосредственно. Пусть при $N = m$ формула верна. Тогда с помощью соотношения (*) получаем

$$P_{m+1} = (m+1)P_m + 1 = (m+1)m! \sum_{n=0}^m \frac{1}{n!} + 1 = (m+1)! \sum_{n=0}^{m+1} \frac{1}{n!}.$$

Число P_N есть ближайшее целое к $eN!$, если $a_N := |P_N - eN!| < 1/2$. Преобразуем a_N :

$$\begin{aligned} a_N &= \left| N! \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} - eN! \right| = \left| N! \sum_{n>N} \frac{1}{n!} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(N+1)\dots(N+k)} < \\ &< \sum_{k=1}^{\infty} N^{-k} = \frac{1}{N-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, $a_N < 1/2$ начиная с $N = 3$. При $N = 1$ и $N = 2$ утверждение проверяется непосредственно подстановкой. $\square$

17. Показать, что экспоненциальная производящая функция $E_P(x) = \sum_{N=0}^{\infty} P_N \frac{x^N}{N!}$ последовательности $P = (P_N)_{N \geq 0}$ (числа P_N , $N \geq 0$, определены в задаче I.2.16) задается следующей формулой:

$$E_P(x) = \frac{e^x}{1-x}.$$

Решение. Применяя формулу для P_N из задачи I.2.16, получаем

$$\begin{aligned} E_P(x) &= \sum_{N=0}^{\infty} P_N \frac{x^N}{N!} = \sum_{N=0}^{\infty} x^N \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} x^{N-n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{N=n}^{\infty} x^{N-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{1}{1-x} = \frac{e^x}{1-x}. \quad \square \end{aligned}$$

18. Рассматривается выбор без возвращения. Выбирается n шаров из урны с M_1 белыми и M_2 черными шарами, $M_1 + M_2 = M$. Событие B_{n_1, n_2} состоит в том, что n_1 выбранных шаров оказались белыми, n_2 —

черными, $n_1 + n_2 = n$. Показать, что если $M \rightarrow \infty$ и $M_1 \rightarrow \infty$ так, что $\frac{M_1}{M} \rightarrow p$, то

$$P(B_{n_1, n_2}) \rightarrow C_{n_1 + n_2}^{n_1} p^{n_1} (1 - p)^{n_2}.$$

Решение. По аналогии с рассуждениями из решения задачи I.2.21(a) получаем, что $P(B_{n_1, n_2}) = \frac{C_{M_1}^{n_1} C_{M_2}^{n_2}}{C_M^n}$. Тогда

$$\begin{aligned} P(B_{n_1, n_2}) &= \frac{C_{M_1}^{n_1} C_{M_2}^{n_2}}{C_M^n} = C_n^{n_1} \frac{M_1!}{(M_1 - n_1)!} \frac{M_2!}{(M_2 - n_2)!} \frac{(M - n)!}{M!} \sim \\ &\sim C_n^{n_1} \frac{(M_1)^{n_1} (M_2)^{n_2}}{M^n} \rightarrow C_n^{n_1} p^{n_1} (1 - p)^{n_2}. \quad \square \end{aligned}$$

19. Доказать, что точка $m = (m_1, \dots, m_k)$, в которой достигается максимальное значение вероятности полиномиального распределения, удовлетворяет неравенствам $(n + 1)p_i - 1 \leq m_i \leq (n + k - 1)p_i$, $1 \leq i \leq k$.

Решение. Положим

$$p(n_1, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}.$$

Если в точке m достигается максимум $p(n_1, \dots, n_k)$, то локальные «шевеления» m могут лишь уменьшить p . Так, например,

$$\frac{p(m_1, m_2, \dots)}{p(m_1 + 1, m_2 - 1, \dots)} = \frac{m_1 + 1}{m_2} \frac{p_2}{p_1} \geq 1.$$

Аналогичные неравенства можно записать для оставшихся пар индексов $(i, j) \neq (1, 2)$.

Используя эти неравенства, получаем

$$m_i = m_i p_i + \sum_{j \neq i} m_j p_j \leq m_i p_i + \sum_{j \neq i} (m_j + 1) p_j \leq (n + k - 1) p_i.$$

Нижняя оценка m_i выводится точно так же:

$$\begin{aligned} m_i + 1 &= (m_i + 1) p_i + \sum_{j \neq i} (m_i + 1) p_j \geq \\ &\geq (m_i + 1) p_i + \sum_{j \neq i} m_j p_j = (n + 1) p_i. \quad \square \end{aligned}$$

20. Одномерная модель Изинга. Пусть имеется n частиц, расположенных в точках $1, \dots, n$.

Предположим, что каждая из частиц относится к одному из двух типов, причем частиц первого типа n_1 и второго — n_2 ($n_1 + n_2 = n$). Будем считать все $n!$ расположений частиц равновероятными.

Построить соответствующую вероятностную модель и найти вероятность события $A_n(m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22}) = \{\nu_{11} = m_{11}, \dots, \nu_{22} = m_{22}\}$, где ν_{ij} — число частиц типа i , следующих за частицами типа j ($i, j = 1, 2$).

Решение. Каждой последовательности типов частиц длины n можно однозначно поставить в соответствие последовательность из букв A, B, a, b длины $n - 1$. Буква A на i -м месте означает, что частица на i -м месте первого типа, на $(i + 1)$ -м — второго, и наоборот, если на i -м месте стоит буква B . Буква a на i -м месте означает, что на i -м и на $(i + 1)$ -м месте стоят частицы первого типа; буква b на i -м месте — что на i -м и на $(i + 1)$ -м месте стоят частицы второго типа.

Заметим, что нас интересуют только «правильные» последовательности букв, т. е. за A может идти только B или b , за B — только A или a , за a — только A или a , за b — только B или b .

Если из «правильной» последовательности букв убрать все прописные буквы, то мы получим «правильную» последовательность (назовем ее *скелетом* первоначальной). В *скелете* буквы должны все время меняться, значит, $|m_{12} - m_{21}| \leq 1$.

Посчитаем число таких «правильных» последовательностей букв, что букв $A - m_{12}$ штук, $B - m_{21}$ штук, $a - m_{11}$ штук, $b - m_{22}$ штук.

Пусть $m_{12} > m_{21}$. *Скелет* выстраивается однозначно; m_{22} букв b можно ставить в любом количестве после букв A , что соответствует задаче размещения m_{22} неразличимых дробин по m_{12} различным ячейкам. В силу задачи I.1.6(с) это можно сделать $C_{m_{22}+m_{12}-1}^{m_{22}}$ способами.

Аналогично можно поставить $C_{m_{11}+m_{12}-1}^{m_{11}}$ способами m_{11} букв a в любом количестве перед буквами A .

Заметим, что в случае, когда $m_{12} > m_{21}$, выполняются равенства $n_1 = m_{12} + m_{11}$ и $n_2 = m_{12} + m_{22}$, поэтому число «правильных» последовательностей есть $C_{m_{22}+m_{12}-1}^{m_{22}} C_{m_{11}+m_{12}-1}^{m_{11}} = C_{n_1-1}^{m_{22}} C_{n_2-1}^{m_{11}}$.

При $m_{21} > m_{12}$ рассуждения идентичны с заменой A на B . Ответ такой же.

При $m_{21} = m_{12}$ для *скелета* есть два варианта: первая буква A или B . Если *скелет* начинается с A , то

$$n_1 = m_{11} + m_{12} + 1, \quad n_2 = m_{22} + m_{12}.$$

Если *скелет* начинается с B , то

$$n_1 = m_{11} + m_{12}, \quad n_2 = m_{22} + m_{12} + 1.$$

Проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, в каждом из случаев получаем, что число «правильных» последовательностей есть $C_{n_1-1}^{m_{22}} C_{n_2-1}^{m_{11}}$.

Поскольку частицы одного типа различимы, число интересующих нас последовательностей n различных частиц есть $C_{n_1-1}^{m_{22}} C_{n_2-1}^{m_{11}} n_1! n_2!$, а искомая вероятность равна

$$P(A_n(m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22})) = \frac{C_{n_1-1}^{m_{22}} C_{n_2-1}^{m_{11}} n_1! n_2!}{n!} = \frac{C_{n_1-1}^{m_{22}} C_{n_2-1}^{m_{11}}}{C_n^{n_1}}. \quad \square$$

21. Пусть N — размер некоторой популяции, который требуется оценить «минимальными средствами» без простого пересчета всех элементов этой совокупности. Подобного рода вопрос интересен, например, при оценке числа жителей в той или иной стране, городе и т. д.

В 1786 г. Лаплас для оценки числа N жителей Франции предложил следующий метод.

Выберем некоторое число, скажем M , элементов популяции и пометим их. Затем возвратим их в основную совокупность и предположим, что они «хорошо перемешаны» с немаркированными элементами. После этого возьмем из «перемешанной» популяции n элементов. Обозначим через X число маркированных элементов (в этой выборке из n элементов).

(а) Показать, что вероятность $P_{N,M;n}\{X=m\}$ того, что $X=m$ (при фиксированных N , M и n), задается формулой гипергеометрического распределения:

$$P_{N,M;n}\{X=m\} = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

(б) Полагая M , n и m заданными, найти максимум $P_{N,M;n}\{X=m\}$ по N , т. е. «наиболее правдоподобный» объем всей популяции, приводящий к тому, что число маркированных элементов оказалось равным m .

Показать, что так найденное наиболее правдоподобное значение $\hat{N}$ (называемое *оценкой максимального правдоподобия*) определяется формулой

$$\hat{N} = \left[\frac{Mn}{m} \right],$$

где $[\cdot]$ — целая часть.

Решение. (а) Полагая всех людей различимыми, рассматриваем неупорядоченную выборку без возвращения объема n . Всего элементарных исходов C_N^n , исходы считаем равновероятными.

Выбрать m элементов из M помеченных можно C_M^m способами, а $n - m$ из $N - M$ немеченных — C_{N-M}^{n-m} способами. Получили, что подходящих наборов $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$ штук.

(b) Обозначим $F(N) := P_{N,M;n}\{X = m\}$, тогда

$$\frac{F(N+1)}{F(N)} = \frac{(N-M+1)(N-n+1)}{(N+1)(N-M-n+m+1)}.$$

Неравенство $F(N+1)/F(N) \leq 1$ относительно N сводится к линейному, решив которое, получаем $N \geq \frac{Mn}{m} - 1$, т. е. наибольшее значение $F(N)$ достигается при $N = \left\lceil \frac{Mn}{m} \right\rceil$. $\square$

22. В (элементарной) комбинаторике биномиальные коэффициенты $C_M^n \equiv \frac{(M)_n}{n!} = \frac{M!}{n!(M-n)!}$ (обозначаемые также $\binom{M}{n}$) и число размещений $(M)_n \equiv M(M-1)\dots(M-n+1)$ обычно определяются лишь для *целых* чисел $n, M \in N = \{1, 2, \dots\}$. Во многих вопросах анализа полезно расширить понятия «число размещений $(M)_n$ » и «биномиальный коэффициент C_M^n », взяв вместо M любое число X из $\mathbb{R}$, считая, что $n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, и полагая по определению $0! = 1$, $(X)_0 = 1$, $C_X^0 = 1$,

$$(X)_n = X(X-1)\dots(X-n+1), \quad C_X^n = \frac{(X)_n}{n!}, \quad \text{если } n > 0,$$

и $C_X^n = 0$, если $n < 0$. С учетом данных определений установить (в дополнение к некоторым соотношениям из I.2.2) следующие свойства $(X, Y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\})$:

(a) $C_X^{n-1} + C_X^n = C_{X+1}^n$ (*треугольник Паскаля*);

(b) $C_{X+Y}^n = \sum_{k=0}^n C_X^k C_Y^{n-k}$ (*биномиальная свертка Вандермонда*);

(c) $C_{X-1}^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_X^k$;

(d) $C_{n-X}^{n-m} = \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k C_X^k C_{n-k}^m$;

(e) $C_{X+Y+n-1}^n = \sum_{k=0}^n C_{X+n-k-1}^{n-k} C_{Y+k-1}^k$;

(f) $C_{-X}^n = (-1)^n C_{X+n-1}^n$.

Решение. (a) При $n < 0$ обе части равенства равны нулю, при $n = 0$ — равны 1.

При $n > 0$ обе части равенства суть многочлены от x степени n , значения которых в силу задачи I.2.2(b) совпадают при $x \in \mathbb{N}$, $x \geq n$. Значит, многочлены тождественно равны.

Идентичными рассуждениями доказываются п. (b) и п. (c) с помощью задач I.2.2 (b*) и I.2.2 (h).

(f) При $n < 0$ обе части равенства равны нулю, при $n = 0$ — равны 1. Пусть $n > 0$, тогда

$$\begin{aligned} C_{-X}^n &= \frac{(-X)_n}{n!} = \frac{(-x)(-x-1)\dots(-x-n+1)}{n!} = \\ &= (-1)^n \frac{(x+n-1)(x+n-2)\dots(x+1)x}{n!} = (-1)^n C_{X+n-1}^n. \end{aligned}$$

(d) В силу свойства (f) получаем

$$\begin{aligned} C_{n-X}^{n-m} &= (-1)^{n-m} C_{X-m-1}^{n-m} \stackrel{(1)}{=} (-1)^{n-m} \sum_{k=0}^{n-m} C_X^k C_{-m-1}^{n-m-k} \stackrel{(2)}{=} \\ &\stackrel{(2)}{=} (-1)^{n-m} \sum_{k=0}^{n-m} C_X^k (-1)^{n-k-m} C_{n-k}^{n-k-m} \stackrel{(3)}{=} \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k C_X^k C_{n-k}^m. \end{aligned}$$

В переходе (1) мы воспользовались п. (b), в переходе (2) — п. (f), в переходе (3) — свойством биномиальных коэффициентов $C_n^n = C_n^{n-k}$.

(e) С помощью свойства (d) (переход (1)), свойства (f) (переход (2)) и свойства биномиальных коэффициентов $C_n^n = C_n^{n-k}$ (переход (2)) получаем

$$\begin{aligned} C_{X+Y+n-1}^n &= C_{(X+n-1)-(-Y)}^{(X+n-1)-(X-1)} \stackrel{(1)}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_{-Y}^k C_{X+n-k-1}^{X-1} \stackrel{(2)}{=} \\ &\stackrel{(2)}{=} \sum_{k=0}^n C_{Y+k-1}^k C_{X+n-k-1}^{n-k}. \quad \square \end{aligned}$$

23. Из урны с N шарами, среди которых n белых и $N - n$ черных, осуществляется выбор без возвращения ($n \geq 2$). Рассматриваются упорядоченные выборки размера M . Какова вероятность событий $A_{i,j}$ и $A_{i,j,k}$, где $A_{i,j}$ — событие, состоящее в том, что на i -м и j -м местах стоят белые шары ($i < j \leq M$), а $A_{i,j,k}$ — событие, заключающееся в том, что белые шары стоят на местах с номерами i, j, k ($i < j < k \leq M$)?

Решение. Число элементарных исходов $(N)_M$. Посчитаем число элементарных исходов в $A_{i,j}$: на i -е место можно поставить n белых шаров, на j -е — оставшиеся $n - 1$ шаров. Остальные $M - 2$ места

заполняются произвольным образом $(N-2)_{M-2}$ способами. Значит,

$$P(A_{i,j}) = \frac{n(n-1)(N-2)_{M-2}}{(N)_M} = \frac{n(n-1)}{N(N-1)}.$$

Для трех мест аналогично

$$P(A_{i,j,k}) = \frac{n(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)} \quad \square$$

24. Дать формулы для вероятности P_n того, что среди тринадцати карт, извлеченных из 52 карт (полная колода), n карт окажутся пиковой масти.

Решение. Всего можно извлечь C_{52}^{13} неупорядоченных наборов. Среди них нас интересуют наборы, в которых n карт пиковой масти (их можно выбрать C_{13}^n способами) и $13-n$ карт другой масти (их можно выбрать C_{39}^{n-13} способами). Искомая вероятность равна

$$P_n = \frac{C_{13}^n C_{39}^{n-13}}{C_{52}^{13}}. \quad \square$$

25. На окружности расположено $n \geq 3$ точек. Случайным образом выбирается пара из них. Найти вероятность того, что выбранные точки были «соседями».

Решение. Элементарные исходы — пары чисел (m, k) , $m \neq k$, $1 \leq m, k \leq n$. Всего элементарных исходов $(n)_2$, подходящих — $n \cdot 2$ (первая точка выбирается произвольно, тогда для второй лишь два варианта). Искомая вероятность равна $P_n = 2n/(n)_2 = 2/(n-1)$. $\square$

26. («Задача о супружеских парах».) Сколькими способами n супружеских пар ($n \geq 3$) можно разместить за круглым столом так, чтобы мужчины и женщины чередовались, но супруги не сидели рядом?

Решение. Присвоим местам за круглым столом номера $1, \dots, 2n$ (по часовой стрелке), и пусть на номере 1 сидит, для определенности, женщина. Обозначим через A_k событие, состоящее в том, что места k и $k+1$ заняты некоторой супружеской парой ($1 \leq k \leq 2n$ и место с номером $2n+1$ идентифицируется с местом под номером 1). Тогда требуемая вероятность того, что супруги не занимают смежных мест, есть $P\left(\bigcap_{k=1}^{2n} \bar{A}_k\right)$. По формуле «включения-исключения» (см. задачу I.1.12(b))

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{2n} \bar{A}_k\right) = 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{2n} A_k\right) = 1 - \sum_i P(A_i) + \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) - \dots$$

Подсчет показывает, что для $1 \leq i \leq 2n$ имеем

$$P(A_i) = n \left(\frac{(n-1)!}{n!} \right)^2,$$

для $1 \leq i < j \leq 2n$ выполняется равенство

$$P(A_i \cap A_j) = \begin{cases} n(n-1) \left(\frac{(n-2)!}{n!} \right)^2, & \text{если } |i-j| \neq 1, \\ 0, & \text{если } |i-j| = 1, \end{cases}$$

где $P(A_1 \cap A_{2n}) = 0$, и вообще для $i_1 < \dots < i_k$ имеем

$$\begin{aligned} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) &= \\ &= \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} \left(\frac{(n-k)!}{n!} \right)^2, & \text{если } |i_{j+1} - i_j| \geq 2 \text{ при } 1 \leq k \leq k \\ & \text{и } 2n + i_1 - i_k \geq 2, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \end{aligned}$$

Тем самым требуемая вероятность равна

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{2n} \bar{A}_k\right) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n-k)!}{n!} d_n^k, \quad (*)$$

где d_n^k — число способов, которыми можно выбрать k различных пар мест, т. е. таких, что если (i_1, i_2) и (i_3, i_4) — какие-то две пары, то у них нет совпадающих элементов $(\{i_1, i_2\} \cap \{i_3, i_4\} = \emptyset)$. Подсчитаем d_n^k .

Пусть в последовательности $1, \dots, 2n$, где 1 и $2n$ считаются соседями, фиксировано k пар соседей. Заменим эти пары на синие шары, остальные элементы на белые шары. Получили k синих и $2n - 2k$ белых шаров. Посчитаем, сколькими способами можно расположить по кругу k синих и $2n - 2k$ белых шаров.

Расположим по кругу $2n - 2k$ белых шаров и выберем один белый в качестве первого. Синие шары можно располагать между белыми в любом количестве. В силу задачи 1.1.6(с) это можно сделать $C_{(2n-2k)+k-1}^k = C_{2n-k-1}^k$ способами.

Поскольку белые шары неразличимы, а мы зафиксировали один из них, каждая расстановка подсчитана $2n - 2k$ раз, значит, всего расстановок по кругу k синих и $2n - 2k$ белых шаров равно

$$C_{2n-k-1}^k \frac{1}{2n-2k} = C_{2n-k}^k \frac{1}{2n-k}.$$

Проведем обратное преобразование: синие шары заменим на пару элементов, белые шары на один элемент и выберем один элемент,

который будем считать первым (это можно сделать $2n$ способами). Получим

$$d_n^k = C_{2n-k}^k \frac{2n}{2n-k}.$$

Подставляя полученное значение d_n^k в формулу (*), получаем, что вероятность того, что никакая супружеская пара не занимает смежных мест, равна

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k (n-k)! \frac{2n}{2n-k} C_{2n-k}^k. \quad \square$$

27. (Латинские квадраты.) Рассматриваются числа $1, 2, \dots, n$, и из них образуются матрицы порядка $n \times n$ («квадраты») со свойством, что каждая цифра встречается в каждой строке и каждом столбце только один раз. При $n=2$ примером служат квадраты

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

При $n=3$ примером являются квадраты

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пусть L_n — число латинских квадратов размера $n \times n$.

Показать, что

$$L_n \geq n! (n-1)! \dots 1! \quad \left(= \prod_{k=1}^n k! \right).$$

Замечание. Проблема получения точных формул для L_n весьма трудна. (Частные значения: $L_2 = 2$, $L_3 = 12$, $L_4 = 576$.) Известно, что асимптотически

$$\ln L_n = n^2 \ln n + O(n^2), \quad n \rightarrow \infty.$$

Решение. Последовательно в соответствии с номером заполняем строки матрицы, двигаясь слева направо. При заполнении ячейки с номером (i, j) существует не менее $n - i - j + 2$ вариантов (подходят все числа, кроме $(i-1)$ -го числа в j -м столбце и $(j-1)$ -го числа в i -й строке). Перемножив все варианты, получим, что число латинских квадратов не меньше чем $n! (n-1)! \dots 1!$. $\square$

28. Из ящика, содержащего n белых и m черных шаров ($n \geq m$), вынимают наудачу все шары подряд. Найти вероятность следующих событий:

(а) будет момент, когда в ряду вынутых шаров будет поровну белых и черных;

(б) в любой момент в ряду вынутых шаров белых будет не меньше черных.

Решение. (а) Число всех рядов C_{n+m}^n . Если ряд начинается с черного шара, то он благоприятный. Таких рядов C_{n+m-1}^{m-1} . Между благоприятными рядами y , первый шар которых белый, и рядами x , начинающимися с черного шара, имеется биекция φ . Задается она так: $\varphi(x)$ — ряд, полученный зеркальным переворачиванием в рядах x шаров с 1 по t ; здесь t — первый момент, когда в рядах x белых и черных шаров будет поровну. Итак, искомая вероятность равна

$$\frac{2C_{n+m-1}^{m-1}}{C_{n+m}^n} = \frac{2m}{n+m}.$$

(б) Число благоприятных рядов совпадает с числом путей из задачи I.1.4. Поэтому искомая вероятность равна

$$\frac{C_{n+m}^n - C_{n+m}^{n+1}}{C_{n+m}^n} = \frac{n-m+1}{n+1}.$$

□

§ 3. Условные вероятности. Независимость

1. Привести примеры, показывающие, что, вообще говоря, равенства

$$P(B|A) + P(B|\bar{A}) = 1, \quad P(\bar{B}|A) + P(\bar{B}|\bar{A}) = 1$$

неверны.

Решение. Если $B = \emptyset$, то

$$P(B|A) + P(B|\bar{A}) = P(\emptyset|A) + P(\emptyset|\bar{A}) = 0 \neq 1.$$

Если $B = A$, то

$$P(B|A) + P(\bar{B}|\bar{A}) = P(A|A) + P(\bar{A}|\bar{A}) = 2 \neq 1.$$

□

2. Урна содержит M шаров, из которых M_1 шаров белого цвета. Рассматривается выборка объема n . Пусть B_j — событие, состоящее в том, что извлеченный на j -м шаге шар имел белый цвет, а A_k — событие, состоящее в том, что в выборке объема n имеется в точности

k белых шаров. Показать, что в классической ситуации как для выбора с возвращением, так и для выбора без возвращения

$$P(B_j | A_k) = k/n.$$

Решение. Занумеруем шары: первые M_1 — белые, остальные — черные. Рассмотрим пространство элементарных исходов $\Omega = \{\omega\}$, где $\omega = (a_1, \dots, a_n)$ — упорядоченный набор из n чисел от 1 до M , показывающих номер шара, вытасченного на i -м шаге.

В случае выборки с возвращением

$$|\Omega| = M^n, \quad |A_k| = C_n^k M_1^k (M - M_1)^{n-k},$$

$$|B_j \cap A_k| = C_{n-1}^{k-1} M_1^k (M - M_1)^{n-k}.$$

В случае выборки без возвращения ($a_i \neq a_j, i \neq j$)

$$|\Omega| = (M)_n, \quad |A_k| = C_n^k (M_1)_k (M - M_1)_{n-k},$$

$$|B_j \cap A_k| = C_{n-1}^{k-1} (M_1)_k (M - M_1)_{n-k}.$$

Действительно, k мест в последовательности из n элементов можно выбрать C_n^k способами для $\omega \in A_k$ ($k-1$ место в последовательности из $n-1$ элемента — C_{n-1}^{k-1} способами для $\omega \in A_k \cap B_j$). Число способов выбрать k шаров из M_1 белых и $n-k$ из $M - M_1$ не белых при выборе с возвращением есть M_1^k и $(M - M_1)^{n-k}$ соответственно, а при выборе без возвращения — $(M_1)_k$ и $(M - M_1)_{n-k}$ соответственно.

Поскольку постановка задачи классическая, для схемы выбора с возвращением имеем

$$P(B_j \cap A_k) = \frac{|B_j \cap A_k|}{|\Omega|} = \frac{C_{n-1}^{k-1} M_1^k (M - M_1)^{n-k}}{M^n},$$

$$P(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = \frac{C_n^k M_1^k (M - M_1)^{n-k}}{M^n},$$

В случае выбора без возвращения

$$P(B_j \cap A_k) = \frac{|B_j \cap A_k|}{|\Omega|} = \frac{C_{n-1}^{k-1} (M_1)_k (M - M_1)_{n-k}}{(M)_n},$$

$$P(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = \frac{C_n^k (M_1)_k (M - M_1)_{n-k}}{(M)_n},$$

В обоих случаях частное выписанных вероятностей будет равно k/n . □

3. Пусть $A_1, \dots, A_n$ — независимые события, $P(A_i) = p_i$.

(а) Показать, что события $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n$, где $\tilde{A}_i$ обозначает либо A_i , либо дополнение к A_i , также независимы.

(b) Показать, что

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^n P(\bar{A}_i). \quad (*)$$

(с) Пусть P_0 — вероятность того, что *ни одно* из событий $A_1, \dots, A_n$ не произойдет. Показать, что

$$P_0 = \prod_{i=1}^n (1 - p_i).$$

Решение. (а) Докажем утверждение для двух событий. Действительно, если A и B независимы, то

$$\begin{aligned} P(\bar{A}B) &= P(B \setminus AB) = P(B) - P(AB) = P(B) - P(A)P(B) = \\ &= P(B) (1 - P(A)) = P(B)P(\bar{A}). \end{aligned}$$

Значит, $\bar{A}$ независимо с B , т. е. операция взятия дополнения сохраняет независимость событий. По индукции это свойство распространяется на любое конечное число событий.

(b) В этом случае

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P\left(\Omega \setminus \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^n P(\bar{A}_i).$$

Последнее равенство верно в силу п. (а) данной задачи.

(с) Здесь

$$P_0 = P\left(\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i}\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i\right) = \prod_{i=1}^n (1 - p_i).$$

Последнее равенство верно в силу п. (а) данной задачи. $\square$

4. Пусть A и B — независимые события. В терминах $P(A)$ и $P(B)$ выразить вероятности событий, состоящих в том, что произойдет *в точности* k , *по меньшей мере* k и *самое большее* k из событий A и B , $k = 0, 1, 2$.

Решение. Для краткости введем обозначения $a := P(A)$, $b := P(B)$, ξ — число произошедших событий. Тогда

$$P(\xi \leq 2) = P(\xi \geq 0) = 1 \quad (\text{так как при любом исходе } 0 \leq \xi \leq 2).$$

Далее,

$$\begin{aligned}
 p_0 &:= P(\xi = 0) = P(\xi \leq 0) = 1 - P(A \cup B) = \\
 &= P(\overline{A \cup B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = (1 - a)(1 - b) = 1 - a - b + ab; \\
 p_1 &:= P(\xi = 1) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) = P(A \setminus AB) + P(B \setminus AB) = \\
 &= P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) = a + b - 2ab; \\
 p_2 &:= P(\xi = 2) = P(\xi \geq 2) = P(AB) = ab;
 \end{aligned}$$

$$P(\xi \geq 1) = p_1 + p_2 = a + b - ab;$$

$$P(\xi \leq 1) = p_0 + p_1 = 1 - ab. \quad \square$$

5. Пусть событие A таково, что оно не зависит от самого себя, т. е. A и A независимы. Показать, что тогда $P(A)$ равно 0 или 1.

Показать также, что если события A и B независимы и $A \subseteq B$, то или $P(A) = 0$, или $P(B) = 1$.

Решение. Пусть A независимо с A и $x := P(A)$, тогда

$$x = P(A) = P(A \cap A) = P(A)P(A) = x^2.$$

Это уравнение имеет ровно 2 корня: 0 и 1.

Пусть A и B независимы и $A \subseteq B$, тогда $P(A) = P(AB) = P(A)P(B)$, т. е. $P(A)(P(B) - 1) = 0$. Это возможно, только если $P(A) = 0$ либо $P(B) = 1$. $\square$

6. Пусть событие A таково, что $P(A)$ равно 0 или 1. Показать, что A и любое событие B независимы.

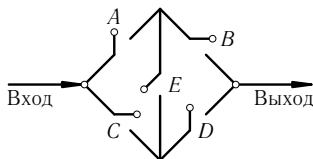
Решение. Если $P(A) = 0$, тогда в силу аддитивности и неотрицательности вероятности $P(AB) \leq P(A) = 0$, значит, $P(AB) = 0$, т. е.

$$0 = P(A)P(B) = P(AB) = 0$$

и, значит, A и B независимы.

Если $P(A) = 1$, то $P(\bar{A}) = 0$ и в силу предыдущих рассуждений $\bar{A}$ независимо с любым B . В силу задачи I.3.3(а) из независимости событий $\bar{A}$ и B следует независимость событий A и B . $\square$

7. Рассматривается электрическая схема, изображенная на рисунке. Каждое из реле A, B, C, D и E , работающих независимо, находится или в *открытом* (т. е. нерабочем) состоянии (и, значит, не пропускает электрический сигнал), или в *закрытом* (рабочем) состоянии (и тогда



сигнал пропускается) с вероятностями p и q соответственно. Какова вероятность того, что сигнал, поданный на «вход», будет получен на «выходе»? Какова условная вероятность того, что реле E было открыто, если на «выходе» был получен сигнал?

Решение. Пусть события A , B , C , D и E означают открытое (нерабочее) состояние соответствующего реле, а событие S состоит в том, что сигнал, поданный на «вход», будет получен на «выходе». Используя формулу включения-исключения и независимость работы реле, получим

$$\begin{aligned} P(S|E) &= P(\bar{A}\bar{B} \cup \bar{C}\bar{D}) = P(\bar{A}\bar{B}) + P(\bar{C}\bar{D}) - P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}) = \\ &= P(\bar{A})P(\bar{B}) + P(\bar{C})P(\bar{D}) - P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})P(\bar{D}) = 2q^2 - q^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(S|\bar{E}) &= 1 - P(\bar{S}|\bar{E}) = 1 - P(AC \cup BD) = \\ &= 1 - P(AC) - P(BD) + P(ABCD) = \\ &= 1 - P(A)P(C) - P(B)P(D) + P(A)P(B)P(C)P(D) = 1 - 2p^2 + p^4. \end{aligned}$$

По формуле полной вероятности

$$\begin{aligned} P(S) &= P(S|E)P(E) + P(S|\bar{E})P(\bar{E}) = \\ &= (2q^2 - q^4)p + (1 - 2p^2 + p^4)q = q(1 - p^2)^2 + pq^2(2 - q^2). \end{aligned}$$

По формуле Байеса

$$\begin{aligned} P(E|S) &= \frac{P(S|E)P(E)}{P(S)} = \frac{(2q^2 - q^4)p}{q(1 - p^2)^2 + pq^2(2 - q^2)}, \\ P(\bar{E}|S) &= \frac{P(S|\bar{E})P(\bar{E})}{P(S)} = \frac{(1 - p^2)^2 q}{q(1 - p^2)^2 + pq^2(2 - q^2)} = \\ &= \frac{(1 - p^2)^2}{(1 - p^2)^2 + pq(2 - q^2)}. \end{aligned}$$

□

8. Пусть $P(A + B) > 0$. Показать, что

$$P(A|A + B) = \frac{P(A)}{P(A) + P(B)}.$$

Решение. Утверждение задачи следует из формулы условной вероятности и того факта, что $A \subseteq A + B$. □

9. Пусть событие A не зависит от событий B_n , $n \geq 1$, при этом $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$. Убедиться в том, что события A и $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ являются независимыми.

Решение. Если $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, то $(B_i \cap A) \cap (B_j \cap A) = \emptyset$, $i \neq j$. Тогда

$$\begin{aligned} P\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap B_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A \cap B_n) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(A)P(B_n) = P(A) \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = P(A)P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right). \end{aligned}$$

Независимость событий A и $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ доказана. $\square$

10. Показать, что если $P(A|C) > P(B|C)$ и $P(A|\bar{C}) > P(B|\bar{C})$, то $P(A) > P(B)$.

Решение. Умножив неравенство $P(A|C) > P(B|C)$ на $P(C)$, получим $P(AC) > P(BC)$. Аналогично $P(A\bar{C}) > P(B\bar{C})$. Сложив последние два неравенства, получим требуемое утверждение. $\square$

11. Показать, что если $P(B) > 0$, то

$$P(A|B) = P(A|BC)P(C|B) + P(A|B\bar{C})P(\bar{C}|B).$$

Решение. По определению условной вероятности

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(ABC) + P(AB\bar{C})}{P(B)} = \frac{P(ABC)}{P(BC)} \frac{P(BC)}{P(B)} + \\ &+ \frac{P(AB\bar{C})}{P(B\bar{C})} \frac{P(B\bar{C})}{P(B)} = P(A|BC)P(C|B) + P(A|B\bar{C})P(\bar{C}|B). \quad \square \end{aligned}$$

12. Пусть X и Y — независимые биномиальные величины с параметрами n и p . Показать, что

$$P(X = k | X + Y = m) = \frac{C_n^k C_n^{m-k}}{C_{2n}^m}, \quad k = 0, 1, \dots, \min(m, n).$$

Решение. Поскольку $X + Y$ имеет биномиальное распределение с параметрами $2n$ и p , получаем, что

$$\begin{aligned} P\{X = k | X + Y = m\} &= \frac{P\{X = k; Y = m - k\}}{P\{X + Y = m\}} = \\ &= \frac{C_n^k p^k q^{n-k} \cdot C_n^{m-k} p^{m-k} q^{n-(m-k)}}{C_{2n}^m p^m q^{2n-m}} = \frac{C_n^k C_n^{m-k}}{C_{2n}^m}. \quad \square \end{aligned}$$

13. Пусть A, B, C — попарно независимые равновероятные события, причем $A \cap B \cap C = \emptyset$. Найти максимально возможное значение для вероятности $P(A)$.

Решение. Обозначим $P(A) = p$. По условию $P(B) = P(C) = p$, $P(AB) = P(BC) = P(AC) = p^2$.

Рассмотрим вероятность

$$\begin{aligned} P(A \setminus (B \cup C)) &= P(A \setminus (A(B \cup C))) = \\ &= P(A) - P(A(B \cup C)) = P(A) - P(AB \cup AC) = \\ &= P(A) - P(AB) - P(AC) + P(ABC) = p - 2p^2. \end{aligned}$$

Поскольку вероятность любого события неотрицательна, $p \geq 0$ и $p - 2p^2 \geq 0$. Решая квадратное неравенство, получаем, что $0 \leq p \leq 1/2$.

Приведем пример, удовлетворяющий условиям задачи с $P(A) = 1/2$. Рассматривается схема испытаний Бернулли с $n = 2$ и $p = 1/2$. Пусть

$$\begin{aligned} A &= \{\text{при первом испытании — успех}\}, \\ B &= \{\text{при втором испытании — успех}\}, \\ C &= \{\text{всего один успех}\}. \end{aligned}$$

Тогда $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$, $P(AB) = P(BC) = P(AC) = 1/4$ и $ABC = \emptyset$.

Итак, показано, что $P(A) \leq 1/2$, и приведен пример, когда $P(A) = 1/2$, значит, $1/2$ — максимально возможное значение для вероятности $P(A)$. $\square$

14. В урну, где находится один белый шар, добавили еще один «вслепую» выбранный шар — либо белый, либо черный (с одинаковыми вероятностями выбора). После этого «случайным» образом вытащили из урны один шар. Он оказался белым. Какова условная вероятность того, что оставшийся в урне шар тоже белый?

Решение. Пусть

$$\begin{aligned} A &= \{\text{в урну добавили белый шар}\}, \\ C &= \{\text{вынули белый}\}, \\ D &= \{\text{остался белый}\}. \end{aligned}$$

Отметим, что $A = CD$. Тогда

$$\begin{aligned} P(D|C) &= \frac{P(DC)}{P(C)} = \frac{P(A)}{P(C|A)P(A) + P(C|\bar{A})P(\bar{A})} = \\ &= \frac{1/2}{1 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 1/2} = \frac{2}{3}. \quad \square \end{aligned}$$

15. Если события A и B независимы, то согласно определению $P(AB) = P(A)P(B)$. Опишите случаи выполнения для произвольных A и B неравенств $P(AB) \leq P(A)P(B)$ и $P(AB) \geq P(A)P(B)$.

Решение. Если $P(A) = 0$ или $P(B) = 0$, то ввиду задачи I.3.6 события A и B независимы, а значит, выполняются оба неравенства.

Пусть $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$, тогда

$$P(AB) \leq P(A)P(B) \Leftrightarrow \frac{P(AB)}{P(B)} \leq P(A) \Leftrightarrow P(A|B) \leq P(A)$$

или

$$P(AB) \leq P(A)P(B) \Leftrightarrow P(B|A) \leq P(B).$$

Аналогично получаем, что

$$P(AB) \geq P(A)P(B) \Leftrightarrow P(A|B) \geq P(A) \Leftrightarrow P(B|A) \geq P(B). \quad \square$$

§ 4. Случайные величины и их характеристики

1. Проверить следующие свойства индикаторов $I_A = I_A(\omega)$:

$$\begin{aligned} I_{\emptyset} &= 0, \quad I_{\Omega} = 1, \quad I_{\bar{A}} = 1 - I_A, \\ I_{AB} &= I_A \cdot I_B, \quad I_{A \cup B} = I_A + I_B - I_{AB}, \\ I_{A \setminus B} &= I_A(1 - I_B), \quad I_{A \triangle B} = (I_A - I_B)^2 = I_A + I_B \pmod{2}, \\ I_{\bigcup_{i=1}^n A_i} &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - I_{A_i}), \quad I_{\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i}} = \prod_{i=1}^n (1 - I_{A_i}), \quad I_{\sum_{i=1}^n A_i} = \sum_{i=1}^n I_{A_i}, \end{aligned}$$

где $A \triangle B$ — симметрическая разность множеств A и B , т. е. множество $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, и сумма $\sum$ обозначает объединение ($\bigcup$) непересекающихся событий.

Решение. Свойства $I_{\emptyset} = 0$, $I_{\Omega} = 1$ и $I_{\bar{A}} = 1 - I_A$ следуют из определения индикаторов. Далее,

$$\begin{aligned} I_{AB}(\omega) &= 1 \Leftrightarrow \omega \in AB \Leftrightarrow \omega \in A \text{ и } \omega \in B \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow I_A(\omega) = 1 \text{ и } I_B(\omega) = 1 \Leftrightarrow I_A(\omega)I_B(\omega) = 1. \end{aligned}$$

И I_{AB} , и $I_A I_B$ принимают только значения 0 и 1, поэтому $I_{AB} = I_A I_B$. Далее,

$$I_{A \cup B} = I_{\overline{\bar{A} \bar{B}}} = 1 - I_{\bar{A} \bar{B}} = 1 - I_{\bar{A}} I_{\bar{B}} = 1 - (1 - I_A)(1 - I_B) = I_A + I_B - I_{AB}.$$

Как частный случай, $I_{A \sqcup B} = I_A + I_B$, где $\sqcup$ — объединение непересекающихся множеств. Используя это свойство, получаем

$$I_A = I_{(A \setminus B) \sqcup AB} = I_{A \setminus B} + I_{AB}, \quad I_{A \setminus B} = I_A - I_{AB} = I_A - I_A I_B = I_A(1 - I_B),$$

$$\begin{aligned} I_{A \triangle B} &= I_{(A \setminus B) \sqcup (B \setminus A)} = I_{A \setminus B} + I_{B \setminus A} = I_A(1 - I_B) + I_B(1 - I_A) = \\ &= I_A + I_B - 2I_A I_B = I_A^2 + I_B^2 - 2I_A I_B = (I_A - I_A)^2 = I_A + I_B \pmod{2}. \end{aligned}$$

Докажем по индукции, что

$$I_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \prod_{i=1}^n (1 - I_{A_i}).$$

База индукции:

$$I_{A_1 \cup A_2} = 1 - I_{A_1 \cup A_2} = 1 - (I_{A_1} + I_{A_2} - I_{A_1 A_2}) = (1 - I_{A_1})(1 - I_{A_2}).$$

Шаг индукции: пусть утверждение верно для $n = k - 1$, докажем его для $n = k$:

$$I_{\bigcup_{i=1}^k A_i} = \left(1 - I_{\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i}\right)(1 - I_{A_k}) = I_{\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i}(1 - I_{A_k}) = \prod_{i=1}^k (1 - I_{A_i}).$$

Отсюда следует, что

$$I_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = 1 - I_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - I_{A_i}).$$

Докажем по индукции, что

$$I_{\sum_{i=1}^n A_i} = \sum_{i=1}^n I_{A_i}.$$

База индукции уже была доказана ранее:

$$I_{A_1 + A_2} = I_{A_1} + I_{A_2}.$$

Шаг индукции: пусть утверждение верно для $n = k - 1$, докажем его для $n = k$:

$$I_{\sum_{i=1}^k A_i} = I_{\sum_{i=1}^{k-1} A_i} + I_{A_k} = \sum_{i=1}^{k-1} I_{A_i} + I_{A_k} = \sum_{i=1}^k I_{A_i}. \quad \square$$

2. Вывести из задачи I.4.1 справедливость следующей *формулы включения-исключения для индикаторов трех событий A, B и C*:

$$I_{A \cup B \cup C} = I_A + I_B + I_C - (I_{A \cap B} + I_{A \cap C} + I_{B \cap C}) + I_{A \cap B \cap C}.$$

Представить в аналогичном виде индикатор $I_{A_1 \cup \dots \cup A_n}$ объединения событий $A_1, \dots, A_n$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} I_{A \cup B \cup C} &= I_{A \cup B} + I_C - I_{(A \cup B) \cap C} = I_A + I_B - I_{A \cap B} + I_C - I_{(A \cap C) \cup (B \cap C)} = \\ &= I_A + I_B + I_C - I_{A \cap B} - (I_{A \cap C} + I_{B \cap C} - I_{(A \cap C) \cap (B \cap C)}) = \\ &= I_A + I_B + I_C - (I_{A \cap B} + I_{A \cap C} + I_{B \cap C}) + I_{A \cap B \cap C}. \end{aligned}$$

Аналогичная формула верна для $I_{A_1 \cup \dots \cup A_n}$ (доказательство формулы будет приведено при решении задачи I.4.12):

$$\begin{aligned} I_{A_1 \cup \dots \cup A_n} &= \sum_{1 \leq i \leq n} I_{A_i} + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} I_{A_{i_1} \cap A_{i_2}} + \dots \\ &\dots + (-1)^{m+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} I_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m}} + \dots + (-1)^{n+1} I_{A_1 \cap \dots \cap A_n}. \quad \square \end{aligned}$$

3. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые бернуллиевские случайные величины,

$$P\{\xi_i = 0\} = 1 - \lambda_i \Delta, \quad P\{\xi_i = 1\} = \lambda_i \Delta,$$

где Δ — малое число, $\Delta > 0$, $\lambda_i > 0$. Показать, что

$$P\{\xi_1 + \dots + \xi_n = 1\} = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \Delta + O(\Delta^2),$$

$$P\{\xi_1 + \dots + \xi_n > 1\} = O(\Delta^2).$$

Решение. Используя независимость случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$, получаем

$$\begin{aligned} P\{\xi_1 + \dots + \xi_n = 1\} &= \sum_{i=1}^n P\{\xi_1 = 0, \dots, \xi_i = 1, \dots, \xi_n = 0\} = \\ &= \sum_{i=1}^n P\{\xi_1 = 0\} \dots P\{\xi_i = 1\} \dots P\{\xi_n = 0\} = \\ &= \sum_{i=1}^n (1 - \lambda_1 \Delta) \dots (\lambda_i \Delta) \dots (1 - \lambda_n \Delta) = \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \Delta (1 + O(\Delta)) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \Delta + O(\Delta^2). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
 P\{\xi_1 + \dots + \xi_n > 1\} &= 1 - P\{\xi_1 + \dots + \xi_n = 1\} - P\{\xi_1 + \dots + \xi_n = 0\} = \\
 &= 1 - \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)\Delta + O(\Delta^2) - \prod_{i=1}^n P\{\xi_i = 0\} = \\
 &= 1 - \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)\Delta + O(\Delta^2) - \prod_{i=1}^n (1 - \lambda_i\Delta) = \\
 &= 1 - \left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i\right\}\Delta + O(\Delta^2) - \left(1 - \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)\Delta + O(\Delta^2)\right) = O(\Delta^2). \quad \square
 \end{aligned}$$

4. Показать, что $\inf_{-\infty < a < \infty} E(\xi - a)^2$ достигается при $a = E\xi$ и, следовательно,

$$\inf_{-\infty < a < \infty} E(\xi - a)^2 = D\xi.$$

Решение. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned}
 E(\xi - a)^2 - D\xi &= (E\xi^2 - 2aE\xi + a^2) - (E\xi^2 - (E\xi)^2) = \\
 &= (E\xi)^2 - 2aE\xi + a^2 = (E\xi - a)^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Равенство достигается при $a = E\xi$. $\square$

5. Пусть ξ — случайная величина с функцией распределения $F_\xi(x) = P\{\xi \leq x\}$ и $\mu = \mu(\xi)$ (или $\mu = \mu(F_\xi)$) — медиана случайной величины $F_\xi(x)$, т. е. такая точка, что

$$F_\xi(\mu-) \leq \frac{1}{2} \leq F_\xi(\mu).$$

(По поводу других способов определения медианы см. далее задачу I.4.27.)

Показать, что

$$\inf_{-\infty < a < \infty} E|\xi - a| = E|\xi - \mu|.$$

Решение. Считая, что $\mu = 0$ (в противном случае сделаем замену $\tilde{\xi} = \xi - \mu$), находим, что для $a \geq 0$ выполняется равенство

$$E|\xi - a| = E|\xi| + E f(\xi),$$

где

$$f(x) = \begin{cases} a, & x \leq 0, \\ a - 2x, & 0 < x < a, \\ -a, & x \geq a. \end{cases}$$

Поскольку $f(\xi)I(\xi \leq 0) = a$ и $f(\xi)I(\xi > 0) \geq -a$, получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} f(\xi) &= \mathbf{E} f(\xi)I_{\{\xi \leq 0\}} + \mathbf{E} f(\xi)I_{\{\xi > 0\}} \geq a\mathbf{P}\{\xi \leq 0\} - a\mathbf{P}\{\xi > 0\} = \\ &= a(2\mathbf{P}\{\xi \leq 0\} - 1) = a(2F_{\xi}(0) - 1) \geq 0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\mathbf{E} |\xi - a| \geq \mathbf{E} |\xi|.$$

Аналогичное верно и при $a < 0$.

6. Пусть $P_{\xi}(x) = \mathbf{P}\{\xi = x\}$ и $F_{\xi}(x) = \mathbf{P}\{\xi \leq x\}$. Показать, что для $a > 0$ и $-\infty < b < \infty$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} P_{a\xi+b}(x) &= P_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right), \\ F_{a\xi+b}(x) &= F_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right). \end{aligned}$$

Показать также, что для $y \geq 0$ выполняется равенство

$$F_{\xi^2}(y) = F_{\xi}(+\sqrt{y}) - F_{\xi}(-\sqrt{y}) + P_{\xi}(-\sqrt{y})$$

и для $\xi^+ = \max(\xi, 0)$ выполняется равенство

$$F_{\xi^+}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ F_{\xi}(x), & x \geq 0. \end{cases}$$

□

Решение. Если $a > 0$ и $-\infty < b < +\infty$, то

$$\begin{aligned} P_{a\xi+b}(x) &= \mathbf{P}\{a\xi + b = x\} = \mathbf{P}\left\{\xi = \frac{x-b}{a}\right\} = P_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right), \\ F_{a\xi+b}(x) &= \mathbf{P}\{a\xi + b \leq x\} = \mathbf{P}\left\{\xi \leq \frac{x-b}{a}\right\} = F_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\{\xi = -\sqrt{y}\} \cap \{\{\xi \leq +\sqrt{y}\} \setminus \{\xi \leq -\sqrt{y}\}\} = \emptyset$$

и

$$\{\xi \leq -\sqrt{y}\} \subseteq \{\xi \leq +\sqrt{y}\},$$

для $y \geq 0$ получаем

$$\begin{aligned} F_{\xi^2}(y) &= \mathbf{P}\{\xi^2 \leq y\} = \\ &= \mathbf{P}\{\{\xi = -\sqrt{y}\} \cup \{\{\xi \leq +\sqrt{y}\} \setminus \{\xi \leq -\sqrt{y}\}\}\} = \\ &= \mathbf{P}\{\xi \leq +\sqrt{y}\} - \mathbf{P}\{\xi \leq -\sqrt{y}\} + \mathbf{P}\{\xi = -\sqrt{y}\} = \\ &= F_{\xi}(+\sqrt{y}) - F_{\xi}(-\sqrt{y}) + P_{\xi}(-\sqrt{y}). \end{aligned}$$

Аналогично

$$F_{\xi^+}(x) = P\{\xi^+ \leq x\} = \begin{cases} P\{\emptyset\}, & x < 0, \\ P\{\xi \leq x\}, & x \geq 0, \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ F_{\xi}(x), & x \geq 0. \end{cases} \quad \square$$

7. Пусть ξ и η — две случайные величины, $D\xi > 0$, $D\eta > 0$ и $\rho = \rho(\xi, \eta)$ — их коэффициент корреляции. Показать, что $|\rho| \leq 1$. При этом если $|\rho| = 1$, то найдутся такие константы a и b , что $\eta = a\xi + b$. Более того, если $\rho = 1$, то

$$\frac{\eta - E\eta}{\sqrt{D\eta}} = \frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}}$$

(и, значит, в случае $\rho = 1$ константа a положительна), если же $\rho = -1$, то

$$\frac{\eta - E\eta}{\sqrt{D\eta}} = -\frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}}$$

(и, значит, в этом случае $a < 0$).

Решение. Положим

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}}, \quad \tilde{\eta} = \frac{\eta - E\eta}{\sqrt{D\eta}}.$$

Тогда $E\tilde{\xi} = E\tilde{\eta} = 0$, $D\tilde{\xi} = E\tilde{\xi}^2 = D\tilde{\eta} = E\tilde{\eta}^2 = 1$,

$$E\tilde{\xi}\tilde{\eta} = \frac{E[(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)]}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} = \rho(\xi, \eta) = \rho.$$

Воспользуемся неравенством Коши—Буняковского:

$$|\rho| = |E\tilde{\xi}\tilde{\eta}| \leq E|\tilde{\xi}\tilde{\eta}| \leq \sqrt{E\tilde{\xi}^2 E\tilde{\eta}^2} = 1.$$

Во введенных обозначениях осталось показать, что если $\rho = 1$, то $\tilde{\xi} = \tilde{\eta}$, а если $\rho = -1$, то $\tilde{\xi} = -\tilde{\eta}$:

$$\begin{aligned} \rho = 1 &\Leftrightarrow E\tilde{\xi}\tilde{\eta} = 1 \Leftrightarrow 2E\tilde{\xi}\tilde{\eta} = E\tilde{\xi}^2 + E\tilde{\eta}^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow E(\tilde{\xi} - \tilde{\eta})^2 = 0 \Leftrightarrow \tilde{\xi} = \tilde{\eta}, \\ \rho = -1 &\Leftrightarrow E\tilde{\xi}\tilde{\eta} = -1 \Leftrightarrow -2E\tilde{\xi}\tilde{\eta} = E\tilde{\xi}^2 + E\tilde{\eta}^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow E(\tilde{\xi} + \tilde{\eta})^2 = 0 \Leftrightarrow \tilde{\xi} = -\tilde{\eta}. \quad \square \end{aligned}$$

8. Пусть ξ и η — две случайные величины, $E\xi = E\eta = 0$, $D\xi = D\eta = 1$ с коэффициентом корреляции $\rho = \rho(\xi, \eta)$. Показать, что

$$E \max(\xi^2, \eta^2) \leq 1 + \sqrt{1 - \rho^2}.$$

Решение. Заметим, что при любых значениях ξ и η выполнено равенство

$$\max(\xi^2, \eta^2) = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2 + |\xi^2 - \eta^2|)$$

Поскольку $E\xi^2 = E\eta^2 = 1$, для решения задачи осталось показать, что

$$E|\xi^2 - \eta^2| \leq 2\sqrt{1 - \rho^2}.$$

Отметим, что в силу условия задачи $\rho = E\xi\eta$.

Применим неравенство Коши—Буняковского:

$$\begin{aligned} E(|\xi - \eta| \cdot |\xi + \eta|) &\leq \sqrt{E(\xi - \eta)^2 E(\xi + \eta)^2} = \\ &= \sqrt{(2 + 2E\xi\eta)(2 - 2E\xi\eta)} = 2\sqrt{1 - \rho^2}. \quad \square \end{aligned}$$

9. Пусть $L(x, y)$ — функция потерь, т. е. $L(x, y) \geq 0$, причем $L(x, y) = 0$ только при $x = y$, а ξ — случайная величина с функцией распределения F . Предположим, что минимум функции $EL(\xi, a)$ достигается в точке a^* . Показать, что

(а) $a^* = E\xi$, если $L(x, y) = (x - y)^2$;

(б) a^* — медиана величины ξ , если $L(x, y) = |x - y|$, т. е. $F(a^* -) \leq 1/2 \leq F(a^*)$;

(с) a^* — q -я квантиль величины ξ , если $L(x, y) = q(x - y)^+ + (1 - q)(x - y)^-$, т. е.

$$F(a^* -) \leq q \leq F(a^*);$$

здесь $x^+ = x \vee 0$, $x^- = (-x) \vee 0$.

Решение. (а) Утверждение вытекает из равенства $E(\xi - a)^2 = D\xi + (E\xi - a)^2$.

(б) Утверждение следует из п. (с).

(с) Пусть для определенности q -я квантиль равна 0, а $a > 0$. Имеем

$$qE(\xi - a)^+ + (1 - q)E(\xi - a)^- = qE\xi^+ + (1 - q)E\xi^- + Ef(\xi, a),$$

где

$$f(x, a) = \begin{cases} a - qa, & x \leq 0, \\ (a - x) - qa, & 0 < x \leq a, \\ -qa, & x > a. \end{cases}$$

Очевидно, $Ef(\xi, a) \geq a(F(0) - q) \geq 0$, причем $Ef(\xi, a) = 0$ только при $F(0) = F(a) = q$. Поэтому

$$qE(\xi - a)^+ + (1 - q)E(\xi - a)^- \geq qE\xi^+ + (1 - q)E\xi^-, \quad a > 0.$$

Аналогичное верно при $a \leq 0$. □

Замечание. В п. (а) можно брать и другие функции потерь, например функции вида

$$L(x, y) = l(x) - l(y) - l'(y)(x - y),$$

где l' — субградиент функции l , определяемый из неравенства

$$l(x) - l(y) \geq l'(y)(x - y), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

или функции вида $L(x, y) = |x|^p - |y|^p - p \operatorname{sign}(y)|y|^{p-1}(x - y)$, $p \geq 1$.

10. Доказать неравенство

$$|\mu - E\xi| \leq \sqrt{D\xi},$$

где μ — медиана случайной величины ξ . В каких случаях достигается равенство?

Решение. По неравенству Ляпунова имеем

$$|E\xi - \mu| \leq E|\xi - \mu| \leq E|\xi - E\xi| \leq \sqrt{D\xi}.$$

Равенство достигается в том и только том случае, когда ξ — либо константа, либо бернуллиевская случайная величина с $p = q = 1/2$, а μ — ее минимальное значение. $\square$

11. Доказать неравенство

$$|\mu - a|^p \leq 2E|\xi - a|^p,$$

где $a \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ таково, что $E|\xi|^p < \infty$, а μ — медиана случайной величины ξ .

Решение. Пусть $p = 1$. Тогда согласно задаче I.4.9(b) имеем

$$|\mu - a| \leq E|\xi - \mu| + E|\xi - a| \leq 2E|\xi - a|.$$

Пусть теперь $p > 1$. При $\mu \geq a$ по неравенству Гёльдера имеем

$$|\mu - a|P(\xi \geq \mu) \leq E|\xi - a|I(\xi \geq \mu) \leq (E|\xi - a|^p)^{1/p}P(\xi \geq \mu)^{1-1/p}.$$

Отсюда, используя то, что $P(\xi \geq \mu) \geq 1/2$, получаем искомое неравенство. Аналогично рассматривается случай $\mu \leq a$. $\square$

12. Используя свойство

$$I_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - I_{A_i})$$

индикаторов из задачи I.4.1, доказать формулу «включения-исключения» для вероятности объединения событий:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \dots \cup A_n) &= \sum_{1 \leq i_1 \leq n} P(A_{i_1}) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \dots \\ &\dots + (-1)^{m+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m}) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \end{aligned}$$

(ср. с задачей I.1.12).

Решение. Возьмем математическое ожидание от обеих частей равенства $I_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - I_{A_i})$. Тогда левая часть равенства равна

$$E I_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right),$$

а правая в силу линейности математического ожидания равна

$$\begin{aligned} E\left(1 - \prod_{i=1}^n (1 - I_{A_i})\right) &= E\left(\sum_{m=1}^n (-1)^{m+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} I_{A_{i_1}} \cdot \dots \cdot I_{A_{i_m}}\right) = \\ &= \sum_{m=1}^n (-1)^{m+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} E\left(I_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m}}\right) = \\ &= \sum_{m=1}^n (-1)^{m+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m}). \quad \square \end{aligned}$$

13. Если $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины, $\varphi_1 = \varphi_1(\xi_1, \dots, \xi_k)$ и $\varphi_2 = \varphi_2(\xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$ — две функции от $\xi_1, \dots, \xi_k$ и $\xi_{k+1}, \dots, \xi_n$ соответственно, то случайные величины φ_1 и φ_2 независимы. Доказать это.

Решение. Пусть Y_i — множество значений, которые случайная величина ξ_i , принимает с положительными вероятностями, $i = 1, \dots, n$. Зафиксируем произвольные z_1 и z_2 . Пусть

$$\begin{aligned} J_{z_1}^1 &= \{(y_1, \dots, y_k) : \varphi_1(y_1, \dots, y_k) = z_1\}, \\ J_{z_2}^2 &= \{(y_{k+1}, \dots, y_n) : \varphi_2(y_{k+1}, \dots, y_n) = z_2\}, \end{aligned}$$

где $y_i \in Y_i$, $i = 1, \dots, n$.

Тогда

$$\begin{aligned}
 P\{\varphi_1 = z_1\}P\{\varphi_2 = z_2\} &= \\
 &= P \bigsqcup_{J_{z_1}^1} \{\xi_1 = y_1, \dots, \xi_k = y_k\} P \bigsqcup_{J_{z_2}^2} \{\xi_{k+1} = y_{k+1}, \dots, \xi_n = y_n\} = \\
 &= \sum_{J_{z_1}^1, J_{z_2}^2} P\{\xi_1 = y_1, \dots, \xi_k = y_k\} P\{\xi_{k+1} = y_{k+1}, \dots, \xi_n = y_n\} = \\
 &= \sum_{J_{z_1}^1, J_{z_2}^2} P\{\xi_1 = y_1\} \dots P\{\xi_k = y_k\} P\{\xi_{k+1} = y_{k+1}\} \dots P\{\xi_n = y_n\} = \\
 &= \sum_{J_{z_1}^1, J_{z_2}^2} P\{\xi_1 = y_1, \dots, \xi_n = y_n\} = P \bigsqcup_{J_{z_1}^1, J_{z_2}^2} \{\xi_1 = y_1, \dots, \xi_n = y_n\} = \\
 &= P\{\varphi_1 = z_1, \varphi_2 = z_2\},
 \end{aligned}$$

где $\bigsqcup$ — объединение непересекающихся множеств.

В силу произвольности z_1 и z_2 случайные величины φ_1 и φ_2 независимы. $\square$

14. Показать, что случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы тогда и только тогда, когда для всех $x_1, \dots, x_n$ выполняется равенство

$$F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \dots F_{\xi_n}(x_n),$$

где

$$F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = P\{\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n\}.$$

Решение. Необходимость очевидным образом следует из определения независимости случайных величин. Докажем достаточность. Зафиксируем произвольные $y_1, \dots, y_n$. Введем разностный оператор $\Delta_{y_i} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, действующий по формуле

$$\begin{aligned}
 \Delta_{y_i} F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) &= \\
 &= F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n) - F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, y_i - 0, \dots, x_n).
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 P\{\xi_1 = y_1, \dots, \xi_n = y_n\} &= \Delta_{y_1} \dots \Delta_{y_n} F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = \\
 &= F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(y_1, \dots, y_n) - \sum_{1 \leq i \leq n} F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(y_1, \dots, y_i - 0, \dots, y_n) + \\
 &+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(y_1, \dots, y_{i_1} - 0, \dots, y_{i_2} - 0, \dots, y_n) + \dots \\
 &\dots + (-1)^n F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(y_1 - 0, \dots, y_n - 0),
 \end{aligned}$$

и в то же время

$$\begin{aligned}
 & P\{\xi_1 = y_1\} \cdot \dots \cdot P\{\xi_n = y_n\} = \\
 & = (F_{\xi_1}(y_1) - F_{\xi_1}(y_1 - 0)) \dots (F_{\xi_n}(y_n) - F_{\xi_n}(y_n - 0)) = \\
 & = F_{\xi_1}(y_1) \dots F_{\xi_n}(y_n) - \sum_{1 \leq i \leq n} F_{\xi_1}(y_1) \dots F_{\xi_i}(y_i - 0) \dots F_{\xi_n}(y_n) + \\
 & \quad + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} F_{\xi_1}(y_1) \dots F_{\xi_{i_1}}(y_{i_1} - 0) \dots F_{\xi_{i_2}}(y_{i_2} - 0) \dots F_{\xi_n}(y_n) + \dots \\
 & \quad + (-1)^n F_{\xi_1}(y_1 - 0) \dots F_{\xi_n}(y_n - 0).
 \end{aligned}$$

Но для всех $x_1, \dots, x_n$ выполняется равенство

$$F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) \equiv F_{\xi_1}(x_1) \dots F_{\xi_n}(x_n).$$

Следовательно,

$$P\{\xi_1 = y_1, \dots, \xi_n = y_n\} = P\{\xi_1 = y_1\} \dots P\{\xi_n = x_n\},$$

и в силу произвольности $y_1, \dots, y_n$ случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы. $\square$

15. Показать, что случайная величина ξ не зависит от самой себя (т. е. ξ и ξ независимы) в том и только том случае, когда $\xi(\omega) = \text{const}$ п. н.² для $\omega \in \Omega$.

Решение. *Достаточность.* Пусть $\xi(\omega) = c$ п. н., $\omega \in \Omega$, где c — константа. Для любых c_1 и c_2 и $P\{\xi = c_1, \xi = c_2\}$, и $P\{\xi = c_1\}P\{\xi = c_2\}$ равны 1 при $c = c_1 = c_2$ и 0 в остальных случаях. Значит,

$$P\{\xi = c_1, \xi = c_2\} = P\{\xi = c_1\}P\{\xi = c_2\},$$

и случайные величины ξ и ξ независимы.

Необходимость. Докажем от противного. Пусть случайная величина ξ не зависит от самой себя, но $\xi(\omega) \neq \text{const}$ п. н. для $\omega \in \Omega$. Тогда существуют такие ω_1 и ω_2 , что

$$\xi(\omega_1) = c_1 \neq c_2 = \xi(\omega_2), \quad P\{\omega_1\} > 0, \quad P\{\omega_2\} > 0.$$

Поэтому $P\{\xi = c_1, \xi = c_2\} = 0$, а $P\{\xi = c_1\} > 0$ и $P\{\xi = c_2\} > 0$, т. е.

$$P\{\xi = c_1, \xi = c_2\} \neq P\{\xi = c_1\}P\{\xi = c_2\},$$

и величина ξ не является независимой с ξ . Противоречие. $\square$

² Здесь и далее «п. н.» означает «почти наверное».

16. При каких условиях на ξ случайные величины ξ и $\sin \xi$ независимы?

Решение. Пусть $y_1, \dots, y_n$ — все значения³, которые ξ принимает с положительной вероятностью. Тогда для любых i и j , $1 \leq i < j \leq n$, равенство $\sin y_i = \sin y_j$ или верно при всех ω , или неверно для всех ω и при этом

$$\begin{aligned} P \{ \sin y_i = \sin y_j \} &\geq P \{ \xi = y_i, \sin \xi = \sin y_j \} = \\ &= P \{ \sin \xi = y_i \} P \{ \sin \xi = \sin y_j \} > 0. \end{aligned}$$

Значит, $\sin y_i = \sin y_j$. В силу произвольности i и j получаем, что $\sin y_1 = \dots = \sin y_n$, т. е.

$$\sin \xi = c \text{ п. н.},$$

где c — константа.

Покажем, что это является и достаточным условием независимости величин ξ и $\sin \xi$. Для произвольных x_1 и x_2 рассмотрим события $\{\xi = x_1\}$ и $\{\sin \xi = x_2\}$. Имеем $P\{\sin \xi = x_2\} = 1$, если $x_2 = c$, и 0 в противном случае. Согласно задаче 1.3.6 событие $\{\sin \xi = x_2\}$ независимо с любым событием, в частности с $\{\xi = x_1\}$. $\square$

17. Пусть ξ и η — независимые случайные величины и $\eta \neq 0$. Выразить вероятности $P\{\xi\eta \leq z\}$ и $P\left\{\frac{\xi}{\eta} \leq z\right\}$ через функции $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$.

Решение. Пусть случайная величина η принимает значения $x_1, \dots, x_n$, причем $x_1, \dots, x_p$ отрицательны, $x_{p+1}, \dots, x_n$ положительны. Тогда

$$\begin{aligned} F_{\xi\eta}(z) &= P \{ \xi\eta \leq z \} = \sum_{k=1}^n P \{ \eta = x_k, \xi x_k \leq z \} = \\ &= \sum_{k=1}^p P \{ \eta = x_k \} P \left\{ \xi \geq \frac{z}{x_k} \right\} + \sum_{k=p+1}^n P \{ \eta = x_k \} P \left\{ \xi \leq \frac{z}{x_k} \right\} = \\ &= \sum_{k=1}^p (F_\eta(x_k) - F_\eta(x_k - 0)) (1 - F_\xi(z/x_k - 0)) + \\ &\quad + \sum_{k=p+1}^n (F_\eta(x_k) - F_\eta(x_k - 0)) F_\xi(z/x_k). \end{aligned}$$

³ Напомним, что в настоящей главе, посвященной классической вероятности, число элементарных событий конечно, $|\Omega| < \infty$.

Аналогично

$$\begin{aligned}
 F_{\xi/\eta}(z) &= P \{ \xi/\eta \leq z \} = \sum_{k=1}^n P \{ \eta = x_k, \xi/x_k \leq z \} = \\
 &= \sum_{k=1}^p P \{ \eta = x_k \} P \{ \xi \geq z x_k \} + \sum_{k=p+1}^n P \{ \eta = x_k \} P \{ \xi \leq z x_k \} = \\
 &= \sum_{k=1}^p (F_{\eta}(x_k) - F_{\eta}(x_k - 0)) (1 - F_{\xi}(z x_k - 0)) + \\
 &\quad + \sum_{k=p+1}^n (F_{\eta}(x_k) - F_{\eta}(x_k - 0)) F_{\xi}(z x_k). \quad \square
 \end{aligned}$$

18. Пусть ξ, η, ζ — такие случайные величины, что $|\xi| \leq 1, |\eta| \leq 1, |\zeta| \leq 1$. Доказать справедливость *неравенства Белла*: $|E\xi\zeta - E\eta\zeta| \leq 1 - E\xi\eta$.

Решение. В силу ограничений на случайные величины выполнено неравенство $\xi(1 + \eta) \leq 1 + \eta$, или, что равносильно, $\xi - \eta \leq 1 - \xi\eta$. Аналогично получаем $\eta - \xi \leq 1 - \xi\eta$, т. е. $|\xi - \eta| \leq 1 - \xi\eta$. Поскольку $|\zeta| \leq 1$, имеем $|\xi\zeta - \eta\zeta| \leq 1 - \xi\eta$. Взяв математическое ожидание от обеих частей этого неравенства, получаем

$$|E\xi\eta - E\eta\zeta| \leq E|\xi\zeta - \eta\zeta| \leq 1 - E\xi\eta. \quad \square$$

19. Пусть ξ, η, X, Y — случайные величины, ограниченные по модулю единицей. Доказать *неравенство Клозера—Хорна—Шимони—Хольта*

$$|E\xi X + E\xi Y + E\eta X - E\eta Y| \leq 2.$$

При каком условии достигается равенство?

Решение. Имеем

$$\begin{aligned}
 |E\xi X + E\xi Y + E\eta X - E\eta Y| &\leq \\
 &\leq |E\xi(X + Y)| + |E\eta(X - Y)| \leq E|X + Y| + E|X - Y|,
 \end{aligned}$$

причем равенства реализуются, если (с вероятностью единица)

$$\xi = \begin{cases} 1, & X + Y > 0, \\ -1, & X + Y < 0, \end{cases} \quad \eta = \begin{cases} 1, & X - Y > 0, \\ -1, & X - Y < 0, \end{cases} \quad (*)$$

или же (с вероятностью единица)

$$\xi = \begin{cases} -1, & X + Y > 0, \\ 1, & X + Y < 0, \end{cases} \quad \eta = \begin{cases} -1, & X - Y > 0, \\ 1, & X - Y < 0. \end{cases} \quad (**)$$

Преобразуя модуль $|x + y| + |x - y|$, нетрудно убедиться, что

$$|x + y| + |x - y| = 2(|x| \vee |y|) \leq 2,$$

причем равенство реализуется тогда и только тогда, когда $x, y \in \{-1, 1\}$.

Итак, мы получили искомое неравенство и показали, что равенство достигается на бернуллиевских случайных величинах со значениями 1 и -1 , удовлетворяющих либо условию (*), либо условию (**). $\square$

20. В n урн независимым образом бросаются k шаров. (Для каждого шара вероятность его попадания в каждую конкретную урну равна $1/n$.) Найти математическое ожидание числа *непустых* урн.

Решение. Пусть ξ — число непустых урн. Тогда $\xi = \sum_{i=1}^n I_{A_i}$, где $A_i = \{i\text{-я урна не пуста}\}$. Заметим, что

$$P(\bar{A}_i) = P\{\text{ни один шар не попал в } i\text{-ю урну}\} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^k.$$

Тогда

$$E\xi = \sum_{i=1}^n E I_{A_i} = \sum_{i=1}^n (1 - P(\bar{A}_i)) = n \left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right). \quad \square$$

21. (Переформулировка задачи I.3.12.) Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — н. о. р.⁴ случайные величины, $P\{\xi_1 = 1\} = p$, $P\{\xi_1 = 0\} = 1 - p$, где $0 < p < 1$. Пусть $S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$, $k \leq n$. Показать, что для $1 \leq m \leq n$ выполняется равенство

$$P(S_m = k | S_n = l) = \frac{C_m^k C_{n-m}^{l-k}}{C_n^l}.$$

Решение. Заметим, что S_n , S_m и $S_n - S_m$ имеют биномиальное распределение с параметрами p и соответственно n , m и $n - m$. Кроме того, S_m и $S_n - S_m$ независимы. Используя это, получаем

$$\begin{aligned} P\{S_m = k | S_n = l\} &= \frac{P\{S_m = k; S_n - S_m = l - k\}}{P\{S_n = l\}} = \\ &= \frac{C_m^k p^k q^{m-k} \cdot C_{n-m}^{l-k} p^{l-k} q^{(n-m)-(l-k)}}{C_n^l p^l q^{n-l}} = \frac{C_m^k C_{n-m}^{l-k}}{C_n^l}. \quad \square \end{aligned}$$

22. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины и

$$\xi_{\min} = \min(\xi_1, \dots, \xi_n), \quad \xi_{\max} = \max(\xi_1, \dots, \xi_n).$$

⁴ Здесь и далее «н. о. р.» означает независимые одинаково распределенные.

Показать, что

$$P\{\xi_{\min} \geq x\} = \prod_{i=1}^n P\{\xi_i \geq x\}, \quad P\{\xi_{\max} < x\} = \prod_{i=1}^n P\{\xi_i < x\}.$$

Решение. Для любого набора случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$ выполнены равенства

$$\{\xi_{\min} \geq x\} = \bigcap_{i=1}^n \{\xi_i \geq x\} \quad \text{и} \quad \{\xi_{\max} < x\} = \bigcap_{i=1}^n \{\xi_i < x\}.$$

Теперь утверждение задачи напрямую следует из независимости случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$. $\square$

23. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — н. о. р. случайные величины, $P\{\xi_1 = 1\} = P\{\xi_1 = -1\} = 1/2$. Пусть $S_{2n} = \xi_1 + \dots + \xi_{2n}$, $M_{2n} = \max(S_1, \dots, S_{2n})$. Показать, что для $k \leq n$ выполняется равенство

$$P\{M_{2n} \geq k, S_{2n} = 0\} = P\{S_{2n} = 2k\}$$

и, следовательно,

$$P(M_{2n} \geq k | S_{2n} = 0) = \frac{P\{S_{2n} = 2k\}}{P\{S_{2n} = 0\}} = \frac{C_{2n}^{n+k}}{C_{2n}^{2n}}.$$

Вывести отсюда, что

$$E(M_{2n} | S_{2n} = 0) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{P\{S_{2n} = 0\}} - 1 \right].$$

Решение. Пусть $A_i = \{S_i = k, S_j < k, 1 \leq j < i\}$. Тогда

$$\begin{aligned} P\{M_{2n} \geq k, S_{2n} = 0\} &= \\ &= \sum_{i=1}^n P(A_i \cap \{S_{2n} = 0\}) = \sum_{i=1}^n P(A_i \cap \{\xi_{i+1} + \dots + \xi_n = -k\}). \quad (*) \end{aligned}$$

Из независимости случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$ получаем независимость событий A_i и $\{\xi_{i+1} + \dots + \xi_n = -k\}$. Из той же независимости и одинаковой распределенности ξ_i и $-\xi_i$ получаем

$$P\{\xi_{i+1} + \dots + \xi_n = -k\} = P\{\xi_{i+1} + \dots + \xi_n = k\},$$

т. е. последняя сумма из формулы (*) равна

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) P\{\xi_{i+1} + \dots + \xi_n = k\}.$$

Проводя обратные преобразования, с помощью которых было получено равенство (*), получаем первое утверждение задачи. Далее,

$$\begin{aligned} P(M_{2n} \geq k | S_{2n} = 0) &= \frac{P\{S_{2n} = 2k\}}{P\{S_{2n} = 0\}} = \\ &= \frac{P\{\text{число положительных } \xi_i \text{ в } S_{2n} \text{ равно } n+k\}}{P\{\text{число положительных } \xi_i \text{ в } S_{2n} \text{ равно } n\}} = \frac{C_{2n}^{n+k} (1/2)^{2n}}{C_{2n}^n (1/2)^{2n}} = \frac{C_{2n}^{n+k}}{C_{2n}^n}, \end{aligned}$$

а это и есть вторая формула.

Используя первое утверждение задачи, получаем

$$\begin{aligned} E(M_{2n} | S_{2n} = 0) &= \sum_{k=0}^n k P(M_{2n} = k | S_{2n} = 0) = \\ &= \sum_{k=1}^n P(M_{2n} \geq k | S_{2n} = 0) = \sum_{k=0}^n \frac{P(S_{2n} = 2k)}{P(S_{2n} = 0)} - 1 = \\ &= \frac{P(S_{2n} \geq 0)}{P(S_{2n} = 0)} - 1. \quad (**) \end{aligned}$$

Из равенства $P(S_{2n} \geq 0) = P(S_{2n} \leq 0)$ следует, что $P(S_{2n} \geq 0) = \frac{1}{2}(1 + P(S_{2n} = 0))$. Подставляя это выражение для $P(S_{2n} \geq 0)$ в соотношение (**), получим третью формулу. $\square$

24. Привести пример двух случайных величин ξ и η , имеющих одну и ту же функцию распределения ($F_\xi = F_\eta$), но таких, что $P\{\xi \neq \eta\} > 0$.

Решение. Рассмотрим пространство элементарных исходов $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $P(\omega_1) = P(\omega_2) = 1/2$. Случайные величины зададим поточечно: $\xi(\omega_1) = \eta(\omega_2) = 1$, $\xi(\omega_2) = \eta(\omega_1) = -1$. Тогда $F_\xi(x) = F_\eta(x)$, но $|\xi - \eta| \equiv 2$. $\square$

25. Пусть ξ , η и ζ — случайные величины, причем функции распределения величин ξ и η совпадают. Верно ли, что тогда функции распределения величин $\xi\zeta$ и $\eta\zeta$ совпадают?

Решение. Ответ: нет. Рассмотрим пример, приведенный в задаче I.4.24. Пусть $\zeta := \xi$, тогда $\xi\zeta = \xi^2 \equiv 1$, $\eta\zeta \equiv -1$, и функции распределения этих случайных величин не совпадают. $\square$

26. Привести пример двух таких зависимых случайных величин ξ и η , что ξ^2 и η^2 независимы.

Решение. Рассмотрим пример из задачи I.4.24. Имеем $\xi^2 = \eta^2 \equiv 1$. В силу задачи I.4.15 величина ξ^2 независима с η^2 . При этом

$$P(\xi = 1, \eta = -1) = 1/2 \neq 1/4 = P(\xi = 1)P(\eta = -1). \quad \square$$

27. Пусть ξ — дискретная случайная величина. Рассмотрим следующие три способа определения *медианы* $\mu = \mu(\xi)$ этой случайной величины (ср. с I.4.5):

$$(a) \max(P\{\xi > \mu\}, P\{\xi < \mu\}) \leq 1/2;$$

$$(b) P\{\xi < \mu\} \leq 1/2 \leq P\{\xi \leq \mu\};$$

$$(c) \mu = \inf\{x \in \mathbb{R}: P\{\xi \leq x\} \geq 1/2\}.$$

Пусть M_a , M_b и M_c — множества медиан по каждому из определений (a), (b) и (c) соответственно. В каком взаимоотношении находятся эти множества?

Решение. Покажем, что $M_a = M_b$. Действительно, $\mu \in M_a$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} P(\xi < \mu) \leq 1/2, \\ P(\xi > \mu) \leq 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(\xi < \mu) \leq 1/2, \\ P(\xi \leq \mu) \geq 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \mu \in M_b.$$

Покажем, что $M_c \subseteq M_a = M_b$. Пусть

$$\mu = \inf\{x \in \mathbb{R}: P\{\xi \leq x\} \geq 1/2\}.$$

Пусть ξ принимает с положительной вероятностью значения $x_1, \dots, x_n$. Тогда существует такой номер k , $1 \leq k \leq n$, что

$$P\{\xi \leq x_k\} \geq 1/2 \quad \text{и} \quad P\{\xi < x_k\} < 1/2.$$

Заметим, что для любого $x < x_k$ верно неравенство $P\{\xi \leq x\} < 1/2$. Значит,

$$x_k \in \{x \in \mathbb{R}: P\{\xi \leq x\} \geq 1/2\} \subseteq [x_k; +\infty).$$

Следовательно, $\mu = x_k$, а из оценок на x_k следует, что $\mu = x_k \in M_b$. $\square$

28. Пусть в урне содержится N шаров, из них a белых, b черных и c красных, $a + b + c = N$. Вынимается n шаров, и пусть среди них ξ белых и η черных. Показать, что если совершаемый выбор — это «выбор с возвращением», то

$$\text{cov}(\xi, \eta) = -npq,$$

где $p = a/N$ и $q = b/N$. Если же производится «выбор без возвращения», то

$$\text{cov}(\xi, \eta) = -npq \frac{N-n}{N-1}.$$

Показать также, что в обоих случаях корреляция вычисляется по формуле

$$\rho(\xi, \eta) = -\sqrt{\frac{pq}{(1-p)(1-q)}}.$$

Решение. (а) Выбор с возвращением. Введем случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$, где ξ_i принимает значение 1, если на i -м шаге вытащен белый шар, и 0 в противном случае, и $\eta_1, \dots, \eta_n$, где η_i принимает значение 1, если на i -м шаге вытащен черный шар, и 0 в противном случае. Тогда

$$\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n,$$

$$\eta = \eta_1 + \dots + \eta_n,$$

а $\xi_i, i = 1, \dots, n$, и $\eta_j, j = 1, \dots, n$, — бернуллиевские случайные величины с параметрами $p = a/N$ и $q = b/N$ соответственно. Заметим, что случайные величины $\nu_1, \dots, \nu_n$ независимы, где ν_i обозначает либо ξ_i , либо η_i , и воспользуемся тем, что ковариация двух независимых случайных величин равна 0. Поскольку i -й шар не может быть одновременно и белым, и черным, $\xi_i \eta_i = 0, i = 1, \dots, n$. Найдем ковариацию и дисперсию величин ξ и η :

$$\begin{aligned} \text{cov}(\xi, \eta) &= \text{cov}(\xi_1 + \dots + \xi_n, \eta_1 + \dots + \eta_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{cov}(\xi_i, \eta_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \text{cov}(\xi_i, \eta_i) = \sum_{i=1}^n (\mathbb{E}\xi_i \eta_i - \mathbb{E}\xi_i \mathbb{E}\eta_i) = - \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\xi_i \mathbb{E}\eta_i = -npq; \\ D\xi &= D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \sum_{i=1}^n D\xi_i = np(1-p), \end{aligned}$$

и аналогично

$$D\eta = nq(1-q).$$

Найдем корреляцию величин ξ и η :

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi} \sqrt{D\eta}} = \frac{-npq}{\sqrt{np(1-p)} \sqrt{nq(1-q)}} = -\sqrt{\frac{pq}{(1-p)(1-q)}}.$$

(б) Выбор без возвращения. Занумеруем шары: белые числами от 1 до a , черные — от $a+1$ до $a+b$, а красные — от $a+b+1$ до $a+b+c = N$. Введем случайные величины $\nu_1, \dots, \nu_{a+b}$, где ν_i принимает значение 1, если был вытащен i -й шар, и 0 в противном случае. Тогда

$$\xi = \nu_1 + \dots + \nu_a,$$

$$\eta = \nu_{a+1} + \dots + \nu_{a+b},$$

а $\nu_i, i = 1, \dots, a+b$, — независимые бернуллиевские случайные величины с параметром n/N . Найдем ковариацию величин ν_i и ν_j ,

$i, j = 1, \dots, a + b, i \neq j$. Заметим, что случайные величины $\nu_i \nu_j$ тоже являются бернуллиевскими с параметром $\frac{C_{N-2}^{n-2}}{C_N^n} = \frac{n(n-1)}{N(N-1)}$. Поэтому

$$\text{cov}(\nu_i, \nu_j) = E\nu_i \nu_j - E\nu_i E\nu_j = \frac{n(n-1)}{N(N-1)} - \frac{n^2}{N^2} = -\frac{n(N-n)}{N^2(N-1)}.$$

Теперь найдем ковариацию и дисперсии величин ξ и η :

$$\begin{aligned} \text{cov}(\xi, \eta) &= \text{cov}(\nu_1 + \dots + \nu_a, \nu_{a+1} + \dots + \nu_{a+b}) = \\ &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \text{cov}(\nu_i, \nu_{a+j}) = -ab \frac{n(N-n)}{N^2(N-1)} - npq \frac{N-n}{N-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D\xi &= D(\nu_1 + \dots + \nu_a) = \sum_{i=1}^a D\nu_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq a} \text{cov}(\nu_i, \nu_j) = \\ &= a \frac{n}{N} \left(1 - \frac{n}{N}\right) - a(a-1) \frac{n(N-n)}{N^2(N-1)} = \frac{an(N-n)}{N^2} \left(1 - \frac{a-1}{N-1}\right) = \\ &= \frac{an(N-n)(N-a)}{N(N-1)} = np(1-p) \frac{N-n}{N-1}, \end{aligned}$$

и аналогично

$$D\eta = nq(1-q) \frac{N-n}{N-1}.$$

Найдем корреляцию величин ξ и η :

$$\begin{aligned} \rho(\xi, \eta) &= \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi} \sqrt{D\eta}} = \frac{-npq \frac{N-n}{N-1}}{\sqrt{np(1-p) \frac{N-n}{N-1}} \sqrt{nq(1-q) \frac{N-n}{N-1}}} = \\ &= -\sqrt{\frac{pq}{(1-p)(1-q)}}. \quad \square \end{aligned}$$

§ 5. Схема Бернулли. I. Закон больших чисел

1. Пусть ξ и η — случайные величины с коэффициентом корреляции ρ . Показать справедливость следующего *двумерного* аналога *неравенства Чебышёва*:

$$P\{|\xi - E\xi| \geq \varepsilon \sqrt{D\xi} \text{ или } |\eta - E\eta| \geq \varepsilon \sqrt{D\eta}\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} (1 + \sqrt{1 - \rho^2}).$$

Решение. Рассмотрим случайные величины $\tilde{\xi} := \frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}}$ и $\tilde{\eta} := \frac{\eta - E\eta}{\sqrt{D\eta}}$.

Тогда $E\tilde{\xi} = E\tilde{\eta} = 0$, $D\tilde{\xi} = D\tilde{\eta} = 1$ и

$$\begin{aligned} P\{|\xi - E\xi| \geq \varepsilon \sqrt{D\xi} \text{ или } |\eta - E\eta| \geq \varepsilon \sqrt{D\eta}\} = \\ = P\{|\tilde{\xi}| \geq \varepsilon \text{ или } |\tilde{\eta}| \geq \varepsilon\} = P\{\max\{\tilde{\xi}^2, \tilde{\eta}^2\} \geq \varepsilon^2\}. \end{aligned}$$

В силу неравенства Чебышёва последняя вероятность не больше $\frac{E \max\{\tilde{\xi}^2, \tilde{\eta}^2\}}{\varepsilon^2}$, что в силу задачи I.4.8 не больше чем $\frac{(1 + \sqrt{1 - \rho^2})}{\varepsilon^2}$, поскольку коэффициент корреляции величин ξ и η такой же, как и величин $\tilde{\xi}$ и $\tilde{\eta}$. $\square$

2. Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ — случайный вектор в $\mathbb{R}^n$ с невырожденной ковариационной матрицей $C = E(\xi - E\xi)(\xi - E\xi)^\top$. Доказать следующий аналог неравенства Чебышёва:

$$P((\xi - E\xi)^\top C^{-1}(\xi - E\xi) > \varepsilon) \leq \frac{n}{\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0.$$

Решение. Пусть для простоты $E\xi = 0$. Поскольку матрица ковариации является неотрицательно определенной, то $\xi^\top C^{-1}\xi \geq 0$ и применимо неравенство Чебышева:

$$\begin{aligned} P(\xi^\top C^{-1}\xi > \varepsilon) &\leq \varepsilon^{-1} E \xi^\top C^{-1}\xi = \\ &= \varepsilon^{-1} E \operatorname{tr}(\xi^\top C^{-1}\xi) = \varepsilon^{-1} E \operatorname{tr}(C^{-1}\xi\xi^\top) = \frac{\operatorname{tr}(C^{-1}C)}{\varepsilon} = \frac{n}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

где мы положили $\operatorname{tr}(A) = a_{11} + \dots + a_{nn}$ для квадратной матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, а также учли легко проверяемое тождество

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA),$$

верное при любых прямоугольных матрицах A, B , для которых определены AB и BA . $\square$

3. Пусть $f = f(x)$ — неотрицательная четная функция, неубывающая при положительных значениях x . Показать, что для случайной величины $\xi = \xi(\omega)$ с $|\xi(\omega)| \leq C$, где $C > 0$, справедлива следующая оценка снизу:

$$P\{|\xi| \geq \varepsilon\} \geq \frac{E f(\xi) - f(\varepsilon)}{f(C)}.$$

В частности, для $f(x) = x^2$ справедлива оценка

$$\frac{D\xi - \varepsilon^2}{C^2} \leq P\{|\xi - E\xi| \geq \varepsilon\} \quad \left(\leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2} \right).$$

Решение. В силу четности функции $f = f(x)$ имеем $E f(\xi) = E f(|\xi|)$. Обозначим $A = \{\omega: |\xi(\omega)| \geq \varepsilon\}$. В силу свойств математического ожидания и свойств функции f имеем

$$E f(|\xi|) = E f(|\xi|)I_A + E f(|\xi|)I_{\bar{A}} \leq f(C)E I_A + f(\varepsilon)E I_{\bar{A}} \leq f(C)P(A) + f(\varepsilon),$$

что и дает требуемую оценку снизу. $\square$

4. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — последовательность независимых случайных величин, $D\xi_i \leq C$. Показать, что тогда

$$P\left\{\left|\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} - \frac{E(\xi_1 + \dots + \xi_n)}{n}\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Решение. Обозначим $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. В силу следствия из неравенства Чебышёва (см. формулу (4) в В1.1.5) и свойств дисперсии

$$P\left\{\left|\frac{S_n - ES_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{D\frac{S_n - ES_n}{n}}{\varepsilon^2} = \frac{DS_n}{\varepsilon^2 n^2} = \frac{\sum_{k=1}^n D\xi_k}{\varepsilon^2 n^2} \leq \frac{C}{\varepsilon^2 n}. \quad \square$$

5. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые бернуллиевские случайные величины, $P\{\xi_i = 1\} = p > 0$, $P\{\xi_i = -1\} = 1 - p$. Показать, что справедлива следующая оценка Бернштейна: существует такое $a > 0$, что

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - (2p - 1)\right| \geq \varepsilon\right\} \leq 2e^{-a\varepsilon^2 n},$$

где $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ и $\varepsilon > 0$.

Решение. Преобразуем интересующую нас вероятность:

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - (2p - 1)\right| \geq \varepsilon\right\} = P\left\{\left|\frac{S_n + n}{2n} - p\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Заметим, что $(S_n + n)/2 = \tilde{S}_n = \tilde{\xi}_1 + \dots + \tilde{\xi}_n$, где $\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n$ — независимые бернуллиевские случайные величины, $P\{\tilde{\xi}_i = 1\} = p > 0$, $P\{\tilde{\xi}_i = 0\} = 1 - p$. Воспользуемся оценкой (42) из В1.1.5:

$$P\left\{\left|\frac{\tilde{S}_n}{n} - p\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \leq 2e^{-2n(\varepsilon/2)^2} = 2e^{-\frac{1}{2}n\varepsilon^2}.$$

Отсюда видим, что требуемое неравенство выполнено с $a = 1/2$. $\square$

6. Пусть ξ — неотрицательная случайная величина и $a > 0$. Найти максимальное возможное значение для вероятности $P\{\xi \geq a\}$ в каждом из случаев, когда известно, что

(a) $E\xi = m$;

(b) $E\xi = m$, $D\xi = \sigma^2$.

Решение. (а) В случае $a \leq m$ наибольшее значение $P\{\xi \geq a\}$ есть 1, когда $P\{\xi = m\} = 1$. В случае $a > m$ воспользуемся неравенством Чебышёва $P\{\xi \geq a\} \leq E\xi/a$. Равенство достигается, когда $P\{\xi = a\} = \frac{m}{a}$ и $P\{\xi = 0\} = 1 - \frac{m}{a}$.

(b) В случае $a < m$ наибольшее значение $P\{\xi \geq a\}$ есть 1. Действительно, рассмотрим случайную величину η , принимающую значение a с вероятностью α и значение b с вероятностью $1 - \alpha$. Записывая условие, что математическое ожидание этой случайной величины есть m , а дисперсия σ^2 , получаем, что $\alpha = \frac{\sigma^2}{(m-a)^2 + \sigma^2}$ и $b = m + \frac{\sigma^2}{m-a}$. Для такой случайной величины $P\{\eta \geq a\} = 1$.

В случае $a \geq m$ воспользуемся *неравенством Кантелли* (см. задачу II.6.63)

$$P\{\xi - E\xi \geq \varepsilon\} \geq \frac{D\xi}{D\xi + \varepsilon^2}.$$

Тогда

$$P\{\xi \geq a\} \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + (m-a)^2}. \quad (*)$$

Равенство достигается, если в качестве ξ взять случайную величину η , построенную выше. Заметим, что $\eta \geq 0$ при $a \geq m + \frac{\sigma^2}{m}$. Вопрос о наибольшем значении $P\{\xi \geq a\}$ при $a \in \left(m; m + \frac{\sigma^2}{m}\right)$ остается открытым. $\square$

7. Пусть $S_0 = 0$, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, $n \leq N$, где $\xi_1, \dots, \xi_n$ — бернуллиевская последовательность независимых величин, $P\{\xi_n = 1\} = p > 0$, $P\{\xi_n = 0\} = q$, $n \leq N$. Обозначим $P_n(k) = P\{S_n = k\}$. Показать, что для $n < N$ и $k \geq 1$ выполняется равенство

$$P_{n+1}(k) = pP_n(k-1) + qP_n(k).$$

Решение. В силу формулы полной вероятности

$$\begin{aligned} P_{n+1}(k) &= P(S_{n+1} = k | \xi_{n+1} = 1) P\{\xi_{n+1} = 1\} + \\ &\quad + P\{S_{n+1} = k | \xi_{n+1} = 0\} P\{\xi_{n+1} = 0\} = \\ &= P\{S_n = k-1\} P\{\xi_{n+1} = 1\} + P\{S_n = k\} P\{\xi_{n+1} = 0\} = \\ &= P_n(k-1)p + P_n(k)q. \quad \square \end{aligned}$$

8. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_N$ — независимые бернуллиевские случайные величины, $P\{\xi_i = 1\} = P\{\xi_i = -1\} = 1/2$, $i = 1, \dots, N$. Положим $S_m = \xi_1 + \dots + \xi_m$. Показать, что для $2m \leq N$ выполняется равенство

$$P\{S_1 \dots S_{2m} \neq 0\} = 2^{-2m} C_{2m}^m.$$

Решение. Величина S_i ни разу не обратится в нуль при $i = 1, \dots, n$, если либо они все положительные, либо все отрицательные, т. е.

$$\{S_1 \cdot \dots \cdot S_{2m} \neq 0\} = \left\{ \min_{1 \leq i \leq 2m} S_i \geq 1 \right\} \cup \left\{ \max_{1 \leq i \leq 2m} S_i \leq -1 \right\}.$$

В силу симметрии вероятности этих двух событий равны:

$$P\left\{ \max_{1 \leq i \leq 2m} S_i \leq -1 \right\} = P\left\{ \xi_1 = -1, \max_{1 \leq i \leq 2m-1} \tilde{S}_i \leq 0 \right\}, \quad (*)$$

где $\tilde{S}_i = S_{i+1} - \xi_1$, $i = 1, \dots, 2m-1$.

Заметим, что ξ_1 и $\tilde{S}_i$ независимы для любого $i = 1, \dots, 2m-1$ и в силу задачи I.10.3 выполняется равенство

$$P\left\{ \max_{1 \leq i \leq 2m-1} \tilde{S}_i \leq 0 \right\} = 2^{-2m+1} C_{2m-1}^{m-1}.$$

Тогда выражение из формулы (*) равно

$$2^{-2m} C_{2m-1}^{m-1} = 2^{-2m-1} C_{2m}^m,$$

а искомая вероятность равна $2^{-2m} C_{2m}^m$. $\square$

9. Рассматриваются M ячеек, занумерованных числами $1, \dots, M$. Предположим, что в ячейке с номером n находится один белый шар и n черных. Производится «случайный» выбор шаров из каждой из M ячеек. Положим

$$\xi_n = \begin{cases} 1, & \text{если из ячейки с номером } n \text{ извлечен белый шар,} \\ 0, & \text{если извлечен черный шар,} \end{cases}$$

и пусть $S_M = \xi_1 + \dots + \xi_M$ — число извлеченных белых шаров. Показать, что « S_M имеет при больших M порядок $\ln M$ » в том смысле, что для всякого $\varepsilon > 0$ при $M \rightarrow \infty$ выполняется соотношение

$$P\left\{ \left| \frac{S_M}{\ln M} - 1 \right| \geq \varepsilon \right\} \rightarrow 0.$$

Решение. В силу неравенства Чебышёва

$$P\left\{ \left| \frac{S_M}{\ln M} - 1 \right| \geq \varepsilon \right\} \leq \frac{E\left(\frac{S_M}{\ln M} - 1 \right)^2}{\varepsilon^2}.$$

Для доказательства утверждения задачи достаточно показать, что

$$E(S_M - \ln M)^2 = o(\ln^2 M) \quad \text{при } M \rightarrow +\infty.$$

В силу формулы для вычисления дисперсии

$$E(S_M - \ln M)^2 = DS_M + (ES_M - \ln M)^2. \quad (*)$$

Заметим, что $S_M = \xi_1 + \dots + \xi_M$, ξ_i независимы и $E\xi_i = P\{\xi_i = 1\} = 1/(i+1)$, $D\xi_i = 1/(i+1) - 1/(i+1)^2$ для $i = 1, \dots, M$. Тогда

$$ES_M = \sum_{k=1}^M E\xi_k = \sum_{k=1}^M \frac{1}{k+1},$$

что в силу формулы Эйлера равно $\ln M + O(1)$, при $M \rightarrow \infty$, и

$$DS_M = \sum_{k=1}^M D\xi_k = \sum_{k=1}^M \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = \ln M + O(1)$$

при $M \rightarrow \infty$. Таким образом, выражение из формулы (*) равно $O(\ln M) = o(\ln^2 M)$ при $M \rightarrow \infty$. $\square$

10. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — такие независимые бернуллиевские случайные величины, что $P\{\xi_k = 1\} = p_k$, $P\{\xi_k = 0\} = 1 - p_k$, $1 \leq k \leq n$, и при этом $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_k = a$. Показать, что для заданного a , $0 < a < 1$, дисперсия DS_n величины $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ достигает своего максимального значения при $p_1 = \dots = p_n = a$.

Решение. Заметим, что

$$DS_n = \sum_{k=1}^n D\xi_k = \sum_{k=1}^n p_k - p_k^2 = na - \sum_{k=1}^n p_k^2.$$

Для решения задачи необходимо показать, что $\sum_{k=1}^n p_k^2$ достигает своего наименьшего значения при $p_1 = p_2 = \dots = p_n = a$.

Для любой выпуклой вниз функции $f(\cdot)$ справедливо неравенство

$$\frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right).$$

Рассмотрим $f(x) = x^2$ и $x_k = p_k$, $k = 1, \dots, n$. Тогда

$$\frac{p_1^2 + \dots + p_n^2}{n} \geq \left(\frac{p_1 + \dots + p_n}{n}\right)^2 = a^2,$$

причем равенство достигается при $p_1 = \dots = p_n = a$. $\square$

11. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые бернуллиевские случайные величины,

$$P\{\xi_k = 1\} = p, \quad P\{\xi_k = 0\} = 1 - p, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Найти условную вероятность того, что первая единица («успех») появится на m -м шаге, при условии, что на всех n шагах «успех» произошёл только один раз.

Решение. Обозначим $S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$. Величина S_n имеет биномиальное распределение с параметрами n и p . В силу определения условной вероятности

$$\begin{aligned} P\{\xi_m = 1 | S_n = 1\} &= \\ &= \frac{P\{\xi_1 = \dots = \xi_{m-1} = \xi_{m+1} = \dots = \xi_n = 0, \xi_m = 1\}}{P\{S_n = 1\}} = \\ &= \frac{p(1-p)^{n-1}}{C_n^1 p(1-p)^{n-1}} = \frac{1}{n}. \quad \square \end{aligned}$$

12. Пусть $(p_1, \dots, p_r)$ и $(q_1, \dots, q_r)$ — два распределения вероятностей. Показать, что справедливо следующее *неравенство Гиббса*:

$$-\sum_{i=1}^r p_i \ln p_i \leq -\sum_{i=1}^r p_i \ln q_i.$$

Решение. Заметим, что в силу свойств логарифмической функции доказываемое неравенство равносильно неравенству

$$\sum_{i=1}^r p_i \ln \frac{q_i}{p_i} \leq 0.$$

Воспользуемся неравенством $\ln x \leq x - 1$, верным для любого положительного x . Тогда

$$\sum_{i=1}^r p_i \ln \frac{q_i}{p_i} \leq \sum_{i=1}^r p_i \left(\frac{q_i}{p_i} - 1 \right) = \sum_{i=1}^r (q_i - p_i) = 0. \quad \square$$

§ 6. Схема Бернулли. II. Предельные теоремы (локальная, Муавра—Лапласа, Пуассона)

1. Рассмотрим случайные величины из задачи I.5.11. Пусть $p = 1/2$ и $Z_n = 2S_n - n$ (число *превышений* единиц над нулями в n испытаниях). Показать, что

$$\sup_j |\sqrt{\pi n} P\{Z_{2n} = j\} - e^{-j^2/(4n)}| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Решение. Обозначим $2n = m$ и $k = j/2 + n$. Тогда доказательство требуемого утверждения сводится к тому, чтобы доказать, что

$$\sup_k \left| \sqrt{\frac{\pi m}{2}} P\{S_m = k\} - e^{-\frac{(k - mp)^2}{2mpq}} \right| \left(\equiv \sup_k \varepsilon(k, m) \right) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

Имея это в виду, представим

$$\sup_k \varepsilon(k, m) = \max(a_m, b_m),$$

где

$$a_m = \sup_{\{k: |k-m| \leq (mpq)^s\}} \varepsilon(k, m), \quad b_m = \sup_{\{k: |k-m| > (mpq)^s\}} \varepsilon(k, m)$$

с некоторым $s \in (1/2, 2/3)$. Для решения задачи достаточно показать, что $a_m \rightarrow 0$, $b_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

Поскольку $p = q = 1/2$, получаем, что

$$\begin{aligned} a_m &= \sup_{\{k: |k-m| \leq (mpq)^s\}} \left\{ e^{-\frac{(k-m)^2}{2mpq}} \left\{ \frac{\mathbf{P}\{S_m = k\}}{e^{-\frac{(k-m)^2}{2mpq}} / \sqrt{2\pi mpq}} - 1 \right\} \right\} \leq \\ &\leq \sup_{\{k: |k-m| \leq (mpq)^s\}} \left\{ \frac{\mathbf{P}\{S_m = k\}}{e^{-\frac{(k-m)^2}{2mpq}} / \sqrt{2\pi mpq}} - 1 \right\}. \end{aligned}$$

Последнее выражение стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$ в силу локальной предельной теоремы.

Докажем, что $b_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Так как $2s - 1 > 0$ при таких k , что $|k - m| \geq (mpq)^s$, верно, что $e^{-\frac{(k-m)^2}{2mpq}} \leq e^{-\frac{1}{2}(mpq)^{2s-1}} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, поэтому для доказательства сходимости к нулю b_m достаточно показать, что

$$\sqrt{\frac{\pi m}{2}} \sup_{\{k: |k-m| > (mpq)^s\}} \mathbf{P}\{S_m = k\} \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty. \quad (*)$$

Поскольку $p = q = 1/2$, получаем, что $\mathbf{P}\{S_m = k\} = 2^{-m} C_m^k$. В силу свойства биномиальных коэффициентов ($C_m^k = C_m^{m-k}$) для доказательства сходимости (*) достаточно показать, что

$$\sqrt{\frac{\pi m}{2}} 2^{-m} \sup_{\left\{k: k > \frac{m}{2} + \frac{m^s}{4^s}\right\}} C_m^k \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty. \quad (**)$$

В силу невозрастания биномиальных коэффициентов C_m^k при возрастании k от $\frac{m}{2}$ до m (см. задачу I.2.2) получаем, что при достаточно

больших m выполняется оценка

$$\sup_{\left\{k: k > \frac{m}{2} + \frac{m^s}{4^s}\right\}} C_m^k \leq C_m^{\frac{m}{2} + \frac{m^s}{4^s} + \alpha_m},$$

где $0 \leq \alpha_m < 1$ и $\frac{m}{2} + \frac{m^s}{4^s} + \alpha_m \in \mathbb{N}$.

Таким образом, для доказательства сходимости (**) достаточно показать, что

$$c_m := \sqrt{\frac{\pi m}{2}} 2^{-m} C_m^{\frac{m}{2} + \frac{m^s}{4^s} + \alpha_m} \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

Воспользуемся формулой Стирлинга:

$$\begin{aligned} c_m &= \sqrt{\frac{\pi m}{2}} 2^{-m} \frac{m!}{\left(\frac{m}{2} + \frac{m^s}{4^s} + \alpha_m\right)! \left(\frac{m}{2} - \frac{m^s}{4^s} - \alpha_m\right)!} \sim \sqrt{\frac{\pi m}{2}} 2^{-m} \times \\ &\times \frac{\sqrt{2\pi m} e^{-m} m^m}{\sqrt{2\pi \left(\frac{m}{2} + \frac{m^s}{4^s} + \alpha_m\right)} e^{-\left(\frac{m}{2} + \frac{m^s}{4^s} + \alpha_m\right)} \left(\frac{m}{2} + \frac{m^s}{4^s} + \alpha_m\right)^{\left(\frac{m}{2} + \frac{m^s}{4^s} + \alpha_m\right)}} \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{2\pi \left(\frac{m}{2} - \frac{m^s}{4^s} - \alpha_m\right)} e^{-\left(\frac{m}{2} - \frac{m^s}{4^s} - \alpha_m\right)} \left(\frac{m}{2} - \frac{m^s}{4^s} - \alpha_m\right)^{\left(\frac{m}{2} - \frac{m^s}{4^s} - \alpha_m\right)}}. \end{aligned}$$

Показательные функции сокращаются, квадратные корни в знаменателе эквивалентны $\sqrt{\pi m}$, поэтому

$$\begin{aligned} c_m &\sim 2^{-m} \frac{m^m}{\left(\frac{m}{2} + \frac{m^s}{4^s} + \alpha_m\right)^{\left(\frac{m}{2} + \frac{m^s}{4^s} + \alpha_m\right)} \left(\frac{m}{2} - \frac{m^s}{4^s} - \alpha_m\right)^{\left(\frac{m}{2} - \frac{m^s}{4^s} - \alpha_m\right)}} = \\ &= \left\{1 + \frac{2}{4^s m^{1-s}} + \frac{\alpha_m}{m}\right\}^{-\left(\frac{m}{2} + \frac{m^s}{4^s} + \alpha_m\right)} \times \\ &\times \left\{1 - \frac{2}{4^s m^{1-s}} - \frac{\alpha_m}{m}\right\}^{-\left(\frac{m}{2} - \frac{m^s}{4^s} - \alpha_m\right)} = d_m. \end{aligned}$$

Прологарифмируем последнее выражение:

$$\begin{aligned} \ln d_m &= -\left(\frac{m}{2} + \frac{m^s}{4^s} + \alpha_m\right) \ln \left(1 + \frac{2}{4^s m^{1-s}} + \frac{\alpha_m}{m}\right) - \\ &- \left(\frac{m}{2} - \frac{m^s}{4^s} - \alpha_m\right) \ln \left(1 - \frac{2}{4^s m^{1-s}} - \frac{\alpha_m}{m}\right), \end{aligned}$$

и, помня, что $1/2 < s < 2/3$, воспользуемся формулой Тейлора для обоих логарифмов:

$$\begin{aligned} \ln d_m &= - \left(\frac{m}{2} + \frac{m^s}{4^s} + \alpha_m \right) \left(\frac{2}{4^s m^{1-s}} - \frac{2}{16^s m^{2-2s}} + O(m^{-1}) \right) - \\ &\quad - \left(\frac{m}{2} - \frac{m^s}{4^s} - \alpha_m \right) \left(-\frac{2}{4^s m^{1-s}} - \frac{2}{16^s m^{2-2s}} + O(m^{-1}) \right) = \\ &= -\frac{4}{16^s} m^{2s-1} + O(1) \rightarrow -\infty \quad \text{при } m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Поскольку $\ln d_m \rightarrow -\infty$, получаем, что $d_m \rightarrow 0$, а значит, и $c_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. $\square$

2. Доказать, что в теореме Пуассона (с $p = \lambda/n$) имеет место следующая оценка:

$$\sup_k \left| P_n(k) - \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \right| \leq \frac{\lambda^2}{n}.$$

Решение. Обозначим через $\eta_1, \dots, \eta_n$ и $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ независимые случайные величины, имеющие соответственно пуассоновское распределение с параметром λ/n и бернуллиевское распределение с

$$P\{\zeta_i = 0\} = e^{\lambda/n} (1 - \lambda/n), \quad P\{\zeta_i = 1\} = 1 - e^{\lambda/n} (1 - \lambda/n).$$

Полагая

$$\xi_i = \begin{cases} 0, & \text{если } \eta_i = 0, \zeta_i = 0, \\ 1 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

замечаем, что $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые бернуллиевские величины,

$$P\{\xi_i = 0\} = 1 - \frac{\lambda}{n}, \quad P\{\xi_i = 1\} = \frac{\lambda}{n}$$

и $\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n$ имеет распределение $P\{\xi = k\} = P_n(k)$. Далее, поскольку сумма независимых пуассоновских величин есть пуассоновская величина с параметром, равным сумме параметров слагаемых, величина $\eta = \eta_1 + \dots + \eta_n$ имеет распределение Пуассона с параметром λ . Таким образом,

$$\left| P_n(k) - \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \right| = |P\{\xi = k\} - P\{\eta = k\}| \leq P\{\xi \neq \eta\}.$$

Для решения задачи остается показать, что $P\{\xi \neq \eta\} \leq \frac{\lambda^2}{n}$.

В силу неравенства Чебышёва получаем

$$P\{\xi \neq \eta\} = P(|\xi - \eta| \geq 1) \leq E(\xi - \eta)^2. \quad (*)$$

Поскольку $E\xi = \lambda = E\eta$, правая часть формулы (*) равна

$$\begin{aligned} D(\xi - \eta) &= \sum_{k=1}^n D(\xi_k - \eta_k) = \sum_{k=1}^n E(\xi_k - \eta_k)^2 = \\ &= \sum_{k=1}^n EI(\eta_k = 0)(\xi_k - \eta_k)^2 + \sum_{k=1}^n EI(\eta_k \neq 0)(\xi_k - \eta_k)^2 = \\ &= \sum_{k=1}^n EI(\eta_k = 0)\xi_k^2 + \sum_{k=1}^n EI(\eta_k \neq 0)(\eta_k - 1)^2. \quad (**) \end{aligned}$$

Поскольку ξ_k принимает лишь два значения, первая сумма в формуле (**) равна

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n EI(\eta_k = 0)I(\xi_k = 1) &= \sum_{k=1}^n P\{\eta_k = 0\} P\{\xi_k = 1\} = \\ &= \sum_{k=1}^n e^{-\lambda/n} (1 - e^{\lambda/n}(1 - \lambda/n)) = \lambda - n + ne^{-\lambda/n}. \end{aligned}$$

Вторую сумму из формулы (**) представим в виде

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n E(\eta_k - 1)^2 - \sum_{k=1}^n EI(\eta_k = 0)(\eta_k - 1)^2 &= \\ &= \sum_{k=1}^n (E\eta_k^2 - 2E\eta_k + 1) - \sum_{k=1}^n P\{\eta_k = 0\} = \\ &= \sum_{k=1}^n (D\eta_k + (E\eta_k)^2 - 2E\eta_k + 1) - \sum_{k=1}^n e^{-\lambda/n} = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda^2}{n^2} - 2\frac{\lambda}{n} + 1 \right) - ne^{-\lambda/n} = \lambda^2/n - \lambda + n - ne^{-\lambda/n}. \end{aligned}$$

Таким образом, выражение (**) равно λ^2/n , что и требовалось доказать. $\square$

3. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — н. о. р. случайные величины, $P\{\xi_k = 1\} = P\{\xi_k = -1\} = 1/2$ (симметричная схема Бернулли), $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ и $P_n(k) = P\{S_n = k\}$, где $k \in E_n = \{0, \pm 1, \dots, \pm n\}$.

Показать, основываясь на формуле полной вероятности, что справедливы следующие рекуррентные соотношения (являющиеся частным случаем уравнений Колмогорова—Чепмена, В.1.1.12):

$$P_{n+1}(k) = \frac{1}{2} P_n(k+1) + \frac{1}{2} P_n(k-1), \quad k \in E_{n+1}, \quad (*)$$

равносильные тому, что

$$P_{n+1}(k) - P_n(k) = \frac{1}{2} [P_n(k+1) - 2P_n(k) + P_n(k-1)]. \quad (**)$$

Решение. В силу формулы полной вероятности

$$\begin{aligned} P_{n+1}(k) &= P\{S_{n+1} = k\} = P\{S_{n+1} = k | \xi_{n+1} = -1\} P\{\xi_{n+1} = -1\} - \\ &\quad - P\{S_{n+1} = k | \xi_{n+1} = 1\} P\{\xi_{n+1} = 1\} = \\ &= \frac{1}{2} P\{S_n = k-1\} + \frac{1}{2} P\{S_n = k+1\} = \frac{1}{2} P_n(k+1) + \frac{1}{2} P_n(k-1). \end{aligned}$$

Равенство (*) доказано. Из него получаем равенство (**), вычитая из обеих частей $P_n(k)$. $\square$

4. (Продолжение задачи I.6.3.) Последовательность величин $S_0 = 0$, $S_1 = \xi_1$, $S_2 = \xi_1 + \xi_2$, ..., $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ можно рассматривать как *траекторию* случайного блуждания частицы, выходящей из нуля и перемещающейся в целочисленные моменты времени на единицу вверх или вниз.

Будем теперь предполагать, что блуждание происходит в моменты времени Δ , 2Δ , ..., $n\Delta$, где $\Delta > 0$, и при этом на каждом шаге частица сдвигается вверх или вниз на величину Δx . Вместо вероятностей $P_n(k) = P\{S_n = k\}$, введенных в предыдущей задаче, рассмотрим вероятности

$$P_{n\Delta}(k\Delta x) = P\{S_{n\Delta} = k\Delta x\}.$$

По аналогии с рекуррентными соотношениями (**) получаем, что

$$\begin{aligned} P_{(n+1)\Delta}(k\Delta x) - P_{n\Delta}(k\Delta x) &= \frac{1}{2} [P_{n\Delta}((k+1)\Delta x) - \\ &\quad - 2P_{n\Delta}(k\Delta x) + P_{n\Delta}((k-1)\Delta x)], \end{aligned}$$

т. е. «дискретная версия первой производной по времени» совпадает с точностью до множителя $\frac{1}{2}$ с «дискретной версией второй производной по пространственной переменной».

Положим $\Delta x = \sqrt{\Delta}$ и для $t > 0$ и $x \in \mathbb{R}$ будем осуществлять предельный переход по $n \rightarrow \infty$ и $k \rightarrow \infty$ так, что $n\Delta \rightarrow t$, $k\sqrt{\Delta} \rightarrow x$. Показать, что при таком предельном переходе

(а) существует предел $P_t(x) = \lim P_{n\Delta}(k\sqrt{\Delta})/\sqrt{\Delta}$;

(б) предельные функции $P_t(x)$ удовлетворяют «диффузионному» уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_t(x)}{\partial x^2} \quad (\text{Башелье, Эйнштейн}).$$

Решение. (а) В силу локальной предельной теоремы

$$P_t(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{P_{n\Delta}(k\sqrt{\Delta})}{\sqrt{\Delta}} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi n\Delta}} e^{-\frac{k^2}{2n}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}.$$

(б) Непосредственным подсчетом частных производных функции $P_t(x)$ из п. (а) данной задачи получаем

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = \frac{x^2 - t}{t^2 \sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}, \quad \frac{\partial^2 P_t(x)}{\partial x^2} = \frac{\sqrt{2}(x^2 - t)}{t^2 \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}.$$

Тем самым функции $P_t(x)$ удовлетворяют «диффузионному» уравнению теплопроводности. $\square$

5. В обобщение результатов предыдущей задачи предположим, что блуждающая частица с вероятностью $p(\Delta) = \frac{1}{2} + \Delta x$ смещается вверх на Δx и с вероятностью $q(\Delta) = \frac{1}{2} - \Delta x$ смещается вниз на Δx . Снова пусть $\Delta x = \sqrt{\Delta}$ и $n\Delta \rightarrow t$, $k\Delta x \rightarrow x$. Показать, что, как и в предыдущей задаче, существует предел $P_t(x) = \lim P_{n\Delta}(k\sqrt{\Delta})$, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = -2 \frac{\partial P_t(x)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_t(x)}{\partial x^2}. \quad (*)$$

Решение. В силу локальной предельной теоремы

$$\begin{aligned} P_t(x) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{P_{n\Delta}(k\sqrt{\Delta})}{\sqrt{\Delta}} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n\Delta(1/4 - \Delta x^2)}} e^{-\frac{(k/2 - n\Delta x)^2}{2n(1/4 - \Delta x^2)}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x - 2t)^2}{2t}}. \end{aligned}$$

Непосредственным подсчетом получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_t(x)}{\partial t} &= \frac{x^2 - 4t^2 - t}{t^2 \sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x - 2t)^2}{2t}}, \quad \frac{\partial P_t(x)}{\partial x} = -\frac{\sqrt{2}(x - 2t)}{t \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x - 2t)^2}{2t}}, \\ \frac{\partial^2 P_t(x)}{\partial x^2} &= \frac{\sqrt{2}(x^2 - 4tx + 4t^2 - t)}{t^2 \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x - 2t)^2}{2t}}. \end{aligned}$$

Подстановкой получаем, что уравнение (*) выполнено. $\square$

6. Что надо изменить в предельном переходе, сделанном в двух предыдущих задачах, чтобы предельная функция удовлетворяла уравнению

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = -\mu \frac{\partial P_t(x)}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 P_t(x)}{\partial x^2} \quad (*)$$

(называемому *уравнением Фоккера–Планка* или *прямым уравнением Колмогорова*)?

Решение. Предположим, что блуждающая частица с вероятностью $p(\Delta) = \frac{1}{2} + \Delta x \frac{\mu}{2\sigma^2}$ смещается вверх на Δx и с вероятностью $q(\Delta) = \frac{1}{2} - \Delta x \frac{\mu}{2\sigma^2}$ смещается вниз на Δx . Пусть $\Delta x = \sigma\sqrt{\Delta}$ и $n\Delta \rightarrow t$, $k\Delta x \rightarrow x$. Как и в предыдущей задаче, в силу локальной предельной теоремы существует предел

$$P_t(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{P_{n\Delta}(k\sqrt{\Delta})}{\sqrt{\Delta}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\mu t)^2}{2t\sigma^2}}.$$

Непосредственным подсчетом получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_t(x)}{\partial t} &= \frac{x^2 - \mu^2 t^2 - t\sigma^2}{t^2 \sigma^2 \sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-\mu t)^2}{2t\sigma^2}}, & \frac{\partial P_t(x)}{\partial x} &= -\frac{\sqrt{2}(x-\mu t)}{t\sigma^2 \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\mu t)^2}{2t\sigma^2}}, \\ \frac{\partial^2 P_t(x)}{\partial x^2} &= \frac{\sqrt{2}(x^2 - 2\mu t x + \mu^2 t^2 - t\sigma^2)}{t^2 \sigma^4 \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\mu t)^2}{2t\sigma^2}}. \end{aligned}$$

Подстановкой получаем, что уравнение (*) выполнено. $\square$

7. Пусть $F_n = F_n(t)$, $t \in [0, 1]$, $n \geq 1$, есть неубывающая функция удовлетворяющая условию $F_n(t) \rightarrow t$ для всех рациональных $t \in Q \cap [0, 1]$. Показать, что эта сходимость будет *равномерной*:

$$\sup_{t \in [0,1]} |F_n(t) - t| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Решение. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и возьмем $m > 1/\varepsilon$. Для достаточно больших n имеем $|F_n(i/m) - i/m| < \varepsilon$ для всех $i = 0, \dots, m$. Таким образом, в силу неубывания $F_n(t)$ для любого $t \in \left[\frac{i}{m}; \frac{i+1}{m}\right]$ получаем

$$F_n(t) - t \leq F_n\left(\frac{i+1}{m}\right) - \frac{i}{m} \leq \frac{i+1}{m} + \varepsilon - \frac{i}{m} < 2\varepsilon.$$

Аналогично доказывается, что для любого $t \in \left[\frac{i}{m}; \frac{i+1}{m}\right]$ выполнено неравенство $t - F_n(t) < 2\varepsilon$, а значит, $|F_n(t) - t| < 2\varepsilon$ для любого $t \in [0, 1]$. $\square$

8. Показать, что для $x > 0$ справедливы неравенства

$$\frac{x}{1+x^2} \varphi(x) < 1 - \Phi(x) < \frac{\varphi(x)}{x},$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ и $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(y) dy$.

Решение. Рассмотрим функции

$$f(x) := \frac{\varphi(x)}{x} + \Phi(x) - 1 \text{ и } g(x) := \frac{x}{1+x^2} \varphi(x) + \Phi(x) - 1.$$

Поскольку $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$ и $\Phi'(x) = \varphi(x)$, получаем, что

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-x^2\varphi(x) - \varphi(x)}{x^2} + \varphi(x) = -\frac{\varphi(x)}{x^2}, \\ g'(x) &= -\frac{x^2\varphi(x)}{1+x^2} + \frac{(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2} \varphi(x) + \varphi(x) = \frac{2\varphi(x)}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

Поскольку для любых положительных x выполнены неравенства $f'(x) < 0$ и $g'(x) > 0$, на $(0; +\infty)$ функция $f(x)$ убывает, а $g(x)$ возрастает.

Заметим, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, что вкупе с монотонностью гарантирует для любых $x \in (0; +\infty)$, что $f(x) > 0$ и $g(x) < 0$. $\square$

9. Показать, что для распределения Пуассона имеет место следующая локальная теорема: для каждого $k = 0, 1, 2, \dots$ и $\lambda \rightarrow \infty$ выполняется условие

$$\sqrt{\lambda} \left| \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \exp\left\{-\frac{1}{2\lambda}(k-\lambda)^2\right\} \right| \rightarrow 0.$$

Решение. Если внести $\sqrt{\lambda}$ под знак модуля, то уменьшаемое будет иметь вид $\frac{1}{k!} \lambda^{k+\frac{1}{2}} e^{-\lambda}$. Поскольку e^λ при $\lambda \rightarrow +\infty$ растет быстрее любой степенной функции, $\frac{1}{k!} \lambda^{k+\frac{1}{2}} e^{-\lambda} \rightarrow 0$.

Аналогично вычитаемое имеет вид $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{k^2}{2\lambda} + k\right) \exp\{-\lambda/2\}$. Первые два множителя ограничены при $\lambda \rightarrow \infty$, третий бесконечно мал. $\square$

§ 7. Оценка вероятности «успеха» в схеме Бернулли

1. Пусть априори известно, что параметр θ принимает значения в множестве $\Theta_0 \subseteq [0, 1]$. Выяснить, когда существует *несмещенная* оценка для параметра θ , принимающая значения лишь в этом множестве Θ_0 .

Решение. Пусть Θ_0 — одноточечное множество ($\Theta_0 = \{\theta_0\}$). Тогда $T_n \equiv \theta_0$ — несмещенная оценка для θ_0 .

Пусть Θ_0 состоит по крайней мере из двух точек. Покажем, что для существования несмещенной оценки для θ , принимающей значения из Θ_0 , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия: $\{0\} \in \Theta_0$ и $\{1\} \in \Theta_0$.

Достаточность. Рассмотрим $T_n = \xi_1$. С одной стороны, ξ_1 принимает значения 0 и 1, с другой стороны, $E_\theta \xi_1 = \theta$.

Необходимость. Предположим, что 0 не принадлежит Θ_0 и существует несмещенная оценка T_n . Поскольку T_n принимает конечное множество значений (не более 2^n), существует наименьшее значение, которое мы обозначим T_{n*} . Заметим, что T_{n*} не зависит от ω , принадлежит Θ_0 и не равно нулю.

В силу несмещенности оценки T_n при $\theta = T_{n*}$ верно равенство $E_\theta T_n = \theta = T_{n*}$. Однако

$$E_\theta T_n = \sum_{\omega} T_n(\omega) \theta^{\sum \omega_i} (1 - \theta)^{n - \sum \omega_i} \geq T_{n*} \sum_{\omega} \theta^{\sum \omega_i} (1 - \theta)^{n - \sum \omega_i} = T_{n*},$$

причем равенство достигается, если либо $T_n \equiv T_{n*} = \theta$ (что невозможно, поскольку Θ_0 содержит по крайней мере две точки), либо $\theta = 0$ (что противоречит предположению), либо $\theta = 1$ (тогда $T_n \equiv 1 = T_{n*}$). Противоречие.

Аналогично доказывается, что $1 \in \Theta_0$. $\square$

2. Критерий согласия χ^2 (хи-квадрат). Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые бернуллиевские случайные величины, $P\{\xi_i = 1\} = p$, $P\{\xi_i = 0\} = 1 - p$, $1 \leq i \leq n$. В настоящей задаче рассматривается вопрос о *проверке* по результатам наблюдений $x = (x_1, \dots, x_n)$ *гипотезы* $H_0: p = p_0$, т. е. гипотезы о том, что истинное значение параметра p равно заданному числу $0 < p_0 < 1$.

Пусть $S_n(\xi) = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Положим

$$\chi_n^2(\xi) = \frac{(S_n(\xi) - n p_0)^2}{n p_0 (1 - p_0)}.$$

В предположении справедливости гипотезы H_0 показать, что для всякого $x \geq 0$ выполняется соотношение

$$P\{\chi_n^2(\xi) \leq x\} \rightarrow \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2} dy, \quad n \rightarrow \infty.$$

(В соответствии с таблицей 3 в В1.П.3 функция $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2} dy$ есть функция распределения случайной величины χ^2 с одной степенью

свободы, т. е. функция распределения квадрата стандартной гауссовской случайной величины с параметрами 0 и 1.)

В основе *критерия согласия* χ^2 для проверки гипотезы $H_0: p = p_0$ лежат следующие соображения.

Выберем число $\varepsilon > 0$ столь малым, что практически можно быть уверенным, что в единичном опыте события, имеющие вероятность ε , происходят очень редко. (Скажем, если $\varepsilon = 0,01$, то согласно закону больших чисел можно считать, что в ста испытаниях событие, имеющее вероятность 0,01, встретится [«в среднем»] один раз.)

По выбранному $\varepsilon > 0$ найдем такое $\lambda(\varepsilon)$, что
$$\int_{\lambda(\varepsilon)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}y} e^{-y/2} dy = \varepsilon.$$

Проверку гипотезы $H_0: p = p_0$ производим (по критерию согласия χ^2) следующим образом: если величина $\chi_n^2(x)$, подсчитанная по наблюдениям $x = (x_1, \dots, x_n)$, превышает значение $\lambda(\varepsilon)$, то гипотеза H_0 отвергается, если же $\chi_n^2(x) \leq \lambda(\varepsilon)$, то гипотеза H_0 принимается, т. е. считается, что наблюдение $x = (x_1, \dots, x_n)$ согласуется с предположением $p = p_0$.

(а) Используя закон больших чисел (§ 5), привести аргументы, обосновывающие естественность (по крайней мере при больших значениях n) рекомендаций, предлагаемых критерием согласия χ^2 для проверки гипотезы $H_0: p = p_0$.

(б) Используя неравенство Берри—Эссеена (24) из В1.1.6, покажите, что (в предположении $p = p_0$)

$$\sup_x \left| P\{\chi_n^2(\xi) \leq x\} - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}y} e^{-y/2} dy \right| \leq \frac{2}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}.$$

(с) Пусть $\lambda_n(\varepsilon)$ определяется как наименьшее из таких λ , что $P\{\chi_n^2(\xi) > \lambda_n(\varepsilon)\} \leq \varepsilon$. Найдите скорость сходимости $\lambda_n(\varepsilon)$ к $\lambda(\varepsilon)$ и, тем самым, определите погрешность, возникающую при замене события « $\chi_n^2(\xi) \geq \lambda_n(\varepsilon)$ » на событие « $\chi_n^2(\xi) \geq \lambda(\varepsilon)$ », используемое в критерии согласия χ^2 .

Решение. При решении задачи будут использоваться результаты и формулы в круглых скобках из В1.1.6. Имеем

$$\begin{aligned} P(\chi^2(\xi) \leq x) &= P\left(\sqrt{x} \leq \frac{S_n(\xi) - ES_n(\xi)}{\sqrt{DS_n}} \leq \sqrt{x}\right) = \\ &= P\left(-\sqrt{x} < \frac{S_n(\xi) - ES_n(\xi)}{\sqrt{DS_n(\xi)}} \leq \sqrt{x}\right) + P\left(\frac{S_n(\xi) - ES_n(\xi)}{\sqrt{DS_n(\xi)}} = \sqrt{x}\right). \end{aligned}$$

Второе слагаемое сходится к нулю в силу формулы (7) (следствие из локальной предельной теоремы). Первое слагаемое в силу интегральной

теоремы Муавра—Лапласа при каждом $x > 0$ сходится к

$$\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = 2 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2} dy.$$

Последний переход получен заменой $y = t^2$.

(а) Пусть гипотеза H_0 неверна, т. е. $p = p_1 \neq p_0$. Тогда в силу формулы (44) для любого $\varepsilon > 0$ при $n > n_3(\varepsilon) = \left\lceil \frac{\ln(2/\varepsilon)}{2\varepsilon^2} \right\rceil$ с вероятностью $1 - \varepsilon$ будут выполнены соотношения

$$\left| \frac{S_n(\xi)}{n} - p_0 \right| \geq |p_1 - p_0| - \left| \frac{S_n(\xi)}{n} - p_1 \right| > |p_1 - p_0| - \varepsilon.$$

Взяв $\varepsilon < |p_1 - p_0|/2$, получаем

$$\chi_n^2(\xi) \geq \frac{n(p_1 - p_0)^2}{4p_0(1 - p_0)}.$$

Таким образом, если $\varepsilon < |p_1 - p_0|/2$, то при

$$n > \max \left\{ n_3(\varepsilon), \frac{4\lambda(\varepsilon)p_0(1 - p_0)}{(p_1 - p_0)^2} \right\}$$

величина $\chi_n^2(\xi)$ будет больше $\lambda(\varepsilon)$ с вероятностью $1 - \varepsilon$, т. е. гипотеза H_0 будет отвергнута.

(б) Сделав замену переменной $x = t^2$, получаем, что

$$\begin{aligned} \sup_x \left| P\{\chi_n^2(\xi) \leq x\} - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2} dy \right| &\leq \\ &\leq \sup_{t \geq 0} |F_n(t) - \Phi(t)| + \sup_{t \leq 0} |F_n(t) - \Phi(t)|, \end{aligned}$$

где $F_n(t)$ и $\Phi(t)$ определены в В1.1.6. В силу формулы (24) данная сумма не больше $\frac{2(p_0^2 + (1 - p_0)^2)}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}}$. Поскольку $p_0^2 + (1 - p_0)^2 \leq 1$, утверждение доказано.

(с) Определим $\lambda_*(\varepsilon, n)$ и $\lambda^*(\varepsilon, n)$ следующим образом:

$$\int_{\lambda_*(\varepsilon, n)}^{\lambda(\varepsilon)} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2} dy = \frac{2}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}}$$

и

$$\int_{\lambda(\varepsilon)}^{\lambda^*(\varepsilon, n)} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2} dy = \frac{2}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}}.$$

Тогда в силу п. (b) имеем

$$\lambda_*(\varepsilon, n) \leq \lambda_n(\varepsilon) \leq \lambda^*(\varepsilon, n).$$

Покажем, что при каждом ε выполняются неравенства

$$\begin{aligned} |\lambda^*(\varepsilon, n) - \lambda(\varepsilon)| &\leq \frac{2C^*(\varepsilon)}{\sqrt{n}} + o(n^{-1/2}), \\ |\lambda(\varepsilon) - \lambda_*(\varepsilon, n)| &\leq \frac{2C_*(\varepsilon)}{\sqrt{n}} + o(n^{-1/2}). \end{aligned}$$

Докажем первое неравенство, второе доказывается аналогично. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\lambda(\varepsilon)}^{\lambda^*(\varepsilon, n)} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2} dy &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi \lambda(\varepsilon)}} \int_{\lambda(\varepsilon)}^{\lambda^*(\varepsilon, n)} e^{-y/2} dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \lambda(\varepsilon)}} 2 \left\{ e^{-\frac{\lambda(\varepsilon)}{2}} - e^{-\frac{\lambda^*(\varepsilon, n)}{2}} \right\} = \frac{2e^{-\frac{\lambda(\varepsilon)}{2}}}{\sqrt{2\pi \lambda(\varepsilon)}} \left\{ 1 - e^{\frac{\lambda(\varepsilon) - \lambda^*(\varepsilon, n)}{2}} \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$e^{\frac{\lambda(\varepsilon) - \lambda^*(\varepsilon, n)}{2}} \geq 1 - \frac{C^*(\varepsilon)}{\sqrt{n}}, \quad \text{где } C^*(\varepsilon) = \sqrt{\frac{2\pi \lambda(\varepsilon)}{p_0(1-p_0)}} e^{\lambda(\varepsilon)/2}.$$

Логарифмируя данное неравенство, получаем требуемое утверждение. $\square$

3. Пусть ξ — случайная величина, имеющая биномиальное распределение,

$$P_\theta\{\xi = k\} = C_n^k \theta^k (1-\theta)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n,$$

где n — заданное число и θ — «неизвестный параметр», который требуется оценить по (единственному) наблюдению над этой случайной величиной ξ .

Стандартной оценкой θ является оценка $T(\xi) = \xi/n$, которая обладает свойством несмещенности: для всех значений $\theta \in [0, 1]$ справедливо равенство

$$E_\theta T(\xi) = \theta.$$

Показать, что в классе несмещенных оценок $\tilde{T} = \tilde{T}(\xi)$ эта оценка является эффективной:

$$E_\theta(T(\xi) - \theta)^2 = \inf_{\tilde{T}} E_\theta(\tilde{T}(\xi) - \theta)^2.$$

Показать также, что если $n = 3$ и а priori известно, что $\theta \in \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$, то оценка $\hat{T}(\xi) \equiv \frac{1}{2}$, являющаяся *смещенной* при любом $\theta \neq \frac{1}{2}$, будет «лучше», чем несмещенная оценка $T(\xi) = \frac{\xi}{3}$:

$$E_{\theta}[\hat{T}(\xi) - \theta]^2 < E_{\theta}[T(\xi) - \theta]^2,$$

т. е.

$$E_{\theta}\left[\frac{1}{2} - \theta\right]^2 < E_{\theta}\left[\frac{\xi}{3} - \theta\right]^2.$$

Рассмотреть вопрос о справедливости аналогичного результата для любого n .

Решение. Распределение случайной величины ξ можно рассматривать как распределение суммы независимых одинаково распределенных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$, где $P_{\theta}\{\xi_1 = 1\} = \theta$, $P_{\theta}\{\xi_1 = 0\} = 1 - \theta$.

Как показано в В1.1.7,

$$D_{\theta}T_n^* = \inf_{T_n} D_{\theta}T_n,$$

где $T_n^* = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} = \frac{\xi}{n} = T(\xi)$ и $T_n = T(\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Класс оценок, построенных по ξ , уже класса оценок, построенных по $\xi_1, \dots, \xi_n$, поэтому

$$D_{\theta}T(\xi) = D_{\theta}T_n^* = \inf_{\tilde{T}} D_{\theta}\tilde{T}(\xi).$$

Теперь сравним при любом n величины

$$E_{\theta}\left(\frac{1}{2} - \theta\right)^2 \quad \text{и} \quad E_{\theta}(T(\xi) - \theta)^2,$$

когда $\theta \in (1/4; 3/4)$.

$$E_{\theta}\left(\frac{1}{2} - \theta\right)^2 = \theta^2 - \theta + \frac{1}{4} \in \left[0; \frac{1}{16}\right].$$

Имеем

$$\begin{aligned} E_{\theta}(T(\xi) - \theta)^2 &= D_{\theta}T(\xi) = \frac{1}{n^2} D_{\theta} \sum_{k=1}^n \xi_k = \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n D_{\theta}\xi_k = \frac{1}{n} \theta(1 - \theta) \in \left(\frac{3}{16n}; \frac{4}{16n}\right]. \end{aligned}$$

Таким образом, при $n = 3$ верно, что для любого $\theta \in (1/4; 3/4)$ выполнено неравенство

$$E_{\theta} \left[\frac{1}{2} - \theta \right]^2 < E_{\theta} \left[\frac{\xi}{3} - \theta \right]^2.$$

При $n > 3$ это уже неверно. $\square$

4. Два корректора А и В в результате чтения корректуры обнаружили соответственно a и b опечаток, из которых c оказались общими. Предполагая, что корректоры работали независимо друг от друга, дайте «разумную» оценку числа оставшихся необнаруженными опечаток.

Решение. Рассмотрим следующую статистическую модель. Проводится $2n$ независимых испытаний Бернулли $\xi_1, \dots, \xi_{2n}$. Событие $\{\xi_{2k} = 1\}$ означает, что корректор А заметил k -ю опечатку, $\{\xi_{2k-1} = 1\}$ — корректор В заметил k -ю опечатку, $k = 1, \dots, n$.

Поскольку n велико, можно считать, что $p_a = P\{\xi_1 = 1\} = a/n$ и $p_b = P\{\xi_2 = 1\} = b/n$.

В силу независимости вероятность того, что оба корректора заметят одну и ту же опечатку, есть $p_a p_b = \frac{ab}{n^2}$. С другой стороны, доля опечаток, которые заметили оба корректора, равна c/n , поэтому при больших n можно считать, что $\frac{ab}{n^2} = \frac{c}{n}$, т. е. $n = ab/c$.

По формуле включения-исключения число оставшихся необнаруженными опечаток есть

$$n - a - b + c = \frac{ab}{c} - a - b + c. \quad \square$$

§ 8. Условные вероятности и математические ожидания относительно разбиений

1. Привести пример двух случайных величин ξ и η , которые не являются независимыми, но для которых

$$E(\xi|\eta) = E\xi.$$

Решение. Рассматривается пространство элементарных исходов $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $P(\omega_1) = P(\omega_2) = 1/4$, $P(\omega_3) = 1/2$. Случайные величины ξ и η зададим поточечно:

$$\xi(\omega_1) = 1, \quad \xi(\omega_2) = -1, \quad \xi(\omega_3) = 0; \quad \eta(\omega_1) = \eta(\omega_2) = 1, \quad \eta(\omega_3) = 0.$$

Поскольку $P(\xi = 0; \eta = 0) = P(\xi = 0) = P(\eta = 0) = 1/2$, случайные величины ξ и η зависимы, $E\xi = 0$.

Случайная величина η порождает разбиение $\mathcal{D} = \{D_1, D_2\}$, $D_1 = \{\omega_1, \omega_2\}$, $D_2 = \{\omega_3\}$. В силу определения $E(\xi | D_i) = 0$, $i = 1, 2$. Значит, $E(\xi | \eta) = 0 = E\xi$. $\square$

2. Условной дисперсией случайной величины ξ относительно разбиения $\mathcal{D}$ называется случайная величина

$$D(\xi | \mathcal{D}) = E[(\xi - E(\xi | \mathcal{D}))^2 | \mathcal{D}].$$

Показать, что

$$D\xi = ED(\xi | \mathcal{D}) + DE(\xi | \mathcal{D}).$$

Решение. Раскрывая скобки и вынося $\mathcal{D}$ -измеримые случайные величины из-под знака математического ожидания, получаем

$$\begin{aligned} D(\xi | \mathcal{D}) &= E\left(\xi^2 - 2\xi E(\xi | \mathcal{D}) + [E(\xi | \mathcal{D})]^2 \mid \mathcal{D}\right) = \\ &= E(\xi^2 | \mathcal{D}) - 2[E(\xi | \mathcal{D})]^2 + [E(\xi | \mathcal{D})]^2 = E(\xi^2 | \mathcal{D}) - [E(\xi | \mathcal{D})]^2, \end{aligned}$$

и тогда $ED(\xi | \mathcal{D}) = E\xi^2 - E[E(\xi | \mathcal{D})]^2$. В силу формулы для вычисления дисперсии

$$DE(\xi | \mathcal{D}) = E[E(\xi | \mathcal{D})]^2 - [E(E(\xi | \mathcal{D}))]^2 = E[E(\xi | \mathcal{D})]^2 - (E\xi)^2.$$

Из последних двух равенств следует утверждение задачи. $\square$

3. Доказать, что для всякой функции $f = f(\eta)$ условное математическое ожидание $E(\xi | \eta)$ обладает следующим свойством:

$$E[f(\eta)E(\xi | \eta)] = E[\xi f(\eta)].$$

Решение. Поскольку функция $f(\eta)$ является $\mathcal{D}_\eta$ -измеримой,

$$f(\eta) \cdot E(\xi | \eta) = E(\xi \cdot f(\eta) | \eta).$$

Если мы посчитаем математическое ожидание от обеих частей равенства, то получим утверждение задачи. $\square$

4. Пусть ξ и η — случайные величины. Показать, что $\inf_f E(\eta - f(\xi))^2$ достигается на функции $f^*(\xi) = E(\eta | \xi)$. (Таким образом, оптимальной в среднеквадратическом смысле оценкой η по ξ является условное математическое ожидание $E(\eta | \xi)$.)

Решение. Для произвольной функции $f = f(x)$ получаем

$$\begin{aligned} E(\eta - f(\xi))^2 &= E[(\eta - f^*(\xi)) + (f^*(\xi) - f(\xi))]^2 = \\ &= E(\eta - f^*(\xi))^2 + 2E[(\eta - f^*(\xi))(f^*(\xi) - f(\xi))] + E(f^*(\xi) - f(\xi))^2. \quad (*) \end{aligned}$$

Используя свойство $E(\cdot) = E(E(\cdot|\xi))$ и возможность выносить $\mathscr{D}_\xi$ -измеримые случайные величины из-под знака $E(\cdot|\xi)$, получаем, что среднее слагаемое в формуле (*) равно нулю, а значит,

$$E(\eta - f(\xi))^2 \geq E(\eta - f^*(\xi))^2. \quad \square$$

5. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n, \tau$ — независимые случайные величины, причем величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ одинаково распределены, а τ принимает значения $1, \dots, n$. Показать, что если $S_\tau = \xi_1 + \dots + \xi_\tau$ — сумма случайного числа случайных величин, то

$$E(S_\tau | \tau) = \tau E\xi_1, \quad D(S_\tau | \tau) = \tau D\xi_1$$

и

$$ES_\tau = E\tau \cdot E\xi_1, \quad DS_\tau = E\tau \cdot D\xi_1 + D\tau \cdot (E\xi_1)^2.$$

Решение. Поскольку

$$1 = \sum_{k=1}^n I(\tau = k) \quad \text{и} \quad E(\xi_i | \tau) = E\xi_1, \quad i = 1, \dots, n,$$

получаем, что

$$\begin{aligned} E(S_\tau | \tau) &= E\left(\sum_{k=1}^n I(\tau = k) S_k | \tau\right) = \sum_{k=1}^n I(\tau = k) E(S_k | \tau) = \\ &= \sum_{k=1}^n I(\tau = k) k E\xi_1 = \tau E\xi_1. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что $D(S_\tau | \tau) = \tau D\xi_1$. Далее,

$$ES_\tau = E[E(S_\tau | \tau)] = E(\tau \cdot E\xi_1) = E\tau \cdot E\xi_1.$$

В силу задачи I.8.2 имеем

$$\begin{aligned} DS_\tau &= ED(S_\tau | \tau) + DE(S_\tau | \tau) = \\ &= E(\tau D\xi_1) + D(\tau \cdot E\xi_1) = E\tau D\xi_1 + D\tau (E\xi_1)^2. \quad \square \end{aligned}$$

6. Пусть случайная величина ξ и разбиение $\mathscr{D}$ независимы (т. е. для любого $D \in \mathscr{D}$ случайные величины ξ и I_D независимы). Доказать, что тогда $E(\xi | \mathscr{D}) = E\xi$.

Решение. По определению

$$\begin{aligned} E(\xi | \mathcal{D})(\omega) &= \sum_{i=1}^k E(\xi | D_i) I_{D_i}(\omega) = \sum_{i=1}^k \frac{E(\xi I_{D_i})}{P(D_i)} I_{D_i}(\omega) = \\ &= \sum_{i=1}^k I_{D_i}(\omega) E\xi = E\xi, \end{aligned}$$

где предпоследний переход верен в силу независимости величин ξ и I_{D_i} . $\square$

7. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — некоторое дискретное вероятностное пространство и $\xi = \xi(\omega)$ — случайная величина, принимающая значения $x_1, \dots, x_k$ с вероятностями $P\{\xi = x_i\} = p_i$. *Энтропией* случайной величины ξ (или эксперимента $\mathcal{E}_\xi$, состоящего в наблюдениях значений ξ) называется величина

$$H(\xi) = - \sum_{i=1}^k p_i \log_2 p_i$$

Если (ξ, η) — пара случайных величин и $P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} = p_{ij}$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, l$, то *энтропия* $H(\xi, \eta)$ этой пары определяется аналогичным образом:

$$H(\xi, \eta) = - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l p_{ij} \log_2 p_{ij}.$$

Показать, что если ξ и η независимы, то

$$H(\xi, \eta) = H(\xi) + H(\eta).$$

Решение. Для удобства обозначений положим $p_i := P(\xi = x_i)$, $i = 1, \dots, k$; $q_j := P(\eta = y_j)$, $j = 1, \dots, l$.

В силу независимости

$$\begin{aligned} H(\xi, \eta) &= - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l p_{ij} \log_2 p_{ij} = \\ &= - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l p_i q_j (\log_2 p_i + \log_2 q_j) = \\ &= - \sum_{i=1}^k p_i \log_2 p_i \cdot \sum_{j=1}^l q_j - \sum_{i=1}^k p_i \cdot \sum_{j=1}^l q_j \log_2 q_j = H(\xi) + H(\eta). \quad \square \end{aligned}$$

8. Пусть (ξ, η) — пара случайных величин, принимающих значения (x_i, y_j) , $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, l$.

Условной энтропией случайной величины η относительно события $\{\xi = x_i\}$ называется величина

$$H_{x_i}(\eta) = - \sum_{j=1}^l P\{\eta = y_j | \xi = x_i\} \log_2 P\{\eta = y_j | \xi = x_i\}.$$

Средняя условная энтропия случайной величины η относительно ξ определяется формулой

$$H_{\xi}(\eta) = \sum_{i=1}^k P\{\xi = x_i\} H_{x_i}(\eta).$$

Показать, что

(a) $H(\xi, \eta) = H(\xi) + H_{\xi}(\eta)$;

(b) если ξ и η независимы, то

$$H(\xi, \eta) = H(\xi) + H(\eta);$$

(c) $0 \leq H_{\xi}(\eta) \leq H(\eta)$.

Решение. (a) Имеем

$$\begin{aligned} H_{\xi}(\eta) &= \sum_{i=1}^k P\{\xi = x_i\} H_{x_i}(\eta) = \\ &= - \sum_{i=1}^k P\{\xi = x_i\} \sum_{j=1}^l P\{\eta = y_j | \xi = x_i\} \log_2 P\{\eta = y_j | \xi = x_i\} = \\ &= - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l P\{\eta = y_j; \xi = x_i\} \times \\ &\quad \times (\log_2 P\{\eta = y_j; \xi = x_i\} - \log_2 P\{\xi = x_i\}) = \\ &= - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l p_{ij} \log_2 p_{ij} + \sum_{i=1}^k \log_2 p_i \sum_{j=1}^l p_{ij} = H(\xi, \eta) - H(\xi). \end{aligned}$$

(b) Доказано в задаче 1.8.7.

(c) В силу п. (a) данной задачи достаточно доказать, что $H(\xi, \eta) \leq H(\xi) + H(\eta)$. В силу того что $\sum_i p_{ij} = q_j$ и $\sum_j p_{ij} = p_i$, верны следу-

ющие преобразования:

$$\begin{aligned}
 H(\xi, \eta) - H(\xi) - H(\eta) &= \\
 &= \sum_{i=1}^k p_i \log_2 p_i + \sum_{j=1}^l q_j \log_2 q_j - \sum_i^k \sum_{j=1}^l p_{i,j} \log_2 p_{i,j} = \\
 &= \sum_i^k \sum_{j=1}^l p_{i,j} (\log_2 p_i + \log_2 q_j - \log_2 p_{i,j}) = \sum_i^k \sum_{j=1}^l p_{i,j} \log_2 \frac{p_i q_j}{p_{i,j}}.
 \end{aligned}$$

В силу известного неравенства $\ln x \leq x - 1$, верного для любого положительного x , получаем, что последняя величина не превосходит

$$c \sum_i^k \sum_{j=1}^l p_{i,j} \left(\frac{p_i q_j}{p_{i,j}} - 1 \right) = c \sum_i^k \sum_{j=1}^l (p_i q_j - p_{i,j}) = 0,$$

где $c = \log_2 e$. □

9. Пусть (ξ, η) — пара случайных величин. Величина

$$I_\xi(\eta) = H(\eta) - H_\xi(\eta),$$

называется *количеством информации* относительно η , содержащейся в ξ . Терминология оправдывается тем, что разность $H(\eta) - H_\xi(\eta)$ показывает, насколько знание случайной величины ξ может уменьшить неопределенность $H(\eta)$ величины η .

Показать, что

(a) $I_\xi(\eta) = I_\eta(\xi) \geq 0$;

(b) $I_\xi(\eta) = H(\eta)$ в том и только том случае, когда η есть некоторая функция от ξ ;

(c) если ξ, η и ζ — случайные величины, то

$$I_{(\xi, \zeta)}(\eta) = H(\eta) - H_{(\xi, \zeta)}(\eta) \geq I_\xi(\eta),$$

т. е. пара (ξ, ζ) содержит относительно η не меньшую информацию, нежели только случайная величина ξ .

Решение. (a) Утверждение следует из задачи I.8.8(a).

(b) Имеем $I_\xi(\eta) = H(\eta) \Leftrightarrow H_\xi(\eta) = 0 \Leftrightarrow H_{x_i}(\eta) = 0, i = 1, \dots, k \Leftrightarrow \mathbf{P}\{\eta = y_j | \xi = x_i\} = 0$ или 1 для любых $i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, l \Leftrightarrow$ либо $\{\xi = x_i\} \subseteq \{\eta = y_j\}$, либо $\{\xi = x_i\} \cap \{\eta = y_j\} = \emptyset$ для любых $i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, l$. Последнее означает, что случайная величина ξ образует более мелкое разбиение, чем η , а это значит, что $\eta = f(\xi)$.

(с) Имеем $I_{(\xi, \zeta)}(\eta) \geq I_{\xi}(\eta) \Leftrightarrow H_{(\xi, \zeta)}(\eta) \leq H_{\xi}(\eta)$. Последнее неравенство выполнено, если для любого $i = 1, \dots, k$ верно неравенство

$$\sum_{r=1}^m P\{\xi = x_i; \zeta = z_r\} H_{x_i, z_r}(\eta) \leq P\{\xi = x_i\} H_{x_i}(\eta),$$

где

$$H_{x_i, z_r}(\eta) = - \sum_{j=1}^l P\{\eta = y_j | \xi = x_i, \zeta = z_r\} \log_2 P\{\eta = y_j | \xi = x_i, \zeta = z_r\},$$

что доказывается так же, как и задача I.8.8(с). $\square$

10. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — н. о. р. бернуллиевские величины, $P\{\xi_i = 1\} = p$, $P\{\xi_i = 0\} = 1 - p$, и пусть $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Показать, что

$$(a) P(\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n | S_n = k) = \frac{I_{\{x\}}(k)}{C_n^x},$$

$$(b) P(S_n = x | S_{n+m} = k) = \frac{C_n^x C_m^{k-x}}{C_{n+m}^k},$$

где $x = x_1 + \dots + x_n$, $x_i = 0, 1$, и $x \leq k$.

Решение. (a) Имеем

$$\begin{aligned} P(\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n | S_n = k) &= \frac{P(\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n, S_n = k)}{P(S_n = k)} = \\ &= \frac{I_x(k) p^k q^{n-k}}{C_n^k p^k q^{n-k}} = \frac{I_{\{x\}}(k)}{C_n^x}. \end{aligned}$$

(b) Аналогично имеем

$$\begin{aligned} P(S_n = x | S_{n+m} = k) &= \frac{P(S_n = x, S_{n+m} - S_n = k - x)}{P(S_{n+m} = k)} = \\ &= \frac{P(S_n = x) P(S_{n+m} - S_n = k - x)}{P(S_{n+m} = k)} = \\ &= \frac{C_n^x p^x q^{n-x} \cdot C_m^{k-x} p^{k-x} q^{m-k+x}}{C_{n+m}^k p^k q^{n+m-k}} = \frac{C_n^x C_m^{k-x}}{C_{n+m}^k}. \quad \square \end{aligned}$$

§ 9. Случайное блуждание. I. Вероятность разорения и средняя продолжительность при игре с бросанием монеты

В данном параграфе будет рассматриваться симметричное случайное блуждание. Все обозначения согласованы с обозначениями из

В1.1.9. Формулы, ссылки в круглых скобках, которые будут появляться в данном параграфе, взяты оттуда же.

1. Показать, что справедливы следующие формулы:

$$ES_{\tau_n^x}^x = x + (p - q)E\tau_n^x, \quad E[S_{\tau_n^x}^x - \tau_n^x E\xi_1]^2 = D\xi_1 \cdot E\tau_n^x + x^2.$$

Решение. В силу определения (1) имеем

$$\begin{aligned} \tau_n^x &= \min \{0 \leq l \leq n: S_l^x = A \text{ или } B\} = \\ &= \min \{0 \leq l \leq n: S_l = A - x \text{ или } B - x\}. \end{aligned}$$

Обозначим последнее выражение за τ_n' ; если же

$$A - x < S_l < B - x \quad \text{для любого } l, 0 \leq l \leq n,$$

то положим $\tau_n' = n$. Тогда τ_n' есть момент остановки для случайного блуждания, вышедшего из нуля, с границами

$$A - x \leq 0 \quad \text{и} \quad B - x \geq 0.$$

В силу формулы (33) имеем

$$ES_{\tau_n'} = (p - q)E\tau_n'.$$

В силу определения $S_{\tau_n^x}^x$ и тождества $\tau_n' = \tau_n^x$ имеем

$$ES_{\tau_n^x}^x = E(x + S_{\tau_n^x}^x) = x + ES_{\tau_n'} = x + (p - q)E\tau_n' = x + (p - q)E\tau_n^x.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} E[S_{\tau_n^x}^x - \tau_n^x E\xi_1]^2 &= E[x + (S_{\tau_n'} - \tau_n' E\xi_1)]^2 = \\ &= x^2 + 2xE(S_{\tau_n'} - \tau_n' E\xi_1) + E(S_{\tau_n'} - \tau_n' E\xi_1)^2. \end{aligned}$$

В силу первого утверждения задачи второе слагаемое равно нулю, и в силу формулы (34) имеем

$$E(S_{\tau_n'} - \tau_n' E\xi_1)^2 = D\xi_1 E\tau_n' = D\xi_1 E\tau_n^x. \quad \square$$

2. Исследовать вопрос о том, к чему стремятся величины $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $m(x)$, когда $A \downarrow -\infty$.

Решение. Используя выражения для $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $m(x)$ через p , q , A , B и x (формулы (10), (13) и (26)) и тот факт, что $\lim_{A \rightarrow -\infty} y^A = \infty$

при $0 < y < 1$ и $\lim_{A \rightarrow -\infty} y^A = 0$ при $y > 1$, получаем

$$\begin{aligned}
 \lim_{A \rightarrow -\infty} \alpha(x) &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \begin{cases} \frac{(q/p)^B - (q/p)^x}{(q/p)^B - (q/p)^A}, & p \neq q, \\ \frac{B-x}{B-A}, & p = q, \end{cases} = \\
 &= \begin{cases} 0, & p \geq q, \\ \frac{(q/p)^B - (q/p)^x}{(q/p)^B}, & p < q, \end{cases} \\
 \lim_{A \rightarrow -\infty} \beta(x) &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \begin{cases} \frac{(q/p)^x - (q/p)^A}{(q/p)^B - (q/p)^A}, & p \neq q, \\ \frac{x-A}{B-A}, & p = q, \end{cases} = \\
 &= \begin{cases} 1, & p \geq q, \\ (q/p)^{x-B}, & p < q, \end{cases} \\
 \lim_{A \rightarrow -\infty} m(x) &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \begin{cases} \frac{1}{p-q} (B\beta(x) + A\alpha(x) - x), & p \neq q, \\ (B-x)(x-A), & p = q, \end{cases} = \\
 &= \begin{cases} \frac{B-x}{p-q}, & p > q, \\ \infty, & p \leq q. \end{cases} \quad \square
 \end{aligned}$$

3. Пусть в схеме Бернулли $p = q = 1/2$. Показать, что

$$E|S_n| \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} n, \quad n \rightarrow \infty. \quad (*)$$

Решение. Убедимся в том, что при $n \geq 1$ имеет место следующая формула («дискретная версия формулы Танака»):

$$|S_n| = \sum_{k=1}^n \text{sign}(S_{k-1}) \Delta S_k + N_n, \quad (**)$$

где $S_0 = 0$, $S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$, $\Delta S_k = \xi_k$,

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

и $N_n = \#\{0 \leq k \leq n-1 : S_k = 0\}$ — число тех k , $0 \leq k \leq n-1$, для которых $S_k = 0$.

Имеем

$$|S_n| = \begin{cases} S_n, & S_{n-1} > 0, \\ 1, & S_{n-1} = 0, \\ -S_n, & S_{n-1} < 0, \end{cases}$$

т. е.

$$|S_n| = |S_{n-1}| + \text{sign}(S_{n-1})\Delta S_n + I_{\{S_{n-1}=0\}}.$$

Поскольку $|S_1| = 1$, применяя метод математической индукции, получаем требуемое равенство (**).

Поскольку $\text{sign}(S_{k-1})$ и ΔS_k независимы и $E\Delta S_k = 0$, из формулы (**) получаем, что

$$E|S_n| = EN_n = E \sum_{k=0}^{n-1} I(S_k = 0) = \sum_{k=0}^{n-1} P\{S_k = 0\}. \quad (***)$$

Далее, $P\{S_{2k} = 0\} = 2^{-2k}C_{2k}^k$ и $P\{S_{2k-1} = 0\} = 0$, значит, из формулы (***) следует, что

$$EN_n = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} 2^{-2k}C_{2k}^k,$$

где $[x]$ — целая часть числа $x \in \mathbb{R}$. Для получения формулы (*) осталось применить формулу Стирлинга:

$$\sum_{k < n/2} 2^{-2k}C_{2k}^k \sim \sum_{k < n/2} \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \sim \int_1^{n/2} \frac{dx}{\sqrt{\pi x}} \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}. \quad \square$$

4. Два игрока независимым образом подбрасывают (каждый свою) симметричные монеты. Показать, что вероятность того, что у них после n подбрасываний будет одно и то же число гербов, равна $2^{-2n} \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2$. Вывести отсюда равенство

$$\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n.$$

Пусть σ_n — тот первый момент, когда число гербов у одного игрока совпадает с числом гербов у другого (совершается n подбрасываний, и $\sigma_n = n + 1$, если указанного момента не существует). Найти вероятности $P\{\sigma_n = k\}$, $1 \leq k \leq n + 1$, и математические ожидания $E \min(\sigma_n, n)$.

Решение. Пусть $\xi_i^{(k)} = 1$ (или -1), если у игрока с номером $k = 1, 2$ на i -м шаге выпал герб (или решетка). Тогда

$$\begin{aligned} P\left\{\begin{array}{c} \text{число выпавших у игроков гербов} \\ \text{после } n \text{ бросаний совпадает} \end{array}\right\} &= P\left\{\sum_{i=1}^n \xi_i^{(1)} = \sum_{i=1}^n \xi_i^{(2)}\right\} = \\ &= \sum_{j=0}^n P\left\{\sum_{i=1}^n \xi_i^{(1)} = 2j - n, \sum_{i=1}^n \xi_i^{(2)} = 2j - n\right\} = \sum_{j=0}^n 2^{-2n} (C_n^j)^2 \end{aligned}$$

и

$$P\left\{\sum_{i=1}^n \xi_i^{(1)} = \sum_{i=1}^n \xi_i^{(2)}\right\} = P\left\{\sum_{i=1}^{2n} \eta_i = 0\right\} = 2^{-2n} C_{2n}^n,$$

где $\eta_1 = \xi_1^{(1)}$, $\eta_2 = -\xi_1^{(2)}$, $\eta_3 = \xi_2^{(1)}$, $\eta_4 = \xi_2^{(2)}$, ...

Обозначим $S_k := \sum_{i=1}^k \eta_i$, $k = 1, \dots, 2n$. Тогда

$$P\{\sigma_n = k\} = P\{S_{2k} = 0, S_{2i} \neq 0, i = 1, \dots, k-1\}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (*)$$

Поскольку на нечетных шагах блуждание S_k не может попасть в нуль, $(*)$ есть вероятность первого возвращения в нуль на шаге $2k$ симметричного случайного блуждания, таким образом, в силу формулы (2) из В1.1.10 имеем

$$P\{\sigma_n = k\} = \frac{1}{2^{2k-2} 2k} C_{2k-2}^{k-1}.$$

При $\sigma_n = n+1$ блуждание S_k ни разу не возвращается в нуль, т. е.

$$P\{\sigma_n = n+1\} = P\{S_1 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0\} = 2^{-2n} C_{2n}^n.$$

Последнее равенство верно в силу задачи I.5.8:

$$\begin{aligned} E \min(\sigma_n, n) &= \sum_{k=1}^n k \frac{1}{2^{2k-2} 2k} C_{2k-2}^{k-1} + n \cdot 2^{-2n} C_{2n}^n = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-2k} C_{2k}^k + n \cdot 2^{-2n} C_{2n}^n. \end{aligned}$$

Заметим, что в силу задачи I.9.3 можно записать

$$E \min(\sigma_n, n) = E|S_{2n}| + n \cdot 2^{-2n} C_{2n}^n. \quad \square$$

5. Пусть $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_N$ — бернуллиевские независимые случайные величины, $P\{\xi_i = 1\} = P\{\xi_i = -1\} = 1/2$, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ и $X_n = \xi_0(-1)^{S_n} -$

дискретный телеграфный сигнал, $1 \leq n \leq N$. Найти среднее значение и дисперсию величин X_n .

Найти также условные распределения $P\{X_n = 1 | \xi_0 = i\}$, $i = \pm 1$, $1 \leq n \leq N$.

Решение. Поскольку случайные величины ξ_0 и $(-1)^{S_n}$ независимы и $E\xi_0 = 0$, получаем, что

$$EX_n = E(\xi_0(-1)^{S_n}) = E\xi_0 E(-1)^{S_n} = 0.$$

Поскольку $X_n^2 \equiv 1$, имеем

$$DX_n = EX_n^2 - (EX_n)^2 = 1.$$

Заметим, что $(-1)^{S_n} \equiv (-1)^n$, поэтому

$$\begin{aligned} P\{X_n = 1 | \xi_0 = 1\} &= P\{(-1)^n = 1 | \xi_0 = 1\} = \begin{cases} 1, & n \text{ четно,} \\ 0, & n \text{ нечетно;} \end{cases} \\ P\{X_n = 1 | \xi_0 = -1\} &= P\{(-1)^n = -1 | \xi_0 = -1\} = \begin{cases} 0, & n \text{ четно,} \\ 1, & n \text{ нечетно.} \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

6. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_N$ — бернуллиевские независимые случайные величины, $P\{\xi_i = 1\} = p$, $P\{\xi_i = -1\} = 1 - p$, $S_i = \xi_1 + \dots + \xi_i$, $1 \leq i \leq N$, $S_0 = 0$. Пусть $\mathcal{R}_N$ — *размах*, т. е. число различных точек, посещаемых блужданием $S_0, S_1, \dots, S_N$.

Найти $E\mathcal{R}_N$. Выяснить, при каких значениях p для величины $\mathcal{R}_N$ справедлив закон больших чисел в форме

$$P\left\{\left|\frac{\mathcal{R}_N}{N} - c\right| > \varepsilon\right\} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty,$$

где $\varepsilon > 0$ и c — некоторая константа.

Решение. Представим $\mathcal{R}_N$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_N &= 1 + I(S_1 \neq 0) + I(S_2 \neq 0, S_2 \neq S_1) + \dots \\ &\quad \dots + I(S_N \neq 0, S_N \neq S_1, \dots, S_N \neq S_{N-1}). \end{aligned}$$

Обозначим $V_n^N = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_{N-k}$, тогда

$$\mathcal{R}_N = 1 + I(V_1^1 \neq 0) + I(V_1^2 \neq 0, V_2^2 \neq 0) + \dots + I(V_1^N \neq 0, \dots, V_N^N \neq 0).$$

Поскольку

$$P\{V_1^i \neq 0, \dots, V_i^i \neq 0\} = P\{S_1 \neq 0, \dots, S_i \neq 0\}, \quad i = 1, \dots, N,$$

получаем, что

$$\mathbb{E}\mathcal{R}_N = 1 + \sum_{k=1}^N \mathbb{P}\{S_1 \neq 0, \dots, S_k \neq 0\}.$$

Заметим, что на нечетных шагах S_k не может обращаться в нуль, поэтому

$$\mathbb{E}\mathcal{R}_N = 1 + \sum_{k=1}^{[N/2]} \mathbb{P}\{S_2 \neq 0, \dots, S_{2k} \neq 0\}.$$

Для симметричного случайного блуждания в силу задач I.5.8 и I.9.3 имеем

$$\mathbb{E}\mathcal{R}_N = 1 + \sum_{k=1}^{[N/2]} 2^{-2k} C_{2k}^k \sim \sqrt{\frac{2N}{\pi}}.$$

Вследствие задачи II.10.3 верна сходимость п. н.

$$\frac{\mathcal{R}_N}{N} \rightarrow \mathbb{P}\{S_n \neq 0, n \geq 0\}. \quad \square$$

7. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_N$ — одинаково распределенные случайные величины (не обязательно бернуллиевские), $S_0 = 0$, $S_i = \xi_1 + \dots + \xi_i$, $1 \leq i \leq N$.

Пусть

$$N_n = \sum_{k=1}^n I(S_k > 0)$$

— число положительных членов в последовательности $S_0, S_1, \dots, S_n$. Показать, что справедлив следующий результат (Спарре—Андерсен):

$$\mathbb{P}\{N_n = k\} = \mathbb{P}\{N_k = k\}\mathbb{P}\{N_{n-k} = 0\}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Решение. Обозначим

$$B = \{s \in \mathbb{R}^n: s_i > 0, i \leq k, \text{ и } s_i \leq s_k, k < i\}$$

и $S = (S_1, \dots, S_n)$. Тогда в силу независимости

$$\mathbb{P}(N_k = k)\mathbb{P}(N_{n-k} = 0) = \mathbb{P}(S \in B).$$

Для произвольной перестановки π чисел $1, 2, \dots, n$ положим

$$S[\pi] = (S_i[\pi])_{i=0}^n, \quad S_i[\pi] = \xi_{\pi(1)} + \dots + \xi_{\pi(i)}.$$

Имеем

$$\mathbb{P}(N_n = k) = \sum_b \mathbb{P}(S \in A_b),$$

где $A_b = \{s \in \mathbb{R}^n : I(s_i > 0) = b_i, i \leq n\}$, а суммирование ведется по всем векторам b , состоящим из $n - k$ нулей и k единиц. Заметим, что если $S \in A_b$, то $S[\pi_b] \in B$, где

$$\pi_b(i) = \begin{cases} \sum_{j \leq i} b_j, & b_i = 1, \\ k + i - \sum_{j \leq i} b_j, & b_i = 0. \end{cases}$$

Отсюда, учитывая, что $\xi_1, \dots, \xi_n$ распределены симметрично, получаем

$$\sum_b P(S \in A_b) = \sum_b P(S \in A_b, S[\pi_b] \in B) = \sum_b P(S[\pi_b^{-1}] \in A_b, S \in B).$$

Осталось показать, что последняя сумма равна $P(S \in B)$. Это вытекает из следующего утверждения: каждому исходу, для которого $S \in B$, соответствует единственный двоичный вектор b с k единицами, удовлетворяющий условию $S[\pi_b^{-1}] \in A_b$.

Построим b рекуррентно. Рассмотрим $a = (I(S_1 > 0), \dots, I(S_n > 0))$. Поскольку $S \in B$, вектор a содержит не менее k единиц. Если в a ровно k единиц, то положим $b = a$. В противном случае выберем число l из условия $(a_l, a_{l+1}, \dots, a_n) = (1, 0, \dots, 0)$. Зададим $(b_l, b_{l+1}, \dots, b_n) = (1, 0, \dots, 0)$. Далее перейдем к урезанным векторам $b' = (b_1, \dots, b_{l-1})$ и

$$a' = (I(S_1 > 0), \dots, I(S_{k-1} > 0), I(S_{k+1} > \xi_k), \dots, I(S_l > \xi_k)).$$

В a' не менее $k - 1$ единиц. Проводя те же рассуждения, что и выше, определим последние компоненты b' .

Так будем делать до тех пор, пока не зададим b полностью. Построенный вектор b удовлетворяет всем необходимым свойствам (проверку этого оставляем читателю). $\square$

§ 10. Случайное блуждание. II. Принцип отражения. Закон арксинуса

В данном параграфе будет рассматриваться симметричное случайное блуждание. Все обозначения согласованы с обозначениями из В1.1.10. Формулы, а также ссылки в круглых скобках, которые будут появляться в данном параграфе, взяты отсюда же.

1. С какой скоростью $E \min(\sigma_{2n}, 2n)$ стремится к ∞ при $n \rightarrow \infty$? (Здесь $\sigma_{2n} = \min\{1 \leq k \leq 2n : S_k = 0\}$ и мы полагаем $\sigma_{2n} = \infty$ (или $\sigma_{2n} = 2n$), если $S_k \neq 0$ при всех $1 \leq k \leq 2n$.)

Решение. Согласно п. 1 из В1.1.10 имеем

$$\begin{aligned} E \min(\sigma_{2n}, 2n) &= \sum_{k=1}^n u_{2(k-1)} + 2nu_{2n} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-2k} C_{2k}^k + 2n \cdot 2^{-2n} C_{2n}^n. \quad (*) \end{aligned}$$

В силу формулы Стирлинга $2n \cdot 2^{-2n} C_{2n}^n \sim 2\sqrt{n\pi^{-1}}$, и в силу задачи I.9.3 первое слагаемое в формуле (*) эквивалентно $2\sqrt{n\pi^{-1}}$. Значит, $E \min(\sigma_{2n}, 2n)$ эквивалентно $4\sqrt{n\pi^{-1}}$. $\square$

2. Пусть $\tau_n = \min\{1 \leq k \leq n: S_k = 1\}$ и $\tau_n = \infty$, если $S_k < 1$ при всех $1 \leq k \leq n$. Показать, что

$$E \min(\tau_n, n) \rightarrow \begin{cases} (p-q)^{-1}, & p > q, \\ \infty, & p \leq q. \end{cases}$$

Решение. Имеем

$$E \min \{\tau_n, n\} = \sum_{1 \leq 2k+1 \leq n} P \{\tau_n = 2k+1\} (2k+1) + nP \{\tau_n = \infty\} \quad (*)$$

и

$$\begin{aligned} P \{\tau_n = 2k+1\} &= P\{S_1 < 1, \dots, S_{2k} < 1, S_{2k+1} = 1\} = \\ &= P\{S_1 < 1, \dots, S_{2k-1} < 1, S_{2k} = 0, S_{2k+1} = 1\}. \end{aligned}$$

В силу задачи I.1.4 число путей, которые выходят из точки $(0; 0)$ и приходят в точку $(2k; 0)$, при этом оставаясь ниже прямой $y=0$ или касаясь ее, есть число Каталана

$$C_{k+1} = (k+1)^{-1} C_{2k}^k.$$

Значит,

$$P \{\tau_n = 2k+1\} = (k+1)^{-1} C_{2k}^k p^{k+1} q^k.$$

При $p = q = 1/2$ имеем

$$\sum_{1 \leq 2k+1 \leq n} P \{\tau_n = 2k+1\} (2k+1) \geq \frac{1}{2} \sum_{1 \leq 2k+1 \leq n} C_{2k}^k 2^{-2k} \sim \sqrt{\frac{n}{\pi}};$$

последний переход верен в силу задачи I.9.3. Значит, при $p = q = 1/2$ имеем $E \min \{\tau_n, n\} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть $p \neq q$, тогда

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq 2k+1 \leq n} P \{ \tau_n = 2k+1 \} (2k+1) &= \sum_{1 \leq 2k+1 \leq n} \frac{2k+1}{k+1} C_{2k}^k p^{k+1} q^k = \\ &= 2 \sum_{1 \leq 2k+1 \leq n} C_{2k}^k p^{k+1} q^k - \sum_{1 \leq 2k+1 \leq n} \frac{1}{k+1} C_{2k}^k p^{k+1} q^k. \quad (**) \end{aligned}$$

В силу задачи I.1.5(е) имеем

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k+1} C_{2k}^k x^{k+1} = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1-4x}) \quad \text{при } |x| \leq \frac{1}{4}. \quad (***)$$

Продифференцировав степенной ряд, получаем:

$$\sum_{k \geq 0} C_{2k}^k x^k = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \quad \text{при } |x| < \frac{1}{4}.$$

Рассмотрим $x = pq$, тогда выражение (**) стремится при $n \rightarrow \infty$ к

$$\frac{2p}{\sqrt{1-4pq}} - \frac{1 - \sqrt{1-4pq}}{2q} = \frac{1 - |p - q|}{2q|p - q|}.$$

Рассмотрим теперь вопрос о сходимости второго слагаемого в формуле (*) $nP \{ \tau_n = \infty \}$. В силу соотношения (***) получаем

$$\begin{aligned} P \{ \tau_n = \infty \} &= 1 - \sum_{1 \leq 2k+1 \leq n} P \{ \tau_n = 2k+1 \} = \\ &= 1 - \sum_{1 \leq 2k+1 \leq n} \frac{1}{k+1} C_{2k}^k p^{k+1} q^k \rightarrow \\ &\rightarrow 1 - \frac{1 - \sqrt{1-4pq}}{2q} = 1 - \frac{1 - |p - q|}{2q} \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

При $q > p$ последнее выражение равно $1 - p/q \neq 0$, значит,

$$nP \{ \tau_n = \infty \} \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad E \min \{ \tau_n, n \} \rightarrow \infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Пусть $q < p$. Докажем, что

$$nP \{ \tau_n = \infty \} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

В силу предыдущих рассуждений

$$nP \{ \tau_n = \infty \} = n \sum_{2k+1 > n} \frac{1}{k+1} C_{2k}^k p^{k+1} q^k \leq 2 \sum_{2k+1 > n} C_{2k}^k p^{k+1} q^k. \quad (****)$$

По формуле Стирлинга $C_{2k}^k = 2^{2k} e^{\theta(k)} (\sqrt{\pi k})^{-1}$, где $\theta(k) < 1$. Тогда правая часть в формуле (****) есть

$$\sum_{2k+1 > n} \frac{2p}{\sqrt{\pi k}} (4pq)^k e^{\theta(k)} \leq C \sum_{k \geq n} (4pq)^k = C \frac{(4pq)^n}{1-4pq} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

□

3. Основываясь на идеях и методах, изложенных в В1.1.10, показать, что для *симметричного* ($p = q = 1/2$) случайного блуждания Бернулли $\{S_k, k \leq n\}$, $S_0 = 0$, $S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$, имеют место следующие формулы (N — натуральное число):

$$(a) \ P\left\{\max_{1 \leq k \leq n} S_k \geq N, S_n < N\right\} = P\{S_n > N\},$$

$$(b) \ P\left\{\max_{1 \leq k \leq n} S_k \geq N\right\} = 2P\{S_n \geq N\} - P\{S_n = N\},$$

$$(c) \ P\left\{\max_{1 \leq k \leq n} S_k = N\right\} = P\{S_n = N\} + P\{S_n = N+1\} = 2^{-n} C_n^{\left[\frac{n+N+1}{2}\right]},$$

$$(d) \ P\left\{\max_{1 \leq k \leq n} S_k \leq 0\right\} = P\{S_n = 0\} + P\{S_n = 1\} = 2^{-n} C_n^{\lfloor n/2 \rfloor},$$

$$(e) \ P\left\{\max_{1 \leq k \leq n-1} S_k \leq 0, S_n > 0\right\} = P\{S_1 \neq 0, \dots, S_n \neq 0, S_{n+1} = 0\},$$

$$(f) \ P\{S_1 > 0, \dots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 0\} = \frac{1}{n} 2^{-2n} C_{2n-2}^{n-1},$$

$$(g) \ P\{S_1 \geq 0, \dots, S_{2n-1} \geq 0, S_{2n} = 0\} = \frac{1}{n+1} 2^{-2n} C_{2n}^n.$$

Показать также, что формулы

$$P\{S_{2n} = 2k\} = 2^{-2n} C_{2n}^{n-k}, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm n,$$

и

$$P\{S_{2n+1} = 2k+1\} = 2^{-2n-1} C_{2n+1}^{n-k}, \quad k = -(n+1), 0, \pm 1, \dots, \pm n,$$

могут быть записаны единым образом в таком виде:

$$(h) \quad P\{S_n = k\} = \begin{cases} 2^{-n} C_n^{(n-k)/2}, & \text{если } k \equiv n \pmod{2}, \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

где $k = 0, \pm 1, \dots, \pm n$.

В дополнение к данной выше формуле для $P\left\{\max_{1 \leq k \leq n} S_k = N\right\}$ при натуральных N , показать, что

$$(i) \quad P\left\{\max_{0 \leq k \leq n} S_k = r\right\} = C_n^{\lfloor (n-r)/2 \rfloor} \cdot 2^{-n}$$

для $r = 0, 1, \dots, n$.

Решение. (а) Обозначим через $\mathcal{G}_1$ множество таких путей, что $\{ \max_{1 \leq k \leq n} S_k \geq N, S_n < N \}$, и через $\mathcal{G}_2$ множество таких путей, что $\{ S_n > N \}$. Построим взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$, что докажет требуемую формулу. Рассмотрим путь $A = (S_1, \dots, S_n) \in \mathcal{G}_1$, $S_n = m < N$. Пусть $l := \max \{ 1 \leq k \leq n : S_k = N \}$ — последнее пересечение уровня N , $l < n$.

Отразим часть траектории $A(S_l, \dots, S_n)$ относительно горизонтальной прямой $y = N$. Полученная траектория A' приходит в точку $2N - m$, а значит, принадлежит $\mathcal{G}_2$. Обратное отображение строится аналогично.

(b) Используя п. (а), получаем

$$\begin{aligned} P\left\{ \max_{1 \leq k \leq n} S_k \geq N \right\} &= P\left\{ \max_{1 \leq k \leq n} S_k \geq N, S_n \geq N \right\} + \\ &\quad + P\left\{ \max_{1 \leq k \leq n} S_k \geq N, S_n < N \right\} = \\ &= P\{S_n \geq N\} + P\{S_n > N\} = 2P\{S_n \geq N\} - P\{S_n = N\}. \end{aligned}$$

(с) Используя п. (b), получаем

$$\begin{aligned} P\left\{ \max_{1 \leq k \leq n} S_k = N \right\} &= P\left\{ \max_{1 \leq k \leq n} S_k \geq N \right\} - P\left\{ \max_{1 \leq k \leq n} S_k \geq N + 1 \right\} = \\ &= 2P\{S_n \geq N\} - P\{S_n = N\} - 2P\{S_n \geq N + 1\} + P\{S_n = N + 1\} = \\ &= P\{S_n = N\} + P\{S_n = N + 1\}. \end{aligned}$$

Если числа n и N одинаковой четности, то $P\{S_n = N + 1\} = 0$ и $P\{S_n = N\} = 2^{-n} C_n^{(n+N)/2}$, иначе $P\{S_n = N\} = 0$ и $P\{S_n = N + 1\} = 2^{-n} C_n^{(N+n+1)/2}$, т. е.

$$P\{S_n = N\} + P\{S_n = N + 1\} = 2^{-n} C_n^{\left\lfloor \frac{n+N+1}{2} \right\rfloor}.$$

(d) Используя п. (b), получаем

$$\begin{aligned} P\left\{ \max_{1 \leq k \leq n} S_k \leq 0 \right\} &= 1 - P\left\{ \max_{1 \leq k \leq n} S_k \geq 1 \right\} = \\ &= 1 - 2P\{S_n \geq 1\} + P\{S_n = 1\}. \quad (*) \end{aligned}$$

В силу симметрии $P\{S_n \geq 1\} = P\{S_n \leq -1\}$, и, значит, $2P\{S_n \geq 1\} = 1 - P\{S_n = 0\}$. Тогда правая часть формулы (*) равна $P\{S_n = 0\} + P\{S_n = 1\}$, что по аналогии с п. (с) равно $2^{-n} C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

(е) Имеем

$$\left\{ \max_{1 \leq k \leq n-1} S_k \leq 0, S_n > 0 \right\} = \left\{ \max_{1 \leq k \leq n-1} S_k \leq 0, S_n = 1 \right\}. \quad (**)$$

Если всякую траекторию $A = (S_1, \dots, S_n)$, для которой выполнено условие (**), сдвинуть на позицию вниз и вправо и дополнить отрезком с концами в точках $(0; 0)$ и $(1; -1)$, то получим такую траекторию $A' = (S'_1, \dots, S'_{n+1})$, что $S_1 < 0, \dots, S_n < 0, S_{n+1} = 0$. Обратное соответствие аналогично. Тогда

$$P\left\{\max_{1 \leq k \leq n-1} S_k \leq 0, S_n = 1\right\} = 2P\{S_1 < 0, \dots, S_n < 0, S_{n+1} = 0\}.$$

В силу симметрии

$$P\{S_1 < 0, \dots, S_n < 0, S_{n+1} = 0\} = \frac{1}{2}P\{S_1 \neq 0, \dots, S_n \neq 0, S_{n+1} = 0\}.$$

(f) В силу симметрии и формул (1), (2) из В1.I.10 имеем

$$\begin{aligned} P\{S_1 > 0, \dots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 0\} = \\ = \frac{1}{2}P\{S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0\} = \frac{1}{2}P\{\sigma_{2n} = 2n\} = \frac{1}{n}2^{-2n}C_{2n-2}^{n-1}. \end{aligned}$$

(g) Если каждую траекторию $A = (S_1, \dots, S_n)$, для которой $S_1 \geq 0, \dots, S_{2n-1} \geq 0, S_{2n} = 0$, сдвинуть на позицию вверх и вправо и дополнить отрезками, соединяющими $(0; 0)$ с $(1; 1)$ и $(2n+1; 1)$ с $(2n+2, 0)$, то получим такую траекторию $A' = (S'_1, \dots, S'_{2n+2})$, что $S'_1 > 0, \dots, S'_{2n+1} > 0, S'_{2n+2} = 0$. Обратное соответствие строится аналогично. Поскольку каждая траектория длины $2n+2$ в четыре раза менее вероятна, чем траектория длины $2n$, в силу п. (e) получаем

$$\begin{aligned} P\{S_1 \geq 0, \dots, S_{2n-1} \geq 0, S_{2n} = 0\} = \\ = 4P\{S_1 > 0, \dots, S_{2n+1} > 0, S_{2n+2} = 0\} = \frac{1}{n+1}2^{-2n}C_{2n}^n. \end{aligned}$$

(h) Формула для $P\{S_n = k\}$ проверяется непосредственно рассмотрением случаев для четности $n - k$.

(i) Формула $n - \left[\frac{n+r+1}{2}\right] = \left[\frac{n-r}{2}\right]$ проверяется непосредственно рассмотрением случаев для четности $n - r$. Тогда при положительных r формула

$$P\left\{\max_{0 \leq k \leq n} S_k = r\right\} = 2^{-n}C_n^{\left[\frac{n-r}{2}\right]}$$

следует из п. (c). Проверим ее при $r = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} P\left\{\max_{0 \leq k \leq n} S_k = 0\right\} = \\ = 1 - \sum_{r=1}^n P\left\{\max_{0 \leq k \leq n} S_k = r\right\} = 1 - \sum_{r=1}^n 2^{-n}C_n^{\left[\frac{n-r}{2}\right]}. \quad (***) \end{aligned}$$

По свойству биномиальных коэффициентов $C_n^k = C_n^{n-k}$ получаем

$$\sum_{r=1}^n C_n^{\left[\frac{n-r}{2}\right]} = \begin{cases} \sum_{m=0}^{(n-2)/2} C_n^m + \sum_{m=(n+2)/2}^n C_n^m, & \text{если } n \text{ четно,} \\ \sum_{m=0}^{(n-1)/2} C_n^m + \sum_{m=(n+3)/2}^n C_n^m, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Воспользовавшись тем, что $1 = 2^{-n} \sum_{m=0}^n C_n^m$, из формулы (***) получаем требуемое равенство. $\square$

4. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_{2n}$ — независимые бернуллиевские случайные величины, $P\{\xi_k = 1\} = P\{\xi_k = -1\} = 1/2$, $k \leq 2n$. Положим $S_0 = 0$, $S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$, и пусть

$$g_{2n} = \max\{0 < 2k \leq 2n: S_{2k} = 0\}$$

— момент *последнего нуля* в последовательности $(S_2, S_4, \dots, S_{2n})$; если такого момента нет, то полагаем $g_{2n} = 0$.

Показать, что

$$P\{g_{2n} = 2k\} = u_{2n} u_{2(n-k)}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

где $u_{2k} = P\{S_{2k} = 0\} = 2^{-2k} C_{2k}^k$.

Замечание. Сопоставляя распределение для g_{2n} с вероятностью $P_{2k,2n}$ того, что на отрезке $[0, 2n]$ блуждающая «частица» проводит $2k$ единиц времени на положительной оси (см. формулу (12) в В1.1.10), видим, что, как и в формуле (15) из В1.1.10, для $0 < x < 1$ выполняется соотношение

$$\sum_{\left\{k: 0 < \frac{k}{n} \leq x\right\}} P\{g_{2n} = 2k\} \rightarrow \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}, \quad n \rightarrow \infty,$$

т. е. распределение вероятностей положения последнего нуля асимптотически удовлетворяет закону арксинуса.

Решение. При $k = 0$ формула следует из формулы (9), при $k = n$ — из формулы (1). Пусть $1 < k < n$. Тогда

$$\begin{aligned} P\{g_{2n} = 2k\} &= P\{S_{2k} = 0, S_{2k+1} \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0\} = \\ &= P\{S_{2k} = 0, \xi_{2k+1} \neq 0, \dots, \xi_{2k+1} + \dots + \xi_{2n} \neq 0\} = \\ &= P\{S_{2k} = 0\} P\{S'_1 \neq 0, \dots, S'_{2n-2k} \neq 0\}, \end{aligned}$$

где $S'_i = \xi_{2k+1} + \dots + \xi_{2k+i}$, $i = 1, \dots, 2n - 2k$.

В силу соотношения (1) имеем $P\{S_{2k} = 0\} = u_{2k}$, в силу соотношения (9) имеем $P\{S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-2k} \neq 0\} = u_{2n-2k}$. $\square$

5. В условиях предыдущей задачи обозначим через θ_{2n} положение первого максимума последовательности $S_0, S_1, \dots, S_{2n}$, т. е. $\theta_{2n} = k$, если $S_0 < S_k, \dots, S_{k-1} < S_k$, а $S_{k+1} \leq S_k, \dots, S_{2n} \leq S_k$; если такого $k > 1$ нет, то полагаем $\theta_{2n} = 0$.

Показать, что

$$(a) P\{\theta_{2n} = 0\} = u_{2n}, \quad (b) P\{\theta_{2n} = 2n\} = \frac{1}{2} u_{2n}$$

и для $0 < k < n$ выполняется соотношение

$$(c) P\{\theta_{2n} = 2k \text{ или } 2k + 1\} = \frac{1}{2} u_{2k} u_{2n-2k}.$$

Как и в предыдущей задаче, для положения максимума справедлив закон арксинуса: для $0 < x < 1$ выполняется соотношение

$$\sum_{\left\{k: 0 < \frac{k}{n} \leq x\right\}} P\{\theta_{2n} = 2k \text{ или } 2k + 1\} \rightarrow \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Решение. (a) Имеем

$$P\{\theta_{2n} = 0\} = P\{S_1 \leq 0, \dots, S_{2n} \leq 0\}.$$

В силу симметрии последняя вероятность равна $P\{S_1 \geq 0, \dots, S_{2n} \geq 0\}$, что в силу формулы (11) равно u_{2n} .

(b) Пусть траектория $A = (S_0, \dots, S_{2n})$, $S_{2n} = l$, такова, что $\theta_{2n} = 2n$. Отразим A относительно прямой $x = 0$ и перенесем начало координат в точку $(-2n, l)$. Получим такую траекторию $A' = (S'_0, \dots, S'_{2n})$, что $S'_1 < 0, \dots, S'_{2n} < 0$. Обратное соответствие строится аналогично.

В силу симметрии и формул (10) и (11) получаем

$$P\{S'_1 < 0, \dots, S'_{2n} < 0\} = P\{S'_1 > 0, \dots, S'_{2n} > 0\} = u_{2n}/2.$$

(c) Здесь

$$\begin{aligned} P\{\theta_{2n} = 2k\} &= \\ &= P\{S_1 < S_{2k}, \dots, S_{2k-1} < S_{2k}, \xi_{2k+1} \leq 0, \dots, \xi_{2k+1} + \xi_{2n} \leq 0\} = \\ &= P\{\theta_{2k} = 2k\} P\{S'_1 \leq 0, \dots, S'_{2n-2k} \leq 0\}, \end{aligned}$$

где $S'_i = \xi_{2k+1} + \dots + \xi_{2k+i}$, $i = 1, \dots, 2n - 2k$. В силу п. (b) и соотношения (11) имеем $P\{\theta_{2n} = 2k\} = u_{2k} u_{2n-2k}/2$.

Имеем

$$\begin{aligned}
 P\{\theta_{2n} = 2k + 1\} &= \\
 &= P\{S_1 < S_{2k+1}, \dots, S_{2k} < S_{2k+1}, \xi_{2k+2} \leq 0, \dots, \xi_{2k+2} + \xi_{2n} \leq 0\} = \\
 &= P\{S_1 \leq S_{2k}, \dots, S_{2k-1} \leq S_{2k}, \xi_{2k+1} = 1, \xi_{2k+2} \leq 0, \dots \\
 &\quad \dots, \xi_{2k+2} + \xi_{2n} \leq 0\} = \\
 &= \frac{1}{2} P\{S_1 \leq S_{2k}, \dots, S_{2k-1} \leq S_{2k}\} P\{S_1'' \leq 0, \dots, S_{2n-2k-1}'' \leq 0\},
 \end{aligned}$$

где $S_i'' = \xi_{2k+2} + \dots + \xi_{2k+i}$, $i = 1, \dots, 2n - 2k - 1$.

Поскольку на нечетном шаге S_i'' не может обращаться в нуль, в силу симметрии и соотношения (11) получаем

$$P\{S_1'' \leq 0, \dots, S_{2n-2k-1}'' \leq 0\} = P\{S_1'' \leq 0, \dots, S_{2n-2k}'' \leq 0\} = u_{2n-2k}.$$

Для доказательства формулы осталось показать, что

$$P\{S_1 \leq S_{2k}, \dots, S_{2k-1} \leq S_{2k}\} = u_{2k}. \quad (*)$$

Следуя рассуждениям из п. (b), получаем, что

$$P\{S_1 \leq S_{2k}, \dots, S_{2k-1} \leq S_{2k}\} = P\{S_1 \leq 0, \dots, S_{2k} \leq 0\}.$$

Последняя вероятность в силу симметрии и соотношения (11) равна u_{2k} , что и доказывает равенство (*). $\square$

6. Пусть $S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$, $k \leq 2n$, где $\xi_1, \dots, \xi_{2n}$ — н. о. р. случайные величины, $P\{\xi_1 = 1\} = P\{\xi_1 = -1\} = 1/2$. Показать, что

(a) для $r = \pm 1, \dots, \pm n$ выполняется равенство

$$P\{S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 2r\} = C_{2n}^{n+r} \frac{|r|}{n} 2^{-2n},$$

(b) для $r = 0, \pm 1, \dots, \pm n$ выполняется равенство

$$P\{S_{2n} = 2r\} = C_{2n}^{n-r} 2^{-2n}.$$

Решение. В силу симметрии и свойства биномиальных коэффициентов $C_{2n}^{n-r} = C_{2n}^{n+r}$ достаточно доказать обе формулы только для положительных r .

(a) Имеем

$$\begin{aligned}
 P\{S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 2r\} &= \\
 &= P\{S_1 > 0, \dots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 2r\}.
 \end{aligned}$$

Требуемое равенство следует из соотношения (5), если взять $a = n + r$, $b = n - r$.

(b) Равенство следует из задачи I.10.3(h).

7. Пусть $\{S_k, k \leq n\}$, $S_0 = 0$, $S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$, — симметричное случайное блуждание Бернулли (с такими независимыми одинаково распределенными величинами $\xi_1, \dots, \xi_n$, что $P\{\xi_1 = 1\} = P\{\xi_1 = -1\} = 1/2$). Пусть

$$M_n = \max_{0 \leq k \leq n} S_k, \quad m_n = \min_{0 \leq k \leq n} S_k.$$

Показать, что

$$(M_n, -m_n, -S_n) \stackrel{d}{=} (-m_n, M_n, S_n) \stackrel{d}{=} (M_n - S_n, S_n - m_n, S_n),$$

где « $\stackrel{d}{=}$ » означает совпадение соответствующих троек случайных величин по распределению. $\square$

Решение. Пусть p, r, t — произвольные значения случайных величин. Покажем, что между траекториями типа $\mathcal{G}_1$, которые принадлежат множеству $\{m_n = -p, M_n = r, S_n = t\}$, и траекториями типа $\mathcal{G}_2$, принадлежащими множеству $\{M_n = p, m_n = -r, S_n = -t\}$, можно установить взаимно однозначное соответствие. Действительно, если для каждой траектории типа $\mathcal{G}_1$ провести симметрию относительно прямой $y = 0$, то получим траекторию типа $\mathcal{G}_2$, и наоборот. Значит,

$$\begin{aligned} P\{-m_n = p, M_n = r, S_n = t\} &= P\{m_n = -p, M_n = r, S_n = t\} = \\ &= P\{M_n = p, m_n = -r, S_n = -t\} = P\{M_n = p, -m_n = r, -S_n = t\}. \end{aligned}$$

Построим взаимно однозначное соответствие между траекториями типа $\mathcal{G}_1$ и траекториями типа $\mathcal{G}_3$, для которых $M_n - S_n = p$, $S_n - m_n = r$, $S_n = t$. Для этого каждую траекторию типа $\mathcal{G}_3$ надо опустить на t позиций вниз, провести центральную симметрию с центром в точке $(n/2; 0)$, и мы получим траекторию типа $\mathcal{G}_1$. Обратным преобразованием из каждой траектории типа $\mathcal{G}_1$ получаем тип $\mathcal{G}_3$. Значит,

$$\begin{aligned} P\{M_n - S_n = p, S_n - m_n = r, S_n = t\} &= \\ &= P\{m_n = -p, M_n = r, S_n = t\} = \\ &= P\{-m_n = p, M_n = r, S_n = t\}. \quad \square \end{aligned}$$

8. Пусть $S_0 = 0$ и $S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$, $k \geq 1$, где $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые случайные величины, $P\{\xi_k = 1\} = p$, $P\{\xi_k = -1\} = q$, $p + q = 1$. Показать, что для $m \leq N$ справедливо равенство

$$P\left\{\max_{1 \leq k \leq n} S_k \geq N, S_n = m\right\} = C_n^u p^v q^{n-v},$$

где $u = N + (n - m)/2$ и $v = (n + m)/2$, и вывести отсюда, что в случае $p = q = 1/2$ выполняется равенство

$$P\left\{\max_{1 \leq k \leq n} S_k = N, S_n = m\right\} = P\{S_n = 2N - m\} - P\{S_n = 2N - m + 2\}.$$

Решение. Поскольку $p^v q^{n-v}$ есть вероятность конкретной траектории, приходящей в точку $(n; m)$, для доказательства формулы достаточно показать, что число траекторий типа

$$\mathcal{G}_1 := \{A = (S_0, \dots, S_n): \max_{1 \leq k \leq n} S_k \geq N, S_n = m\}$$

равно C_n^u , где $u = N + (n - m)/2$. Построим взаимно однозначное соответствие между траекториями типа $\mathcal{G}_1$ и траекториями типа

$$G_2 := \{B = (S'_0, \dots, S'_n): S'_n = 2N - m\}.$$

Для каждой траектории $A \in \mathcal{G}_1$ существует момент

$$k := \max\{1 \leq l \leq n: S_l = N\}.$$

Отобразим часть траектории A $(S_{k+1}, \dots, S_n)$ относительно прямой $y = N$. Для новой траектории $A' = (S'_0, \dots, S'_n)$ имеем $S'_n = 2N - m$. Обратное соответствие строится аналогично. Число траекторий, приходящих в точку $(n; 2N - m)$, есть C_n^v , что доказывает первую формулу.

Из предыдущих рассуждений, в частности, следует, что для симметричного случайного блуждания верна формула

$$P\left\{\max_{1 \leq k \leq n} S_k \geq N, S_n = m\right\} = P\{S_n = 2N - m\},$$

и, значит,

$$\begin{aligned} P\left\{\max_{1 \leq k \leq n} S_k = N, S_n = m\right\} &= \\ &= P\left\{\max_{1 \leq k \leq n} S_k \geq N, S_n = m\right\} - P\left\{\max_{1 \leq k \leq n} S_k \geq N + 1, S_n = m\right\} = \\ &= P\{S_n = 2N - m\} - P\{S_n = 2N - m + 2\}. \quad \square \end{aligned}$$

9. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — бесконечная последовательность независимых бернуллиевских случайных величин, $P\{\xi_i = +1\} = P\{\xi_i = -1\} = 1/2$. Положим $S_0 = 0$, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ и для $x \in Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ определим моменты (*первого* попадания в состояние x после нулевого момента)

$$\sigma_1(x) = \inf\{n > 0: S_n = x\},$$

условившись считать, что $\sigma_1(x) = \infty$, если $\{ \cdot \} = \emptyset$.

Показать, что для $x = 1, 2, \dots$ выполняются равенства

$$(a) P\{\sigma_1(x) > n\} = P\{\max_{0 \leq k \leq n} S_k < x\},$$

$$(b) P\{\sigma_1(x) = n\} = \frac{x}{n} 2^{-n} C_n^{(n+x)/2},$$

$$(c) P\{\sigma_1(1) = 2n + 1\} = \frac{2^{-2n-1}}{n+1} C_{2n}^n,$$

$$(d) P\{\sigma_1(1) > n\} = 2^{-n} C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Решение. (a) Первое равенство следует из совпадения соответствующих событий.

(b) Каждой такой траектории $A = (S_0, \dots, S_n)$, что $S_0 < x, \dots, S_{n-1} < x, S_n = x$, можно однозначно поставить в соответствие такую траекторию $A' = (S'_0, \dots, S'_n)$, что $S'_1 > 0, \dots, S'_{n-1} > 0, S'_n = x$, путем симметрии относительно точки $(n/2, x/2)$. В силу соотношения (5) имеем

$$P\{S'_1 > 0, \dots, S'_{n-1} > 0, S'_n = x\} = \frac{x}{n} 2^{-n} C_n^{(n+x)/2}.$$

(c) Формула для $P\{\sigma_1(1) = 2n + 1\}$ получается из п. (b) непосредственной подстановкой.

(d) В силу п. (a) и задачи I.10.3(d) имеем

$$P\{\sigma_1(1) > n\} = P\left\{\max_{0 \leq k \leq n} S_k \leq 0\right\} = 2^{-n} C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}. \quad \square$$

10. Пусть выполнены условия предыдущей задачи. Наряду с моментами $\sigma_1(x)$ определим моменты

$$\sigma_k(x) = \inf\{n > \sigma_{k-1}(x) : S_n = x\}, \quad k = 2, 3, \dots,$$

полагая $\sigma_k(x) = \infty$, если $\{\cdot\} = \emptyset$. (Смысл этих моментов ясен: $\sigma_k(x)$ — это момент k -го попадания в состояние x .)

Показать, что для $n = 1, 2, \dots$ выполняются равенства

$$(a) P\{\sigma_1(0) = 2n\} = 2^{-2n+1} n^{-1} C_{2n-2}^{n-1}, \quad (c) P\{\sigma_1(0) < \infty\} = 1,$$

$$(b) P\{\sigma_1(0) > 2n\} = 2^{-2n} C_{2n}^n = P\{S_{2n} = 0\}, \quad (d) E\sigma_1(0) = \infty.$$

Показать также, что $\sigma_1(0), \sigma_2(0) - \sigma_1(0), \sigma_3(0) - \sigma_2(0), \dots$ образуют последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. (Это свойство лежит в основе метода «регенерирующих циклов», широко используемого при изучении свойств случайных блужданий; подробнее см. § 7 приложения.)

Решение. (a) В силу формулы (2) из B1.I.10 получаем

$$P\{\sigma_1(0) = 2n\} =$$

$$= P\{S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0\} = f_{2n} = 2^{-2n+1} n^{-1} C_{2n-2}^{n-1}.$$

(b) С помощью формулы (9) из В1.1.10 получаем

$$P \{ \sigma_1(0) > 2n \} = P \{ S_1 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0 \} = P \{ S_{2n} = 0 \} = 2^{-2n} C_{2n}^n.$$

(c) С помощью п. (a) получаем

$$\begin{aligned} P \{ \sigma_1(0) < \infty \} &= \sum_{n=1}^{\infty} P \{ \sigma_1(0) = 2n \} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n+1} n^{-1} C_{2n-2}^{n-1} = 2F\left(\frac{1}{4}\right), \end{aligned}$$

где $F(x)$ — производящая функция чисел Каталана. В силу задачи I.1.5 имеем $F\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, что доказывает требуемую формулу.

(d) Имеем

$$E\sigma_1(0) = \sum_{n=0}^{\infty} 2nP \{ \sigma_1(0) = 2n \} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n+2} C_{2n-2}^{n-1}.$$

В силу задачи I.9.3 последний ряд расходится.

(e) Независимость последовательности $\sigma_1(0)$, $\sigma_2(0) - \sigma_1(0)$, $\sigma_3(0) - \sigma_2(0)$, ... проверяется непосредственно. Приведем схему доказательства для первых двух элементов ряда. Имеем

$$\begin{aligned} P \{ \sigma_1(0) = n, \sigma_2(0) - \sigma_1(0) = k \} &= \\ &= P \{ S_1 \neq 0, \dots, S_{n-1} \neq 0, S_n = 0, S_{n+1} \neq 0, \dots, S_{n+k-1} \neq 0, S_{n+k} = 0 \} = \\ &= P \{ S_1 \neq 0, \dots, S_{n-1} \neq 0, S_n = 0, S'_1 \neq 0, \dots, S'_{k-1} \neq 0, S'_k = 0 \}, \end{aligned}$$

где $S'_i := \xi_{n+1} + \dots + \xi_{n+i}$, $i = 1, \dots, k$, независимы с $S_1, \dots, S_n$. Значит, последняя вероятность есть

$$\begin{aligned} P \{ S_1 \neq 0, \dots, S_{n-1} \neq 0, S_n = 0 \} P \{ S'_1 \neq 0, \dots, S'_{k-1} \neq 0, S'_k = 0 \} &= \\ &= P \{ \sigma_1(0) = n \} P \{ \sigma_2(0) - \sigma_1(0) = k \}. \quad \square \end{aligned}$$

11. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — бесконечная последовательность независимых бернуллиевских случайных величин, $S_0 = 0$ и $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, $n \geq 1$. Положим

$$L_n(x) = |\{k \in (0, n] : S_k = x\}|.$$

(По своему смыслу $L_n(x)$ — это число тех моментов времени $0 < k \leq n$, когда случайное блуждание $(S_k)_{0 \leq k \leq n}$ посещает состояние x , $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; см. задачу I.9.3. Обе величины $L_n(x)$ и $N_n(x)$ часто

называют локальными временами в состоянии x на временном множестве $\{k: 0 \leq k \leq n\}$.)

Показать, что для $k = 0, 1, \dots, n$ выполняются равенства

$$(a) P\{L_{2n}(0) = k\} = P\{L_{2n+1}(0) = k\} = 2^{-2n+k} C_{2n-k}^n,$$

$$(b) P\{L_n(0) = k\} = 2^{-2[n/2]+k} C_{2[n/2]-k}^{[n/2]},$$

$$(c) P\{L_{2n}(0) < k\} = P\{\sigma_k(0) > 2n\} = 2^{-2n} \sum_{j=0}^{k-1} 2^j C_{2n-j}^n,$$

$$(d) P\{L_n(x) = 0\} = P\{\sigma_1(x) > n\} = \sum_{j=n+1}^{\infty} 2^{-j} \frac{x}{j} C_j^{(j+x)/2}.$$

(Величины $\sigma_1(x)$ определены в задаче I.10.10.)

Решение. (a) Поскольку на нечетном шаге траектория не может попасть в нуль, $P\{L_{2n}(0) = k\} = P\{L_{2n+1}(0) = k\}$. Заметим, что $2^{-2n+k} C_{2n-k}^n = P\{S_{2n-k} = k\}$, и будем доказывать по индукции, что

$$P\{L_{2n}(0) = k\} = P\{S_{2n-k} = k\}. \quad (*)$$

При $k=0$ равенство $(*)$ верно в силу формулы (9) из B1.I.10.

Пусть формула $(*)$ доказана для $k=m$, докажем ее для $k=m+1$. Имеем

$$\begin{aligned} P\{L_{2n}(0) = m+1\} &= \\ &= \sum_{l=1}^{n-m-1} P\{S_1 \neq 0, \dots, S_{2l-1} \neq 0, S_{2l} = 0, \\ &\quad | \{k \in (2l, 2n]: S_k = 0\} | = m\} = \\ &= \sum_{l=1}^{n-m-1} P\{S_1 \neq 0, \dots, S_{2l-1} \neq 0, S_{2l} = 0, \\ &\quad | \{k \in (0, 2n-2l]: S'_k = 0\} | = m\}, \end{aligned}$$

где $S'_k = \xi_{2l+1} + \dots + \xi_{2l+k}$, $k=1, \dots, 2n-2l$, независимы с $S_1, \dots, S_{2l}$. Используя предположение индукции, получаем

$$\begin{aligned} P\{L_{2n}(0) = m+1\} &= \\ &= \sum_{l=1}^{n-m-1} P\{S_1 \neq 0, \dots, S_{2l-1} \neq 0, S_{2l} = 0\} P\{S'_{2n-2l-m} = m\}. \quad (**) \end{aligned}$$

Снова воспользовавшись независимостью, получаем, что выражение (***) есть вероятность события, что случайное блуждание попадет в точку $(2n - m; m)$ и при этом хотя бы один раз побывает в нуле. Используя формулы (5) из В1.1.10, получаем

$$\begin{aligned} P \{L_{2n}(0) = m + 1\} &= \\ &= P \{S_{2n-m} = m\} - P \{S_1 > 0, \dots, S_{2n-m} > 0, S_{2n-m} = m\} = \\ &= 2^{-2n+m} C_{2n-m}^n - 2^{-2n+m} \frac{m}{2n-m} C_{2n-m}^n = 2^{-2n+m+1} C_{2n-m-1}^n = \\ &= P \{S_{2n-m-1} = m + 1\}. \end{aligned}$$

(b)–(c) Формулы для $P \{L_n(0) = k\}$ и $P \{L_{2n}(0) < k\}$ непосредственно следуют из предыдущей.

(d) Формула для $P \{\sigma_1(x) > n\}$ следует из формулы для $P \{\sigma_1(x) = n\}$ из задачи 1.10.9. $\square$

§ 11. Мартингалы. Некоторые применения к случайному блужданию

1. Пусть $\mathcal{D}_0 \preceq \mathcal{D}_1 \preceq \dots \preceq \mathcal{D}_n$ — последовательность разбиений, $\mathcal{D}_0 = \{\Omega\}$; $\eta_k - \mathcal{D}_k$ -измеримая величина, $1 \leq k \leq n$. Доказать, что последовательность $\xi = (\xi_k, \mathcal{D}_k)_{1 \leq k \leq n}$, где

$$\xi_k = \sum_{l=1}^k [\eta_l - E(\eta_l | \mathcal{D}_{l-1})],$$

является мартингалом.

Решение. По условию $\eta_l - \mathcal{D}_l$ -измеримая величина, $\mathcal{D}_l \preceq \mathcal{D}_k$, $l \leq k$. Поэтому $\eta_l - \mathcal{D}_k$ -измеримая величина. Далее, $E(\eta_l | \mathcal{D}_{l-1}) - \mathcal{D}_k$ -измеримая величина по тем же соображениям. Поэтому $\xi_k - \mathcal{D}_k$ -измеримая величина, $1 \leq k \leq n$. Далее,

$$\begin{aligned} E(\xi_{k+1} - \xi_k | \mathcal{D}_k) &= E[\eta_{k+1} - E(\eta_{k+1} | \mathcal{D}_k) | \mathcal{D}_k] = \\ &= E(\eta_{k+1} | \mathcal{D}_k) - E[E(\eta_{k+1} | \mathcal{D}_k) | \mathcal{D}_k] = E(\eta_{k+1} | \mathcal{D}_k) - E(\eta_{k+1} | \mathcal{D}_k) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $E(\xi_{k+1} | \mathcal{D}_k) = \xi_k$, и тем самым $\xi = (\xi_k, \mathcal{D}_k)_{1 \leq k \leq n}$ — мартингал.

2. Пусть величины $\eta_1, \dots, \eta_n$ таковы, что $E\eta_1 = 0$ и $E(\eta_k | \eta_1, \dots, \eta_{k-1}) = 0$, $1 \leq k \leq n$. Доказать, что последовательность $\xi = (\xi_k)_{1 \leq k \leq n}$,

$$\xi_1 = \eta_1 \quad \text{и} \quad \xi_{k+1} = \sum_{i=1}^k f_i(\eta_1, \dots, \eta_i) \eta_{i+1}, \quad k < n,$$

где $f_i(\eta_1, \dots, \eta_i)$ — некоторые функции, образует мартингал. $\square$

Решение. Обозначим $\mathcal{D}_k = \mathcal{D}_{\xi_1, \dots, \xi_k}$. Поскольку $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ выражается через $(\eta_1, \dots, \eta_k)$, разбиение $\mathcal{C}_k = \mathcal{D}_{\eta_1, \dots, \eta_k}$ «мельче» разбиения $\mathcal{D}_k$, т. е. $\mathcal{D}_k \preceq \mathcal{C}_k$. Докажем, что $E(\xi_{k+1} - \xi_k | \mathcal{C}_k) = 0$, тогда в силу телескопического свойства условного математического ожидания $E(\xi_{k+1} - \xi_k | \mathcal{D}_k) = 0$, т. е. $\xi = (\xi_k, \mathcal{D}_k)_{1 \leq k \leq n}$ — мартингал.

Действительно,

$$\begin{aligned} E(\xi_{k+1} - \xi_k | \mathcal{C}_k) &= E(\eta_{k+1} f_k(\eta_k, \dots, \eta_k) | \mathcal{C}_k) = \\ &= f_k(\eta_1, \dots, \eta_k) E(\eta_{k+1} | \mathcal{C}_k) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

3. Показать, что всякий мартингал $\xi = (\xi_k, \mathcal{D}_k)_{1 \leq k \leq n}$ имеет *некоррелированные приращения*: если $a < b < c < d$, то

$$\text{cov}(\xi_d - \xi_c, \xi_b - \xi_a) = 0.$$

Решение. В силу телескопического свойства условного математического ожидания верны преобразования

$$\xi_k = E(\xi_{k+1} | \mathcal{D}_k) = E(E(\xi_{k+2} | \mathcal{D}_{k+1}) | \mathcal{D}_k) = E(\xi_{k+2} | \mathcal{D}_k) = \dots = E(\xi_n | \mathcal{D}_k).$$

Следовательно, для любого $k = 1, \dots, n$ верно, что $\xi_k = E(\xi_n | \mathcal{D}_k)$.

Далее, положим $\zeta = \xi_d - \xi_c = E(\xi_n | \mathcal{D}_d) - E(\xi_n | \mathcal{D}_c)$ и $\eta = \xi_b - \xi_a = E(\xi_n | \mathcal{D}_b) - E(\xi_n | \mathcal{D}_a)$. Заметим, что $E\zeta = E\eta = 0$. Следовательно,

$$\text{cov}(\zeta, \eta) = E[(E(\xi_n | \mathcal{D}_d) - E(\xi_n | \mathcal{D}_c)) \times (E(\xi_n | \mathcal{D}_b) - E(\xi_n | \mathcal{D}_a))]. \quad (*)$$

Далее, в силу телескопического свойства верны преобразования

$$E(E(\xi_n | \mathcal{D}_d) E(\xi_n | \mathcal{D}_b)) = E[E(\xi_n E(\xi_n | \mathcal{D}_b)) | \mathcal{D}_d] = E(\xi_n E(\xi_n | \mathcal{D}_b)),$$

поскольку $E(\xi_n | \mathcal{D}_b) - \mathcal{D}_d$ -измеримая величина. Аналогично доказывается, что

$$E(E(\xi_n | \mathcal{D}_d) E(\xi_n | \mathcal{D}_a)) = E(\xi_n E(\xi_n | \mathcal{D}_a));$$

$$E(E(\xi_n | \mathcal{D}_c) E(\xi_n | \mathcal{D}_b)) = E(\xi_n E(\xi_n | \mathcal{D}_b));$$

$$E(E(\xi_n | \mathcal{D}_c) E(\xi_n | \mathcal{D}_a)) = E(\xi_n E(\xi_n | \mathcal{D}_a)).$$

Используя последние равенства и раскрывая скобки в формуле (*), получаем

$$\begin{aligned} \text{cov}(\xi_d - \xi_c, \xi_b - \xi_a) &= \\ &= \mathbb{E}[\xi_n(\mathbb{E}(\xi_n|\mathcal{D}_b) - \mathbb{E}(\xi_n|\mathcal{D}_a) - \mathbb{E}(\xi_n|\mathcal{D}_b) + \mathbb{E}(\xi_n|\mathcal{D}_a))] = 0. \quad \square \end{aligned}$$

4. Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ — такая случайная последовательность, что $\xi_k - \mathcal{D}_k$ -измеримые величины ($\mathcal{D}_1 \preceq \mathcal{D}_2 \preceq \dots \preceq \mathcal{D}_n$). Доказать, что для того, чтобы эта последовательность была мартингалом (относительно системы разбиений $(\mathcal{D}_k)$), необходимо и достаточно, чтобы для любого момента остановки τ (относительно $(\mathcal{D}_k)$) выполнялось равенство $\mathbb{E}\xi_\tau = \mathbb{E}\xi_1$. (Выражение «для любого момента остановки» можно заменить на выражение «для любого момента остановки, принимающего два значения».)

Решение. Необходимость. Пусть $\xi = (\xi_k, \mathcal{D}_k)_{1 \leq k \leq n}$ — мартингал. Тогда, как было показано при решении задачи I.11.3, $\xi_k = \mathbb{E}(\xi_n|\mathcal{D}_k)$. По определению $\xi_\tau = \sum_{k=1}^n \xi_k I(\tau = k)$, значит,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\xi_\tau &= \mathbb{E} \sum_{k=1}^n \xi_k I(\tau = k) = \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[\xi_n|\mathcal{D}_k] I(\tau = k) \right) = \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[\xi_n I(\tau = k)|\mathcal{D}_k] \right) = \mathbb{E}(\mathbb{E}[\xi_n|\mathcal{D}_1]) = \mathbb{E}\xi_n = \mathbb{E}\xi_1. \end{aligned}$$

Достаточность. Пусть $\mathbb{E}\xi_\tau = \mathbb{E}\xi_1$ для любого момента остановки τ . Зафиксируем $k \in \{1, \dots, n-1\}$ и $A \in \mathcal{D}_k$. Рассмотрим момент $\tau(\omega) = kI(\omega \in \bar{A}) + (k+1)I(\omega \in A)$. Заметим, что $\{\tau = k\} = \bar{A} \in \mathcal{B}_k$, $\{\tau = k+1\} = A \in \mathcal{B}_k \subset \mathcal{B}_{k+1}$, следовательно, τ — момент остановки.

По определению $\xi_\tau = \sum_{k=1}^n \xi_k I_{\{\tau=k\}}$, значит, $\xi_\tau = \xi_k I_{\bar{A}} + \xi_{k+1} I_A$, откуда следует, что $\mathbb{E}\xi_1 = \mathbb{E}\xi_\tau = \mathbb{E}(\xi_k I_{\bar{A}}) + \mathbb{E}(\xi_{k+1} I_A)$. Докажем по индукции, что

$$\mathbb{E}\xi_k = \mathbb{E}\xi_{k+1} \quad \text{и} \quad \mathbb{E}(\xi_k I_A) = \mathbb{E}(\xi_{k+1} I_A) \quad \forall A \in \mathcal{D}_k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (*)$$

Действительно, при $k=1$ в силу предыдущих рассуждений $\mathbb{E}\xi_1 = \mathbb{E}(\xi_1 I_{\bar{A}}) + \mathbb{E}(\xi_2 I_A)$ или $\mathbb{E}(\xi_1 I_A) = \mathbb{E}(\xi_2 I_A)$. Заменим A на $\bar{A}$ и получим $\mathbb{E}(\xi_1 I_{\bar{A}}) = \mathbb{E}(\xi_2 I_{\bar{A}})$, т. е. $\mathbb{E}\xi_1 = \mathbb{E}\xi_2$.

Если формула (*) верна при $k \leq m$, то $\mathbb{E}\xi_1 = \mathbb{E}\xi_2 = \dots = \mathbb{E}\xi_m = \mathbb{E}\xi_\tau$; при $k = m+1$ формула (*) доказывается так же, как и при $k=1$.

Пусть $D \in \mathcal{D}_k$, тогда

$$\mathbb{E}(\xi_{k+1}|D) = \frac{\mathbb{E}(\xi_{k+1}I_D)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{\mathbb{E}(\xi_k I_D)}{\mathbb{P}(D)} = \mathbb{E}(\xi_k|D).$$

Таким образом, $\mathbb{E}(\xi_{k+1}|\mathcal{D}_k) = \mathbb{E}(\xi_k|\mathcal{D}_k) = \xi_k$, т. е. $\xi = (\xi_k, \mathcal{D}_k)_{1 \leq k \leq n}$ — мартингал. $\square$

5. Показать, что если $\xi = (\xi_k, \mathcal{D}_k)_{1 \leq k \leq n}$ — мартингал и τ — момент остановки, то для любого $k \leq n$ выполняется равенство

$$\mathbb{E}\xi_n I(\tau = k) = \mathbb{E}\xi_k I(\tau = k).$$

Решение. Поскольку $\xi_k = \mathbb{E}(\xi_n|\mathcal{D}_k)$ (это было показано при решении задачи I.11.3), получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\xi_n I(\tau = k) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}[\xi_n I(\tau = k)|\mathcal{D}_k]) = \mathbb{E}[I(\tau = k)\mathbb{E}(\xi_n|\mathcal{D}_k)] = \\ &= \mathbb{E}\xi_k I(\tau = k). \quad \square \end{aligned}$$

6. Пусть $\xi = (\xi_k, \mathcal{D}_k)_{1 \leq k \leq n}$ и $\eta = (\eta_k, \mathcal{D}_k)_{1 \leq k \leq n}$ — два мартингала, $\xi_1 = \eta_1 = 0$. Доказать, что

$$\mathbb{E}\xi_n \eta_n = \sum_{k=2}^n \mathbb{E}(\xi_k - \xi_{k-1})(\eta_k - \eta_{k-1}) \quad (*)$$

и, в частности, что

$$\mathbb{E}\xi_n^2 = \sum_{k=2}^n \mathbb{E}(\xi_k - \xi_{k-1})^2.$$

Решение. Рассмотрим правую часть формулы (*):

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \mathbb{E}(\xi_k - \xi_{k-1})(\eta_k - \eta_{k-1}) &= \\ &= \sum_{k=2}^n \mathbb{E}(\xi_k \eta_k) - \mathbb{E}(\xi_k \eta_{k-1}) - \mathbb{E}(\xi_{k-1} \eta_k) + \mathbb{E}(\xi_{k-1} \eta_{k-1}). \quad (**) \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \mathbb{E}(\xi_k \eta_k) &= \mathbb{E}(\xi_n \eta_n) + \sum_{k=2}^{n-1} \mathbb{E}(\xi_k \eta_k) = \\ &= \mathbb{E}(\xi_n \eta_n) + \sum_{k=2}^{n-1} \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_n|\mathcal{D}_k)\mathbb{E}(\eta_n|\mathcal{D}_k)) = \\ &= \mathbb{E}(\xi_n \eta_n) + \sum_{k=2}^{n-1} \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_n \mathbb{E}(\eta_n|\mathcal{D}_k)|\mathcal{D}_k)) = \mathbb{E}(\xi_n \eta_n) + \sum_{k=2}^{n-1} \mathbb{E}(\xi_n \eta_k). \end{aligned}$$

Последний переход верен в силу свойства мартингалов $\xi_k = E(\xi_n | \mathcal{D}_k)$, которое было доказано при решении задачи I.11.3.

Аналогично

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^n E(\xi_{k-1} \eta_k) &= \sum_{k=2}^n E(\xi_{k-1} \eta_n); \\ \sum_{k=2}^n E(\xi_k \eta_{k-1}) &= \sum_{k=2}^{n-1} E(\xi_n \eta_{k-1}) + E(\xi_n \eta_{n-1}); \\ \sum_{k=2}^n E(\xi_{k-1} \eta_{k-1}) &= \sum_{k=2}^n E(\xi_{k-1} \eta_n).\end{aligned}$$

Используя доказанные равенства, получаем, что правая часть формулы (***) есть

$$\begin{aligned}E(\xi_n \eta_n) + \sum_{k=2}^{n-1} E(\xi_n \eta_k) - \sum_{k=2}^n E(\xi_{k-1} \eta_n) - \\ - \sum_{k=2}^{n-1} E(\xi_n \eta_{k-1}) - E(\xi_n \eta_{n-1}) + \sum_{k=2}^n E(\xi_{k-1} \eta_n) = \\ = E(\xi_n \eta_n) + E\left(\xi_n \sum_{k=2}^{n-1} (\eta_k - \eta_{k-1})\right) - E(\xi_n \eta_{n-1}) = E(\xi_n \eta_n). \quad \square\end{aligned}$$

7. Пусть $\eta_1, \dots, \eta_n$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $E\eta_i = 0$. Показать, что последовательности $\xi = (\xi_k)_{1 \leq k \leq n}$ и $\zeta = (\zeta_k)_{1 \leq k \leq n}$,

$$\xi_k = \left(\sum_{i=1}^k \eta_i\right)^2 - k E\eta_1^2 \quad \text{и} \quad \zeta_k = \frac{\exp\{\lambda(\eta_1 + \dots + \eta_k)\}}{(E \exp\{\lambda\eta_1\})^k},$$

являются мартингалами.

Решение. Поскольку $\xi_1, \dots, \xi_k$ выражаются через $\eta_1, \dots, \eta_k$, получаем, что

$$\mathcal{D}_k \preccurlyeq D_{\eta_1, \dots, \eta_k} = \mathcal{C}_k.$$

Покажем, что $E(\xi_{k+1} | \mathcal{C}_k) = \xi_k$, откуда в силу телескопического свойства будет следовать, что $E(\xi_{k+1} | \mathcal{D}_k) = \xi_k$, т. е. $\xi = (\xi_k, \mathcal{D}_k)_{1 \leq k \leq n}$ — мартингал. Для $\zeta = (\zeta_k, \mathcal{D}_k)_{1 \leq k \leq n}$ рассуждения проводятся аналогично.

Обозначим $S_k = \sum_{i=1}^k \eta_i$, тогда

$$\begin{aligned} E(\xi_{k+1}|\mathcal{C}_k) &= E(S_{k+1}^2 - (k+1)E\eta_1^2|\mathcal{C}_k) = \\ &= E(S_k^2 - 2S_k\eta_{k+1} + \eta_{k+1}^2|\mathcal{C}_k) - (k+1)E\eta_1^2 = \\ &= S_k^2 - 2S_kE(\eta_{k+1}|\mathcal{C}_k) + E(\eta_{k+1}^2|\mathcal{C}_k) - (k+1)E\eta_1^2 = S_k^2 - kE\eta_1^2 = \xi_k. \end{aligned}$$

Предпоследний переход верен в силу независимости величин $\eta_1, \dots, \eta_k$ и η_k и одинаковой распределенности величин $\eta_1, \dots, \eta_{k+1}$.

Используя аналогичные рассуждения, получаем

$$\begin{aligned} E(\zeta_{k+1}|\mathcal{C}_k) &= E\left(\frac{\exp\{\lambda S_k + \lambda\eta_k\}}{(E \exp\{\lambda\eta_1\})^{k+1}}|\mathcal{C}_k\right) = \\ &= E\left(\frac{\exp\{\lambda S_k\}}{(E \exp\{\lambda\eta_1\})^k} \frac{\exp\{\lambda\eta_{k+1}\}}{(E \exp\{\lambda\eta_1\})}|\mathcal{C}_k\right) = \\ &= \frac{\zeta_k}{E \exp\{\lambda\eta_1\}} E(\exp\{\lambda\eta_{k+1}\}|\mathcal{C}_k) = \frac{\zeta_k E \exp\{\lambda\eta_1\}}{E \exp\{\lambda\eta_1\}}. \quad \square \end{aligned}$$

8. Пусть $\eta_1, \dots, \eta_n$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения в (конечном) множестве Y . Пусть $f_0(y) = P\{\eta_1 = y\} > 0$, $y \in Y$ и $f_1(y)$ — неотрицательная функция, $\sum_{y \in Y} f_1(y) = 1$. Показать, что последовательность $\xi = (\xi_k, \mathcal{D}_k^\eta)_{1 \leq k \leq n}$,

$$\xi_k = \frac{f_1(\eta_1) \dots f_1(\eta_k)}{f_0(\eta_1) \dots f_0(\eta_k)}, \quad \mathcal{D}_k^\eta = \mathcal{D}_{\eta_1, \dots, \eta_k},$$

образует мартингал. (Величины ξ_k , называемые *отношениями правдоподобия*, играют исключительно важную роль в математической статистике.)

Решение. Поскольку величины ξ_k выражаются через $\eta_1, \dots, \eta_k$, они являются $\mathcal{D}_k$ -измеримыми. Кроме того,

$$\begin{aligned} E(\xi_{k+1}|\mathcal{D}_k) &= E\left(\frac{f_1(\eta_1) \dots f_1(\eta_k) f_1(\eta_{k+1})}{f_0(\eta_1) \dots f_0(\eta_k) f_0(\eta_{k+1})}|\mathcal{D}_k\right) = \xi_k E\left(\frac{f_1(\eta_{k+1})}{f_0(\eta_{k+1})}|\mathcal{D}_k\right) = \\ &= \xi_k E\left(\frac{f_1(\eta_{k+1})}{f_0(\eta_{k+1})}\right) = \xi_k \sum_{k=1}^n \frac{f_1(y_k)}{f_0(y_k)} P\{\eta_1 = y_k\} = \xi_k \sum_{k=1}^n f_1(y_k) = \xi_k. \quad \square \end{aligned}$$

9. Будем говорить, что последовательность

$$\xi = (\xi_k, \mathcal{D}_k)_{0 \leq k \leq n}$$

является супермартингалом (субмартингалом), если Р-п. н. выполняется неравенство

$$E(\xi_{k+1} | \mathcal{D}_k) \leq \xi_k \quad (\geq \xi_k), \quad 0 \leq k \leq n.$$

Показать, что всякий супермартингал (субмартингал) может быть представлен (и притом единственным образом) в виде

$$\xi_k = m_k - a_k \quad (+ a_k),$$

где $m = (m_k, \mathcal{D}_k)_{0 \leq k \leq n}$ — мартингал, а $a = (a_k, \mathcal{D}_k)_{0 \leq k \leq n}$ — такая неубывающая последовательность, что $a_0 = 0$ и величины a_k являются $\mathcal{D}_{k-1}$ -измеримыми для всякого $k \geq 1$.

Решение. Докажем утверждение для субмартингалов, тогда для супермартингалов утверждение будет следовать из того факта, что если $\xi = (\xi_k, \mathcal{D}_k)_{1 \leq k \leq n}$ — супермартингал, то $\eta = (-\xi_k, \mathcal{D}_k)_{1 \leq k \leq n}$ — субмартингал.

Обозначим

$$a_k = \sum_{i=1}^k E(\xi_i - \xi_{i-1} | \mathcal{D}_{i-1}).$$

Из того, что $\xi = (\xi_k, \mathcal{D}_k)_{1 \leq k \leq n}$ — субмартингал, следует, что $\{a_k\}$ — неубывающая и неотрицательная последовательность, $a_0 = 0$ и величины a_k являются $\mathcal{D}_{k-1}$ -измеримыми для всякого $k \geq 1$.

Далее, обозначим $m_k = \xi_k - a_k$. Тогда m_k есть $\mathcal{D}_k$ -измеримые величины, и

$$E(m_{k+1} - m_k | \mathcal{D}_k) = E(\xi_{k+1} - \xi_k - E(\xi_{k+1} - \xi_k | \mathcal{D}_k) | \mathcal{D}_k) = 0.$$

Таким образом, $m = (m_k, \mathcal{D}_k)_{1 \leq k \leq n}$ — мартингал, и $\xi_k = m_k + a_k$, $1 \leq k \leq n$. $\square$

10. Пусть $\xi = (\xi_k, \mathcal{D}_k)_{0 \leq k \leq n}$ и $\eta = (\eta_k, \mathcal{D}_k)_{0 \leq k \leq n}$ — супермартингалы и τ — некоторый момент остановки относительно разбиений $(\mathcal{D}_k)_{0 \leq k \leq n}$, причем $P\{\xi_\tau \geq \eta_\tau\} = 1$. Показать, что «переключаемые» последовательности $\zeta = (\zeta_k, \mathcal{D}_k)_{0 \leq k \leq n}$, где

$$\zeta_k = \xi_k I(\tau > k) + \eta_k I(\tau \leq k)$$

или

$$\zeta_k = \xi_k I(\tau \geq k) + \eta_k I(\tau < k),$$

также являются супермартингалами.

Решение. Имеем $\zeta_k = \xi_k + (\eta_k - \xi_k) I_{\{\tau \leq k\}}$. Очевидно, что ζ_k есть $\mathcal{D}_k$ -измеримые величины. Проверим неравенство $E(\zeta_{k+1} - \zeta_k | \mathcal{D}_k) \leq 0$.

Действительно,

$$\begin{aligned}
 E(\zeta_{k+1} - \zeta_k | \mathcal{D}_k) &= \\
 &= E(\xi_{k+1} + (\eta_{k+1} - \xi_{k+1})I_{\{\tau \leq k+1\}} - \xi_k - (\eta_k - \xi_k)I_{\{\tau \leq k\}} | \mathcal{D}_k) = \\
 &= E(\xi_{k+1} - \xi_k | \mathcal{D}_k) + I_{\{\tau \leq k\}} E(\eta_{k+1} - \eta_k - \xi_{k+1} + \xi_k | \mathcal{D}_k) + \\
 &\quad + E(I_{\{\tau = k+1\}}(\eta_{k+1} - \xi_{k+1}) | \mathcal{D}_k) = \\
 &= (1 - I_{\{\tau \leq k\}})E(\xi_{k+1} - \xi_k | \mathcal{D}_k) + I_{\{\tau \leq k\}}E(\eta_{k+1} - \eta_k | \mathcal{D}_k) + \\
 &\quad + E(I_{\{\tau = k+1\}}(\eta_{k+1} - \xi_{k+1}) | \mathcal{D}_k) .
 \end{aligned}$$

В полученном выражении первые два слагаемых п. н. неположительны. А для третьего слагаемого имеем

$$E(I_{\{\tau = k+1\}}(\eta_{k+1} - \xi_{k+1}) | \mathcal{D}_k) \leq 0$$

в силу условия $P(\xi_\tau \geq \eta_\tau) = 1$. В самом деле, по определению $\xi_\tau - \eta_\tau = \sum_{k=1}^n (\xi_k - \eta_k)I_{\{\tau = k\}}$, поэтому если $\xi_\tau - \eta_\tau \geq 0$ п. н., то для любого k выполнено неравенство $(\xi_k - \eta_k)I_{\{\tau = k\}} \geq 0$ п. н. $\square$

11. Пусть $\xi = (\xi_k, \mathcal{D}_k)_{0 \leq k \leq n}$ — субмартингал,

$$\xi_k = \sum_{m \leq k} I_{A_m},$$

где $A_m \in \mathcal{D}_m$. Привести для этого субмартингала разложение Дуба.

Решение. Это действительно субмартингал, поскольку $\xi_k - \mathcal{D}_k$ -измеримые величины и

$$\begin{aligned}
 E(\xi_{k+1} - \xi_k | \mathcal{D}_k) &= E(I_{A_{k+1}} | \mathcal{D}_k) = P(A_{k+1} | \mathcal{D}_k) = \\
 &= \sum_{j=1}^n P(A_{k+1} | D_k^j) I_{D_k^j} \geq 0 \quad \forall \omega \in \Omega.
 \end{aligned}$$

Воспользуемся формулами для a_k и m_k из задачи I.11.9. Имеем

$$\begin{aligned}
 a_k &= \sum_{i=1}^k E(\xi_i - \xi_{i-1} | \mathcal{D}_{i-1}) = \sum_{i=1}^k E(I_{A_i} | \mathcal{D}_{i-1}) = \sum_{i=1}^k P(A_i | \mathcal{D}_{i-1}), \\
 a_0 &= 0,
 \end{aligned}$$

$$m_k = \xi_k - \sum_{i=1}^k P(A_i | \mathcal{D}_{i-1}) = \sum_{m=0}^k I(A_m) - \sum_{m=1}^k P(A_m | \mathcal{D}_{m-1}) . \quad \square$$

§ 12. Марковские цепи. Эргодическая теорема.

Строго марковское свойство

1. Пусть $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ — марковская цепь со значениями в X и $f = f(x)$ ($x \in X$) — некоторая функция. Будет ли последовательность $(f(\xi_0), f(\xi_1), \dots, f(\xi_n))$ образовывать марковскую цепь? Будет ли марковской цепью «обратная» последовательность $(\xi_n, \xi_{n-1}, \dots, \xi_0)$?

Решение. Последовательность $(f(\xi_0), f(\xi_1), \dots, f(\xi_n))$ не обязательно будет образовывать марковскую цепь. Рассмотрим следующий пример. Пусть $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ — однородная марковская цепь со значениями в $X = \{1; 2; 3\}$, матрицей переходных вероятностей

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

и начальным распределением $(1/3; 1/3; 1/3)$. Пусть функция f задается так: $f(1) = 1$; $f(2) = f(3) = 2$. Тогда

$$\begin{aligned} P \{f(\xi_3) = 1 | f(\xi_2) = 2, f(\xi_1) = 1\} &= \frac{P \{f(\xi_3) = 1, f(\xi_2) = 2, f(\xi_1) = 1\}}{P \{f(\xi_2) = 2, f(\xi_1) = 1\}} = \\ &= \frac{P \{\xi_3 = 1, \xi_2 = 2, \xi_1 = 1\} + P \{\xi_3 = 1, \xi_2 = 3, \xi_1 = 1\}}{P \{\xi_2 = 2, \xi_1 = 1\} + P \{\xi_2 = 3, \xi_1 = 1\}} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} P \{f(\xi_3) = 1 | f(\xi_2) = 2\} &= \frac{P \{f(\xi_3) = 1, f(\xi_2) = 2\}}{P \{f(\xi_2) = 2\}} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^3 P \{\xi_3 = 1, \xi_2 = 2, \xi_1 = i\} + P \{\xi_3 = 1, \xi_2 = 3, \xi_1 = i\}}{\sum_{i=1}^3 P \{\xi_2 = 2, \xi_1 = i\} + P \{\xi_2 = 3, \xi_1 = i\}} = \frac{33}{92}. \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность $(f(\xi_0), f(\xi_1), \dots, f(\xi_n))$ не является марковской цепью

Докажем, что последовательность $\xi' = (\xi_n, \xi_{n-1}, \dots, \xi_0)$ будет марковской. Введем обозначения $P = \{\xi_{k-1} = a_{k-1}, \dots, \xi_0 = a_0\}$, $N = \{\xi_k = a_k\}$ и $F = \{\xi_n = a_n, \dots, \xi_{k+1} = a_{k+1}\}$. Тогда определение марковской цепи можно записать в виде $P(F|NP) = P(F|N)$, откуда получаем

$$P(FP|N) = P(F|N)P(P|N). \quad (*)$$

Иначе говоря, из соотношения (*) следует, что при фиксированном «настоящем» N «будущее» F и «прошлое» P независимы.

Заметим, что если для последовательности ξ выполнено свойство (*), то для последовательности ξ' свойство (*) также выполнено, поскольку «будущее» обратной последовательности является «прошлым» исходной последовательности и наоборот. Остается показать, что если для последовательности выполнено свойство (*) для любого k , то последовательность является марковской:

$$\begin{aligned} P\{\xi_{k+1} = a_{k+1} | \xi_k = a_k, \dots, \xi_0 = a_0\} &= \\ &= \sum_* P\{\xi_n = a_n^*, \dots, \xi_{k+2} = a_{k+2}^*, \xi_{k+1} = a_{k+1} | \xi_k = a_k, \dots, \xi_0 = a_0\} = \\ &= \sum_* \frac{P(F^*NP)}{P(PN)} = \sum_* \frac{P(F^*P|N)P(N)}{P(PN)} = \sum_* \frac{P(F^*|N)P(P|N)P(N)}{P(PN)} = \\ &= \sum_* P(F^*|N) = P\{\xi_{k+1} = a_{k+1} | \xi_k = a_k\}, \end{aligned}$$

где суммирование происходит по всем наборам $(a_n^*, \dots, a_{k+2}^*)$. Таким образом, для ξ' выполнено свойство (*), и показано, что если оно верно, то последовательность является марковской цепью. $\square$

2. Пусть $\mathbb{P} = \|p_{ij}\|$, $1 \leq i, j \leq r$, — стохастическая матрица и λ — собственное число этой матрицы, т. е. корень характеристического уравнения $\det \|\mathbb{P} - \lambda E\| = 0$. Показать, что $\lambda_1 = 1$ является собственным числом, а все остальные корни $\lambda_2, \dots, \lambda_r$ по модулю не больше 1. При этом если существует такое n , что $\mathbb{P}^n > 0$ (в том смысле, что все $p_{ij}^{(n)} > 0$), то $|\lambda_i| < 1$, $i = 2, \dots, r$. Показать также, что если все собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ различны, то переходные вероятности $p_{ij}^{(k)}$ допускают представление

$$p_{ij}^{(k)} = \pi_j + a_{ij}(2)\lambda_2^k + \dots + a_{ij}(r)\lambda_r^k,$$

где π_j , $a_{ij}(2)$, ..., $a_{ij}(r)$ выражаются через элементы матрицы $\mathbb{P}$. (Из этого алгебраического подхода к анализу асимптотических свойств марковских цепей, в частности, вытекает, что при $|\lambda_2| < 1$, ..., $|\lambda_r| < 1$ для каждого j существует предел $\lim_k p_{ij}^{(k)}$, не зависящий от i .)

Решение. Сумма столбцов матрицы $\mathbb{P} - E$ есть нулевой столбец, значит, $\det(\mathbb{P} - E) = 0$, т. е. $\lambda_1 = 1$ — собственное значение. Теперь предположим, что найдется такое собственное значение λ , что $|\lambda| > 1$, и пусть $\bar{v}$ — собственный вектор, отвечающий этому значению. Тогда $\|\mathbb{P}^n \bar{v}\| = \lambda^n \|\bar{v}\| \rightarrow \infty$ ($\|\cdot\|$ — евклидова норма), но, с другой стороны, для любого n матрица $\mathbb{P}^n$ стохастическая, и, значит, $\|\mathbb{P}^n \bar{v}\|$ ограничено (например, максимальной по модулю координатой $\bar{v}$). Противоречие.

Если существует такое n , что $\mathbb{P}^n > 0$, то согласно эргодической теореме $p_{ij}^{(n)} \rightarrow \pi_i$ при $n \rightarrow \infty$. Существует по крайней мере один собственный вектор, соответствующий собственному значению 1, — вектор $(\bar{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_r))$. Если существует второе собственное значение $\lambda_i = 1$, $2 \leq i \leq r$, то найдется собственный вектор $\bar{v} = (v_1, \dots, v_r)$ со значением 1, не коллинеарный вектору $\bar{\pi}$. Так как согласно эргодической теореме все π_i положительны, можно найти такое число n , что $v'_j = v_j + n\pi_j > 0$ для всех $j = 1, \dots, r$. Получаем вектор $\bar{v}'$. Поделив на соответствующий коэффициент (сумму координат вектора $\bar{v}'$), можно получить собственный вектор $\bar{\pi}'$, соответствующий собственному значению 1, сумма координат которого равна 1 и все координаты положительны, причем $\bar{\pi} \neq \bar{\pi}'$. Итак, мы получили два различных стационарных распределения. Противоречие.

Если все собственные числа различны, то все векторы, отвечающие им, линейно независимы и, следовательно, образуют базис r -мерного линейного пространства. Тогда векторы $\bar{P}_i = (p_{i1}, \dots, p_{ir})$, являющиеся строками матрицы $\mathbb{P}$, можно разложить по этому базису. Получим

$$\bar{P}_i = b_{i1}\bar{\pi} + \sum_{j=2}^r b_{ij}\bar{v}_{\lambda_j}.$$

Умножив данный вектор справа на $\mathbb{P}^n$, получим

$$\bar{P}_i\mathbb{P}^n = b_{i1}\bar{\pi} + \sum_{j=2}^r b_{ij}\lambda_j^n\bar{v}_{\lambda_j}.$$

Заметим, что $\bar{P}_i\mathbb{P}^n$ есть первая строка матрицы $\mathbb{P}^{n+1}$, т. е.

$$p_{il}^{(n+1)} = b_{i1}\pi_l + a_{il}(2)\lambda_2^n + \dots + a_{il}(r)\lambda_r^n,$$

где $a_{il}(j) = b_{ij}v_{\lambda_j,l}$. При $n \rightarrow \infty$ получаем, что $p_{il}^{(n+1)} \rightarrow b_{i1}\pi_l$. В силу эргодической теоремы $b_{i1} = 1$, $i = 1, \dots, r$. $\square$

3. Пусть $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ — однородная марковская цепь с (конечным) множеством состояний X и матрицей переходных вероятностей $\mathbb{P} = \|p_{xy}\|$. Пусть

$$T\varphi(x) = \mathbb{E}[\varphi(\xi_1) | \xi_0 = x] \quad \left(= \sum_y \varphi(y)p_{xy} \right)$$

— оператор перехода за один шаг. Пусть неотрицательная функция $\varphi = \varphi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$T\varphi(x) = \varphi(x), \quad x \in X,$$

т. е. является «гармонической». Доказать, что последовательность случайных величин

$$\zeta = (\zeta_k, \mathcal{D}_k^\xi)_{0 \leq k \leq n}, \quad \zeta_k = \varphi(\xi_k),$$

образует мартингал.

Решение. Величина $\varphi(\xi_k)$ как функция от ξ_k является $\mathcal{D}_k^\xi$ -измеримой. Далее,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\varphi(\xi_{k+1}) | \mathcal{D}_k^\xi) &= \\ &= \sum_i \mathbb{E}(\varphi(\xi_{k+1}) | D_i) I_{D_i} = \sum_i \sum_j b_j \mathbb{P}(\varphi(\xi_{k+1}) = b_j | D_i) I_{D_i}. \quad (*) \end{aligned}$$

Поскольку $D_i = \{\xi_k = a_i^k, \dots, \xi_0 = a_i^0\}$ и последовательность $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ образует марковскую цепь, получаем, что

$$\mathbb{P}(\varphi(\xi_{k+1}) = b_j | D_i) = \mathbb{P}(\varphi(\xi_{k+1}) = b_j | \xi_k = a_i^k),$$

и тогда правая часть формулы (*) есть

$$\begin{aligned} &\sum_i \sum_j b_j \mathbb{P}(\varphi(\xi_{k+1}) = b_j | \xi_k = a_i^k) I(\xi_k = a_i^k) = \\ &= \sum_i \mathbb{E}(\varphi(\xi_{k+1}) | \xi_k = a_i^k) I(\xi_k = a_i^k) = \sum_i \varphi(a_i^k) I(\xi_k = a_i^k) = \varphi(\xi_k). \quad \square \end{aligned}$$

4. Пусть $\xi = (\xi_n, \mathbb{H}, \mathbb{P})$ и $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_n, \tilde{\mathbb{H}}, \tilde{\mathbb{P}})$ — две марковские цепи с различными начальными распределениями $\mathbb{H} = (p_1, \dots, p_r)$ и $\tilde{\mathbb{H}} = (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_r)$. Пусть

$$\mathbb{H}^{(n)} = (p_1^{(n)}, \dots, p_r^{(n)}), \quad \tilde{\mathbb{H}}^{(n)} = (\tilde{p}_1^{(n)}, \dots, \tilde{p}_r^{(n)}).$$

Показать, что если $\min_{i,j} p_{ij} \geq \varepsilon > 0$, то

$$\sum_{i=1}^r |\tilde{p}_i^{(n)} - p_i^{(n)}| \leq 2(1 - r\varepsilon)^n.$$

Решение. Доказательство проведем по индукции. При $n = 0$ утверждение верно:

$$\sum_{i=1}^r |\tilde{p}_i - p_i| \leq \sum_{i=1}^r \tilde{p}_i + \sum_{i=1}^r p_i = 2.$$

Предположим, что утверждение верно для $n = m$. Докажем его для $n = m + 1$. Заметим, что $\sum_{i=1}^r (\tilde{p}_i - p_i) = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r |\tilde{p}_i^{(m+1)} - p_i^{(m+1)}| &= \sum_{i=1}^r \left| \sum_{j=1}^r (\tilde{p}_j^{(m)} - p_j^{(m)}) p_{ji} \right| = \\ &= \sum_{i=1}^r \left| \sum_{j=1}^r (\tilde{p}_j^{(m)} - p_j^{(m)}) p_{ji} - \varepsilon \sum_{j=1}^r (\tilde{p}_j^{(m)} - p_j^{(m)}) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r (p_{ji} - \varepsilon) |\tilde{p}_j^{(m)} - p_j^{(m)}| = \\ &= \sum_{i=1}^r (p_{ji} - \varepsilon) \sum_{j=1}^r |\tilde{p}_j^{(m)} - p_j^{(m)}| = (1 - r\varepsilon) \sum_{j=1}^r |\tilde{p}_j^{(m)} - p_j^{(m)}| \leq \\ &\leq 2(1 - r\varepsilon)^{m+1}. \quad \square \end{aligned}$$

5. Пусть P и Q — стохастические матрицы. Показать, что PQ и $\alpha P + (1 - \alpha)Q$, $0 \leq \alpha \leq 1$, также являются стохастическими матрицами.

Решение. Пусть $PQ = R = (r_{ij})$ и $\alpha P + (1 - \alpha)Q = S = (s_{ij})$. Очевидно, что все r_{ij} и s_{ij} неотрицательны. Кроме того,

$$\begin{aligned} \sum_j r_{ij} &= \sum_j \sum_k p_{ik} q_{kj} = \sum_k p_{ik} \sum_j q_{kj} = \sum_k p_{ik} = 1, \\ \sum_j s_{ij} &= \sum_j \alpha p_{ij} + \sum_j (1 - \alpha) q_{ij} = \alpha + (1 - \alpha) = 1. \quad \square \end{aligned}$$

6. Пусть $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_N$ — бернуллиевская последовательность независимых случайных величин, $P\{\xi_i = 1\} = P\{\xi_i = -1\} = 1/2$. Определим величины $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_N$, положив $\eta_0 = \xi_0$, $\eta_n = \frac{\xi_{n-1} + \xi_n}{2}$, $1 \leq n \leq N$.

(а) Будет ли эта последовательность $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_N$ марковской?

(б) Будет ли марковской последовательность $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_N$, где $\zeta_0 = \xi_0$, $\zeta_n = \xi_{n-1} \xi_n$, $1 \leq n \leq N$?

Решение. (а) Последовательность $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n$, очевидно, будет марковской при $N = 0, 1$. При $N \geq 2$ она не будет марковской потому

что, например,

$$\begin{aligned} P\{\eta_2 = 1 | \eta_1 = 0, \eta_0 = -1\} &= \frac{P\{\eta_2 = 1, \eta_1 = 0, \eta_0 = -1\}}{P\{\eta_1 = 0, \eta_0 = -1\}} = \\ &= \frac{P\{\xi_2 = 1, \xi_1 = 1, \xi_0 = -1\}}{P\{\xi_1 = 1, \xi_0 = -1\}} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

но, с другой стороны,

$$\begin{aligned} P\{\eta_2 = 1 | \eta_1 = 0\} &= \frac{P\{\eta_2 = 1, \eta_1 = 0\}}{P\{\eta_1 = 0\}} = \\ &= \frac{P\{\xi_2 = 1, \xi_1 = 1, \xi_0 = -1\}}{P\{\xi_1 = 1, \xi_0 = -1\} + P\{\xi_1 = -1, \xi_0 = 1\}} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(b) Докажем, что последовательность $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_N$ будет марковской при любом N .

Заметим, что по значениям $\zeta_0, \dots, \zeta_k$ однозначно восстанавливаются значения $\xi_0, \dots, \xi_k$. А именно, для любого $k \leq N$ и для любых $a_i = \pm 1$, $i = 0, \dots, k$, событие

$$\{\zeta_0 = a_0, \dots, \zeta_k = a_k\}$$

происходит тогда и только тогда, когда происходит событие

$$\left\{ \xi_0 = a_0, \xi_1 = \frac{a_1}{a_0}, \dots, \xi_k = \frac{a_k \cdot a_{k-2} \cdot a_{k-4} \cdot \dots}{a_{k-1} \cdot a_{k-3} \cdot a_{k-5} \cdot \dots} \right\}.$$

Вероятность последнего события равна $\frac{1}{2^{k+1}}$, откуда следует, что

$$P\{\zeta_0 = a_0, \dots, \zeta_k = a_k\} = \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} P\{\zeta_{k+1} = a_{k+1} | \zeta_k = a_k, \dots, \zeta_0 = a_0\} &= \\ &= \frac{P\{\zeta_{k+1} = a_{k+1}, \dots, \zeta_0 = a_0\}}{P\{\zeta_k = a_k, \dots, \zeta_0 = a_0\}} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

и, кроме того,

$$\begin{aligned} P\{\zeta_{k+1} = a_{k+1} | \zeta_k = a_k\} &= \frac{P\{\zeta_{k+1} = a_{k+1}, \zeta_k = a_k\}}{P\{\zeta_k = a_k\}} = \\ &= \frac{\sum_{*} P\{\zeta_{k+1} = a_{k+1}, \zeta_k = a_k, \zeta_{k-1} = a_{k-1}^*, \dots, \zeta_0 = a_0^*\}}{\sum_{*} P\{\zeta_k = a_k, \zeta_{k-1} = a_{k-1}^*, \dots, \zeta_0 = a_0^*\}} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

где суммирование проводится по всем наборам $(a_{k-1}^*, \dots, a_0^*)$, $a_i = \pm 1$. $\square$

7. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — н. о. р. случайные величины. Свяжем с этими величинами *ранговые (порядковые) статистики* $X_1^{(n)}, \dots, X_n^{(n)}$, получаемые при расположении величин $X_1, \dots, X_n$ в *вариационный ряд* в порядке их неубывания. (Так что $X_1^{(n)} = \min(X_1, \dots, X_n)$, $\dots$, $X_n^{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$). Условимся считать, что если $X_{i_1} = \dots = X_{i_k} = \min(X_1, \dots, X_n)$ и $i_1 < \dots < i_k$, то в качестве $X_1^{(n)}$ берется величина X_{i_1} . Аналогичные соглашения принимаются и в других случаях.)

Хотя величины $X_1, \dots, X_n$ были независимыми, порядковые статистики $X_1^{(n)}, \dots, X_n^{(n)}$ будут уже зависимыми.

Показать, что в том случае, когда величины X_i принимают всего лишь два значения, порядковые статистики образуют *марковскую цепь*. Привести пример, показывающий, что в случае величин X_i с тремя значениями марковость может и не иметь места.

Решение. Покажем, что если X_i принимают лишь два значения (для определенности 0 и 1), то порядковые статистики образуют марковскую цепь.

Заметим, что $P\{X_{k-1}^{(n)} = a_{k-1}, \dots, X_1^{(n)} = a_1\} \neq 0$ тогда и только тогда, когда последовательность $\{a_k\}$ не убывает и принимает значения 0 или 1. Кроме того,

$$\{X_1^{(n)} = 0, \dots, X_k^{(n)} = 0\} = \{X_k^{(n)} = 0\}.$$

Поэтому

$$P\{X_k^{(n)} = 0 | X_{k-1}^{(n)} = 0, \dots, X_1^{(n)} = 0\} = P\{X_k^{(n)} = 0 | X_{k-1}^{(n)} = 0\},$$

$$P\{X_k^{(n)} = 1 | X_{k-1}^{(n)} = 0, \dots, X_1^{(n)} = 0\} = P\{X_k^{(n)} = 1 | X_{k-1}^{(n)} = 0\}.$$

Если $P\{X_{k-2}^{(n)} = a_{k-2}, \dots, X_1^{(n)} = a_1\} \neq 0$, то

$$\begin{aligned} P\{X_k^{(n)} = 1 | X_{k-1}^{(n)} = 1, X_{k-2}^{(n)} = a_{k-2}, \dots, X_1^{(n)} = a_1\} &= \\ &= 1 = P\{X_k^{(n)} = 1 | X_{k-1}^{(n)} = 1\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{X_k^{(n)} = 0 | X_{k-1}^{(n)} = 1, X_{k-2}^{(n)} = a_{k-2}, \dots, X_1^{(n)} = a_1\} &= \\ &= 0 = P\{X_k^{(n)} = 0 | X_{k-1}^{(n)} = 1\}. \end{aligned}$$

Теперь приведем пример, когда X_i принимает по три значения и марковость статистик не имеет места. Возьмем независимые величины X_1, X_2, X_3 , принимающие значения 1, 2, 3 с одинаковыми вероятностями $1/3$. Обозначим для краткости

$$p_{ijk} = P\{X_3 = i, X_2 = j, X_1 = k\} \quad (= 1/27).$$

Тогда

$$\begin{aligned} P\{X_3^{(3)} = 3 | X_2^{(3)} = 2, X_1^{(3)} = 1\} &= \\ &= \frac{P\{X_3^{(3)} = 3, X_2^{(3)} = 2, X_1^{(3)} = 1\}}{P\{X_2^{(3)} = 2, X_1^{(3)} = 1\}} = \frac{6p_{321}}{6p_{321} + 3p_{221}} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} P\{X_3^{(3)} = 3 | X_2^{(3)} = 2\} &= \frac{P\{X_3^{(3)} = 3, X_2^{(3)} = 2\}}{P\{X_2^{(3)} = 2\}} = \\ &= \frac{6p_{321} + 3p_{322}}{6p_{321} + 3p_{322} + 3p_{221} + p_{222}} = \frac{9}{13}. \quad \square \end{aligned}$$

Глава II

Математические основания теории вероятностей

§ 1. Вероятностная модель эксперимента с бесконечным числом исходов. Аксиоматика Колмогорова

1. Пусть $\Omega = \{r: r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}\}$, $\mathcal{A}$ — алгебра множеств, каждое из которых является конечной суммой непересекающихся множеств A вида $\{r: a < r < b\}$, $\{r: a \leq r < b\}$, $\{r: a < r \leq b\}$, $\{r: a \leq r \leq b\}$, и $P(A) = b - a$. Показать, что $P(A)$, $A \in \mathcal{A}$, является конечно-аддитивной, но не счетно-аддитивной функцией множеств.

Решение. Конечная аддитивность функции P очевидна. Функция P не счетно-аддитивна, так как

$$\sum_{r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} P(\{r\}) = 0, \quad \text{но} \quad P(\{r: r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}\}) = 1. \quad \square$$

2. Пусть $\mathcal{F}$ — совокупность всех подмножеств некоторого счетного множества Ω . Положим $\mu(A) = 0$, если A конечно, и $\mu(A) = \infty$, если A бесконечно. Показать, что функция множеств μ конечно-аддитивна, но не счетно-аддитивна.

Решение. Конечная аддитивность функции μ очевидна. Функция μ не счетно-аддитивна, поскольку если $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$, то

$$\sum_n \mu(\{\omega_n\}) = 0 \quad \text{и} \quad \mu(\Omega) = \infty. \quad \square$$

3. Пусть μ — счетно-аддитивная мера на $(\Omega, \mathcal{F})$, а $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$. Показать, что

(а) если $A_n \uparrow A$, то $\mu(A_n) \uparrow \mu(A)$;

(б) если $A_n \downarrow A$ и $\mu(A_m) < \infty$ для некоторого m , то $\mu(A_n) \downarrow \mu(A)$.

Решение. (а) Имеем $A = \bigcup_k B_k$, где $B_1 = A_1$, $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$ при $k > 1$. Очевидно, B_k попарно не пересекаются. Следовательно,

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \lim_n \sum_{k=1}^n \mu(B_k) = \lim_n \mu\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) = \lim_n \mu(A_n).$$

(b) Имеем $A_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} B_k \cup A$, где $B_k = A_k \setminus A_{k+1}$ попарно не пересекаются между собой и не имеют общих точек с A . Следовательно,

$$\mu(A_m) = \mu(A) + \sum_{k=m}^{\infty} \mu(B_k) < \infty \quad \text{и} \quad \lim_n \sum_{k=n}^{\infty} \mu(B_k) = \lim_n \mu(A_n \setminus A) = 0.$$

Отсюда получаем искомое соотношение. $\square$

4. Проверить следующие свойства операции симметрической разности $\triangle$:

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C), \quad (A \triangle B) \triangle (B \triangle C) = A \triangle C, \\ A \triangle B = C \Leftrightarrow A = B \triangle C.$$

Решение. Все соотношения вытекают из определения операции « $\triangle$ »:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

$\square$

5. Пусть $\mathfrak{J}_i, i \in I$, — произвольные множества. Установить, что всегда имеет место следующее соотношение:

$$\bigcup_{i \in \mathfrak{J}} \bigcap_{j \in \mathfrak{J}_i} A_{ij} = \bigcap_{j_{\infty}} \bigcup_{i \in \mathfrak{J}} A_{ij_i}, \quad (*)$$

где пересечение ведется по всем «путям» $j_{\infty} = (j_i, i \in \mathfrak{J}), j_i \in \mathfrak{J}_i$.

Показать также, что

$$\bigcap_{i \in \mathfrak{J}} \bigcup_{j \in \mathfrak{J}_i} A_{ij} = \bigcup_{j_{\infty}} \bigcap_{i \in \mathfrak{J}} A_{ij_i}.$$

Решение. Соотношение (*) проще всего доказать, переходя к индикаторам $I_{ij} = I_{ij}(\omega)$ множеств A_{ij} . В этом случае его эквивалентной переформулировкой является равенство

$$\max_{i \in \mathfrak{J}} \min_{j \in \mathfrak{J}_i} I_{ij}(\omega) = \min_{j_{\infty}} \max_{i \in \mathfrak{J}} I_{ij_i}(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

Последнее нетрудно установить, заметив, что для фиксированного $\omega \in \Omega$ выполняется условие

$$\max_{i \in \mathfrak{J}} \min_{j \in \mathfrak{J}_i} I_{ij} = 1 \Leftrightarrow \exists i \in \mathfrak{J} \forall j \in \mathfrak{J}_i: I_{ij}(\omega) = 1.$$

Второе соотношение следует из первого (достаточно перейти к дополнениям). $\square$

6. Показать, что «расстояния» $d(A, B)$ и $\rho(A, B)$, определенные по формулам

$$d(A, B) = P(A \triangle B),$$

$$\rho(A, B) = \begin{cases} \frac{P(A \triangle B)}{P(A \cup B)}, & \text{если } P(A \cup B) \neq 0, \\ 0, & \text{если } P(A \cup B) = 0, \end{cases}$$

где $A \triangle B$ — симметрическая разность множеств A и B , удовлетворяют неравенству треугольника, однако из их равенства нулю, вообще говоря, не следует, что $A = B$.

Замечание. Симметричные «расстояния», удовлетворяющие неравенству треугольника и допускающие нулевые значения между разными точками пространства, называют *псевдометриками*. Если отождествить все точки пространства с нулевыми попарными «расстояниями», то псевдометрики станут метриками.

Решение. Неравенство треугольника для d следует из включения

$$A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (B \triangle C),$$

справедливого для любого события C .

Докажем неравенство треугольника для ρ . Фиксируем произвольное событие C . Случай, когда хотя бы одно из событий $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$ имеет нулевую вероятность, очевиден, поэтому будем считать все эти вероятности ненулевыми. Проверим, что

$$\frac{P(A \triangle B)}{P(A \cup B)} \leq \frac{P(A \triangle C)}{P(A \cup C)} + \frac{P(B \triangle C)}{P(B \cup C)}.$$

Функция $f(x) = (a + x)/(b + x)$ не убывает по $x \geq -a$ при $b \geq a$, поэтому

$$\frac{P(A \triangle C)}{P(A \cup C)} \geq \frac{P(A \triangle C')}{P(A \cup C')}, \quad \frac{P(B \triangle C)}{P(B \cup C)} \geq \frac{P(B \triangle C')}{P(B \cup C')}, \quad C' = C \cap (A \cup B)$$

и можно считать, что $C \subset A \cup B$. Далее без ограничения общности будем полагать, что $P(A \cup B) = 1$. Имеем

$$\begin{aligned} P(A \triangle B) &= P(A \setminus [B \cup C]) + P(C \setminus B) + P(B \setminus [A \cup C]) + P(C \setminus A) \leq \\ &\leq \frac{P(A \setminus [B \cup C]) + P(C \setminus A)}{P(A \cup C)} + \frac{P(B \setminus [A \cup C]) + P(C \setminus B)}{P(B \cup C)}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство приводит к требуемому неравенству треугольника. $\square$

7. Пусть μ — конечно-аддитивная мера на алгебре $\mathcal{A}$, множества $A_1, A_2, \dots$ лежат в $\mathcal{A}$, попарно не пересекаются и $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Показать, что $\mu(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Решение. Утверждение вытекает из соотношений

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k) + \mu\left(\sum_{k=n}^{\infty} A_k\right) \geq \sum_{k=1}^n \mu(A_k), \quad n \in \mathbb{N}. \quad \square$$

8. Доказать, что

$$\begin{aligned} \overline{(\lim A_n)} &= \lim \bar{A}_n, & \overline{(\lim A_n)} &= \lim \bar{A}_n, \\ \lim A_n &\subseteq \bar{\lim} A_n, & \bar{\lim}(A_n \cup B_n) &= \bar{\lim} A_n \cup \bar{\lim} B_n, \\ \lim(A_n \cap B_n) &= \lim A_n \cap \lim B_n, \\ \bar{\lim} A_n \cap \lim B_n &\subseteq \bar{\lim}(A_n \cap B_n) \subseteq \bar{\lim} A_n \cap \bar{\lim} B_n. \end{aligned}$$

Если $A_n \uparrow A$ или $A_n \downarrow A$, то

$$\lim A_n = \bar{\lim} A_n.$$

Решение. Все формулы устанавливаются элементарной проверкой с учетом следующих определений: $\bar{\lim} A_n$ состоит из всех исходов, для которых произошло бесконечное число событий A_n ; $\lim A_n$ состоит из всех исходов, для которых могло не произойти лишь конечное число событий A_n . $\square$

9. Установить, что, каковы бы ни были множества $A_n \subseteq \Omega$, $n \geq 1$, справедливо равенство

$$\bar{\lim} A_n = \bigcup_{n_{\infty}} \lim A_{n_k},$$

где объединение ведется по всем возрастающим последовательностям $n_{\infty} = (n_1, n_2, \dots)$ натуральных чисел.

Решение. Утверждение вытекает из определения $\bar{\lim}$ и $\lim$. $\square$

10. Пусть (x_n) — числовая последовательность и $A_n = (-\infty, x_n)$. Показать, что $x = \bar{\lim} x_n$ и $A = \bar{\lim} A_n$ связаны следующим образом: $(-\infty, x) \subseteq A \subseteq (-\infty, x]$.

Решение. Число a лежит в A тогда и только тогда, когда существует бесконечное число значений x_n , для которых $a < x_n$. Отсюда, очевидно, вытекает нужное свойство. $\square$

11. Пусть $A_1, A_2, \dots$ — некоторая последовательность событий из $\mathcal{F}$. Показать, что

$$\overline{\lim} A_n \setminus \underline{\lim} A_n = \overline{\lim} (A_n \setminus A_{n+1}) = \overline{\lim} (A_{n+1} \setminus A_n) = \overline{\lim} (A_n \triangle A_{n+1}).$$

Решение. Событие $\overline{\lim} A_n \setminus \underline{\lim} A_n$ образовано всеми исходами ω , удовлетворяющих следующему условию: найдутся сколь угодно большие индексы m, n , для которых $\omega \in A_n \setminus A_m$ (m и n выбираются независимо). Искомые равенства вытекают теперь из следующего элементарного наблюдения: если $\omega \in A_n \setminus A_m$, то в промежутке между m и n найдется индекс k , для которого $\omega \in A_k \setminus A_{k+1}$ при $m > n$ и $\omega \in A_{k+1} \setminus A_k$ иначе. $\square$

12. Привести пример, показывающий, что для мер, принимающих значение $+\infty$, из счетной аддитивности не вытекает, вообще говоря, непрерывность в «нуле» $\emptyset$.

Решение. Если λ — мера Лебега на $\mathbb{R}$, то

$$\lim_n \lambda([n, \infty)) = \infty, \quad \text{однако} \quad \bigcap_n [n, \infty) = \emptyset. \quad \square$$

13. Система событий $(A_n)_{n \geq 1}$ является *перестановочной* (*exchangeable* или *interchangeable*), если вероятности $p_n = P(A_{i_1} \dots A_{i_n})$ одни и те же для любого выбора индексов $i_1 < \dots < i_n$ и всех n . Доказать, что для таких A_n имеют место формулы

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = np_1 - C_n^2 p_2 + C_n^3 p_3 - \dots + (-1)^{n-1} p_n,$$

$$P\left(\underline{\lim}_n A_n\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_n p_n,$$

$$P\left(\overline{\lim}_n A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 - \lim_n (-1)^n \Delta^n(p_0),$$

где $p_0 = 1$, $\Delta^1(p_k) = p_{k+1} - p_k$, $\Delta^{n+1}(p_k) = \Delta^1(\Delta^n(p_k))$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Первое равенство есть частный случай формулы включения-исключения (см. задачу I.1.12). Далее, имеем

$$P\left(\underline{\lim}_n A_n\right) = \lim_n P\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i\right) = \lim_n \lim_m P\left(\bigcap_{i=n}^m A_i\right) = \lim_n p_n = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Аналогично выводится, что

$$P\left(\overline{\lim}_n A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 - P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n\right) = 1 - \lim_n P\left(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i\right).$$

Осталось проверить равенство

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i\right) = (-1)^n \Delta^n(p_0).$$

Это можно легко сделать, заметив следующее: если $A_1, \dots, A_n$ — перестановочная система событий, то система $A_1 \cup A_2, \dots, A_1 \cup A_n$ также перестановочна. Поэтому если имеет место формула

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i\right) = f(p_0, \dots, p_n)$$

для некоторой линейной функции f , $f(p, \dots, p) = 0$, и произвольных перестановочных событий A_n , то

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} \bar{A}_i\right) &= P\left(\bigcap_{i=1}^n \bar{B}_i \mid \bar{A}_1\right) P(\bar{A}_1) = f(\bar{p}_0, \dots, \bar{p}_n)(1 - p_1) = \\ &= f(p_0, \dots, p_n) - f(p_1, \dots, p_{n+1}), \end{aligned}$$

где $B_i = A_1 \cup A_{i+1}$, $\bar{p}_k = P(B_1 \dots B_k \mid \bar{A}_1)$ и учтено равенство

$$(1 - p_1)\bar{p}_k = P(A_1 \cup [A_2 \dots A_{k+1}]) = p_1 + p_k - p_{k+1}. \quad \square$$

14. Показать, что

$$I\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \max_n I(A_n), \quad I\left(\bigcap_{n \geq 1} A_n\right) = \min_n I(A_n).$$

Решение. Утверждение вытекает из определения индикатора множества. $\square$

15. Пусть $(A_n)_{n \geq 1}$ — некоторая последовательность множеств. Показать, что

- (a) $I(\varliminf A_n) = \varliminf I(A_n)$, $I(\overline{\varliminf A_n}) = \overline{\varliminf I(A_n)}$,
- (b) $\overline{\varliminf I(A_n)} - \varliminf I(A_n) = I(\overline{\varliminf A_n} \setminus \varliminf A_n)$,
- (c) $I\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n \geq 1} I(A_n)$.

Решение. (a) Утверждение следует из определения множеств $\varliminf A_n$, $\overline{\varliminf A_n}$.

(b) Утверждение вытекает из п. (a) с учетом включения $\varliminf A_n \subseteq \overline{\varliminf A_n}$.

(c) Согласно задаче II.1.14 имеем

$$I\left(\bigcup_n A_n\right) = \max_n I(A_n) \leq \sum_n I(A_n). \quad \square$$

16. Пусть μ — счетно-аддитивная мера на $(\Omega, \mathcal{F})$. Доказать следующую *лемму Фату для множеств*:

(а) $\mu(\varliminf A_n) \leq \varliminf \mu(A_n)$;

(б) если к тому же $\mu(\Omega) < \infty$, то

$$\mu(\varlimsup A_n) \geq \varlimsup \mu(A_n);$$

(с) для *вероятностных мер* P выполняются неравенства

$$P(\varliminf A_n) \leq \varliminf P(A_n) \leq \varlimsup P(A_n) \leq P(\varlimsup A_n)$$

Вывести отсюда следующее свойство «непрерывности» для вероятности P : если $A = \lim A_n$ (т. е. $\varlimsup A_n = \varliminf A_n = A$), то $P(A) = \lim P(A_n)$.

Решение. (а) Свойство счетной аддитивности меры μ эквивалентно тому, что для любой возрастающей последовательности множеств $(B_n)_{n \geq 1}$, т. е. такой последовательности, что $B_n \subset B_{n+1}$, выполняется равенство

$$\mu\left(\bigcup_n B_n\right) = \lim_n \mu(B_n),$$

и, следовательно,

$$\mu(\varliminf A_n) = \lim \mu\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \varliminf \mu(A_n).$$

(б) При $\mu(\Omega) < \infty$ свойство счетной аддитивности меры μ эквивалентно тому, что для любой убывающей последовательности множеств $(B_n)_{n \geq 1}$, т. е. такой последовательности, что $B_{n+1} \subset B_n$, выполняется равенство

$$\mu\left(\bigcap_n B_n\right) = \lim_n \mu(B_n),$$

и, следовательно,

$$\mu(\varlimsup A_n) = \lim \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \geq \varlimsup \mu(A_n).$$

(с) Утверждение следует из п. (а), (б). □

17. Пусть $A^* = \varlimsup A_n$ и $A_* = \varliminf A_n$. Показать, что

$$\lim_n P(A_n \setminus A^*) = \lim_n P(A_* \setminus A_n) = 0.$$

Решение. Поскольку

$$B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \uparrow A_* \quad \text{и} \quad P(A_* \setminus B_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

для доказательства равенства $\lim_n P(A_* \setminus A_n) = 0$ достаточно установить, что $\lim_n P(B_n \setminus A_n) = 0$. Последнее, очевидно, выполнено, так как $B_n \setminus A_n = \emptyset$.

Далее, имеем

$$C_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \downarrow A^* \quad \text{и} \quad P(B_n \setminus A^*) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Поэтому, как и выше, справедливость соотношения $\lim_n P(A_n \setminus A^*) = 0$ гарантируется тем, что $\lim_n P(A_n \setminus C_n) = 0$. Последнее следует из равенства $A_n \setminus C_n = \emptyset$. $\square$

18. Пусть $A_n \rightarrow A$ в том смысле, что $A = \overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n$. Показать, что $P(A \triangle A_n) \rightarrow 0$.

Решение. Утверждение вытекает из задачи II.1.17. $\square$

19. Пусть множества A_n сходятся к множеству A п. н. в том смысле, что $P(A \triangle \underline{\lim} A_n) = P(A \triangle \overline{\lim} A_n) = 0$. Показать, что тогда также $P(A \triangle A_n) \rightarrow 0$.

Решение. Утверждение следует из задачи II.1.17. $\square$

20. Показать, что для любых последовательностей событий (A_n) , (B_n) симметрическая разность удовлетворяет следующим свойствам:

$$\begin{aligned} A_1 \triangle B_1 &= \bar{A}_1 \triangle \bar{B}_1, \\ \left(\bigcup_n A_n \right) \triangle \left(\bigcup_n B_n \right) &\subseteq \bigcup_n (A_n \triangle B_n), \\ \left(\bigcap_n A_n \right) \triangle \left(\bigcap_n B_n \right) &\subseteq \bigcup_n (A_n \triangle B_n). \end{aligned}$$

Решение. Из равенства $\overline{A \triangle B} = AB \cup \bar{A}\bar{B}$ следует первое соотношение. Второе соотношение получается из легко проверяемого включения

$$\left(\bigcup_n A_n \right) \cap \left(\bigcup_n B_n \right) \supseteq \bigcup_n (A_n B_n).$$

Третье соотношение следует из первого и второго. $\square$

21. Показать, что для любых событий A, B, C выполняется неравенство

$$|P(AB) - P(AC)| \leq P(B \triangle C).$$

Решение. Имеем

$$|P(AB) - P(AC)| \leq P(AB \triangle AC) \leq P(B \triangle C). \quad \square$$

22. Пусть $(A_n)_{n \geq 1}$ — некоторая последовательность таких событий из $\mathcal{F}$, что

$$\sum_n P(A_n \triangle A_{n+1}) < \infty.$$

Показать, что тогда

$$P(\overline{\lim} A_n \setminus \underline{\lim} A_n) = 0.$$

Решение. Согласно утверждению задачи II.1.11 имеем

$$P(\overline{\lim} A_n \setminus \underline{\lim} A_n) = P(\overline{\lim} B_n)$$

при $B_n = A_n \triangle A_{n+1}$. К тому же

$$P(\overline{\lim} B_n) = \lim_n P\left(\bigcup_{k \geq n} B_k\right) = 0,$$

так как

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(B_k) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad \square$$

23. Показать, что для любых событий A и B выполняются неравенства

$$P(A) \vee P(B) \leq P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

и

$$P(A \cup B)P(A \cap B) \leq P(A)P(B).$$

Когда здесь достигаются равенства?

Решение. Обозначая $P(A \cap B) = p$, $P(A \setminus B) = q$, $P(B \setminus A) = r$, перепишем неравенства следующим образом:

$$p + q \vee r \leq p + q + r \leq 2p + q + r, \quad p(p + q + r) \leq (p + q)(p + r).$$

В таком виде они очевидны. Равенства в них достигаются соответственно при $q \wedge r = 0$, $p = 0$ и $q \wedge r = 0$. $\square$

24. Пусть (A_n) и (B_n) — две последовательности событий, причем $A_n \subseteq B_n$ при каждом n . Показать, что $\overline{\lim} A_n \subseteq \overline{\lim} B_n$.

Решение. Утверждение следует из того, что если $\omega \in \bigcap_k A_{n_k}$ для некоторой последовательности индексов (n_k) , то $\omega \in \bigcap_k B_{n_k}$. $\square$

25. Пусть снова $(A_n)_{n \geq 1}$ и $(B_n)_{n \geq 1}$ — две последовательности событий, причем

$$P(\overline{\lim} A_n) = 1, \quad P(\overline{\lim} B_n) = 0.$$

Показать, что $P(\overline{\lim} A_n B_n) = 1$.

Решение. Согласно задаче II.1.8 имеем

$$\overline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n B_n \cup \overline{\lim} A_n \bar{B}_n.$$

В силу задачи II.1.24 получаем $P(\overline{\lim} A_n \bar{B}_n) = 0$, откуда находим, что $P(\overline{\lim} A_n B_n) = 1$. $\square$

26. Привести пример двух вероятностных мер P и Q , для которых *наименьшая мера* ν со свойствами $\nu \geq P$ и $\nu \geq Q$ есть не $P \vee Q$ ($= \max\{P, Q\}$), а $P + Q$.

Решение. Пусть $\Omega = \{0, 1\}$, $P(\{0\}) = 1$, $Q(\{1\}) = 1$. Тогда $\nu = P + Q$, так как $\nu(\{0\}), \nu(\{1\}) \geq 1$ и мера ν наименьшая, однако $\nu(\Omega) = 2 \neq 1 = P(\Omega) \vee Q(\Omega)$. $\square$

27. Пусть на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ задана такая последовательность вероятностных мер $P_1, P_2, \dots$, что для каждого $A \in \mathcal{F}$

$$P_n(A) \rightarrow P(A),$$

где $P(A)$ — некоторая функция множеств $A \in \mathcal{F}$. Доказать *теорему Витали—Хана—Сакса*, утверждающую, что

(а) P есть вероятностная мера на $(\Omega, \mathcal{F})$;

(б) $\limsup_k \limsup_n P_n(A_k) = 0$ для любых таких $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, что $A_k \downarrow \emptyset$.

Решение. (а) Справедливость всех свойств вероятностной меры для P , кроме счетной аддитивности, вытекает из свойств предела. Счетная аддитивность эквивалентна непрерывности в нуле (так как $P(\Omega) < \infty$) и следует из п. (б).

(б) Пусть $\limsup_k \limsup_n P_n(A_k) = L \geq 0$. Выбирая подходящие подпоследовательности (Q_n) и (B_k) мер (P_n) и событий (A_k) соответственно, можно гарантировать, что

$$Q_n(B_n \setminus B_{n+1}) \geq L/2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Более того (выбирая, если нужно, подпоследовательности уже из (Q_n) и (B_k)), можно также обеспечить соотношения

$$\lim_n \sum_{i=1}^{n-1} |Q_n(C_i) - P(C_i)| = \lim_n Q_n(B_{n+1}) = 0,$$

где $C_i = B_i \setminus B_{i+1}$, $i \geq 1$. Тогда, учитывая, что C_n попарно не пересекаются, получаем

$$\lim_n Q_{2n} \left(\bigcup_k C_{2k} \right) \geq \lim_n Q_{2n-1} \left(\bigcup_k C_{2k} \right) + L/2.$$

Отсюда следует, что $L = 0$, так как фигурирующие выше пределы равны по условию. $\square$

28. Построить на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ такие меры $\nu_1, \nu_2, \dots$, что последовательность $(\nu_n(B))_{n \geq 1}$ является невозрастающей для каждого $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ и такой, что предельная функция множеств $\nu(B) = \lim_n \nu_n(B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, не является (счетно-аддитивной) мерой.

Решение. Рассмотрим $\nu_n(B) = \lambda(B \setminus [-n, n])$, где λ — мера Лебега. Последовательность $\nu_n(B)$ не возрастает по n , и

$$\nu_n(B) = \infty \Leftrightarrow \lambda(B) = \infty.$$

В этом случае $\nu(B) = \infty$ при $\lambda(B) = \infty$ и 0 иначе. Очевидно, ν не есть счетно-аддитивная мера. $\square$

29. Пусть Ω — множество, состоящее из не более чем счетного числа элементов, и пусть $\mathcal{F}$ — некоторая σ -алгебра его подмножеств. Показать, что всегда найдется разбиение $D_1, D_2, \dots$ (т. е. $\bigcup_n D_n = \Omega$ и $D_m D_n = \emptyset$, $m \neq n$), порождающее $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F} = \left\{ \bigcup_{n \in N} D_n, N \subseteq \mathbb{N} \right\}.$$

Решение. Соответствующее разбиение можно построить, рассматривая на Ω классы эквивалентности, образованные соотношением « $\omega_1 \sim \omega_2$ », определяемым так:

$$\omega_1 \sim \omega_2 \Leftrightarrow (\forall A \in \mathcal{F}: \omega_1 \in A \Leftrightarrow \omega_2 \in A). \quad \square$$

30. В своей знаменитой книге [69] Хаусдорф ввел важное понятие «расстояния» $d(A, B)$ между двумя множествами A и B метрического пространства (E, ρ) . Несмотря на простоту определения, априори не очевидно, что такая конструкция вообще существует.

(а) Двумя естественными кандидатами на «расстояние» между A и B являются нижняя грань $m(A, B)$ и верхняя грань $M(A, B)$ расстояний $\rho(a, b)$, где a пробегает все точки множества A , а b — точки множества B . Убедиться, однако, что для $m(A, B)$ и $M(A, B)$ не выполнены аксиомы расстояния.

(b) Рассмотрим теперь $\delta(A, B)$ — длину наименьшей окрестности множества A , содержащей B (точнее говоря, нижнюю грань длин). Напомним, что ε -окрестностью множества A называется множество

$$A^\varepsilon = \{x: \rho(x, a) < \varepsilon \text{ для некоторого } a \in A\}.$$

Установить неравенство

$$m(A, B) \leq \delta(A, B) \leq M(A, B), \quad A, B \subseteq E.$$

(с) Доказать, что $\delta(A, B)$ удовлетворяет неравенству треугольника

$$\delta(A, B) \leq \delta(A, C) + \delta(C, B), \quad A, B, C \subseteq E,$$

однако не является симметричной функцией. Выяснить, в каком случае $\delta(A, B) = 0$. Придумать, как следует скорректировать $\delta(A, B)$, чтобы получить такую функцию $d(A, B)$, задающую расстояние хотя бы на системе $\mathcal{F}$ замкнутых ограниченных множеств в (E, ρ) , что

$$d(F_n, F) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \delta(F_n, F) \rightarrow 0, \\ \delta(F, F_n) \rightarrow 0. \end{cases}$$

(d) Наряду с теоретико-множественной операцией

$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

в полученном метрическом пространстве $(\mathcal{F}, d)$ важную роль играет операция верхнего замкнутого предела $[\lim] A_n$, определяемая следующим образом:

$x \in [\lim] A_n$, если любая окрестность точки x содержит общие с A_n точки для бесконечно многих n .

Аналогично задается $[\lim] A_n$:

$x \in [\lim] A_n$, если любая окрестность точки x содержит общие с A_n точки начиная с некоторого конечного $n = n(x)$.

Как соотносятся $[\lim] A_n$ и $\overline{\lim} A_n$? Установить следующее утверждение, названное Хаусдорфом *теоремой выбора*:

если пространство (E, ρ) *сепарабельно*, то из каждой последовательности $(F_n) \subseteq (\mathcal{F}, d)$ можно выбрать подпоследовательность $(F_m) \subseteq (F_n)$, для которой $[\lim] F_m = [\lim] F_m$.

(e) Доказать следующие импликации, справедливые для $F_n, F \in \mathcal{F}$ ($n \geq 1$):

$$\delta(F_n, F) \rightarrow 0 \Rightarrow F \subseteq [\lim] F_n,$$

$$\delta(F, F_n) \rightarrow 0 \Rightarrow F \supseteq [\lim] F_n,$$

в частности, означающие, что если предел множеств F_n в пространстве $(\mathcal{F}, d)$ существует, то он с необходимостью совпадает с $[\lim] F_n = \overline{\lim} F_n = [\lim] F_n$.

(f) Отметим, что, вообще говоря, из существования $F = [\lim] F_n$ не следует, что $F_n \rightarrow F$ в метрике d . Однако если пространство (E, ρ) *компактно*, т. е.

всякая бесконечная последовательность элементов E содержит сходящуюся в E подпоследовательность,

то $[\lim] F_n$ существует тогда и только тогда, когда существует предел F множеств F_n в метрике d , и при этом $F = [\lim] F_n$.

(g) Пусть μ — конечная мера на $(E, \mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ — борелевская σ -алгебра, и $F_n \rightarrow F$ в $(\mathcal{F}, d)$. Показать, что

$$\overline{\lim}_n \mu(F_n) \leq \mu(F).$$

Решение. Пункты (a) и (b) элементарны, поэтому мы сразу перейдем к п. (c).

(c) Если $C \subseteq A^\varepsilon$ и $B \subseteq C^\gamma$, то, очевидно, $B \subseteq A^{\varepsilon+\gamma}$. Отсюда вытекает неравенство треугольника. Несимметричность формулы $\delta(A, B)$ вытекает из того, что $\delta(\{a\}, B) = M(\{a\}, B)$ и $\delta(B, \{a\}) = m(B, \{a\})$. При этом $\delta(A, B) = 0$ только в том случае, когда точки множества A всюду плотны в B . В качестве $d(A, B)$ проще всего взять

$$d(A, B) = \delta(A, B) + \delta(B, A).$$

При этом для всех $A, B, C \subseteq E$ выполняется равенства

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \delta(A, B) + \delta(B, A) \leq [\delta(A, C) + \delta(C, B)] + [\delta(B, C) + \delta(C, A)] = \\ &= [\delta(A, C) + \delta(C, A)] + [\delta(B, C) + \delta(C, B)] = d(A, C) + d(B, C), \end{aligned}$$

причем $d(A, B) = 0$ для ограниченных замкнутых множеств A и B только в том случае, если $A = B$.

(d) Множество $[\overline{\lim}]A_n$ есть замыкание множества $\overline{\lim} A_n$. Пусть теперь (E, ρ) сепарабельно. Итак для фиксированных $F_n \in \mathcal{F}$, $n \geq 1$, требуется выбрать такую подпоследовательность $(F_m) \subseteq (F_n)$, что $[\overline{\lim}]F_m = [\underline{\lim}]F_m$. Поскольку в таком виде это доказать весьма непросто, попробуем перейти к эквивалентному равенству в дополнениях.

Обозначим $G_n = \bar{F}_n$. Требуется выделить такую подпоследовательность $(G_m) \subseteq (G_n)$, что

$$(\underline{\lim})G_m = (\overline{\lim})G_m,$$

где $(\underline{\lim})G_m$ — дополнение к $[\overline{\lim}]F_m$, состоящее из всех точек x , для которых найдется содержащая их окрестность U , лежащая во всех G_m начиная с некоторого m . Аналогично определяется $(\overline{\lim})G_m$. Сепарабельность пространства гарантирует, что в качестве окрестностей, возникающих в определении $(\underline{\lim})$ и $(\overline{\lim})$, можно брать лишь элементы некоторого счетного множества окрестностей $\mathcal{U}$, например те, которые являются шарами, содержащими хотя бы одну точку из $(\overline{\lim})G_n$, с рациональными радиусами и с центрами в счетной всюду плотной системе точек в E .

Любую окрестность $U \subseteq (\overline{\lim})G_n$ из заданной системы $\mathcal{U}$ будем называть «хорошей», если $U \subseteq (\underline{\lim})G_n$, и «плохой» в противном слу-

чае, а также «неприемлемой», если $U \not\subseteq (\overline{\lim})G_n$. Переход к подпоследовательности $(G_k) \subseteq (G_n)$ может сделать из «плохой» окрестности либо «хорошую», либо «неприемлемую». При этом «неприемлемая» окрестность остается «неприемлемой», то же верно и для «хорошей» окрестности. Заметим также, что объединение «хороших» окрестностей для (G_k) есть в точности $(\underline{\lim})G_k$.

Идея теперь состоит в том, чтобы последовательно избавиться от всех «плохих» окрестностей, переходя каждый раз к некоторой подпоследовательности множеств G_n . Итак пусть $U_1, U_2, \dots$ — все элементы множества окрестностей $\mathcal{U}$. Возьмем U_1 . Если окрестность U_1 «неприемлемая» или «хорошая», то перейдем к U_2 . Иначе перейдем к любой фиксированной подпоследовательности $(G_{n^{(1)}}) \subseteq (G_n)$, для которой U_1 — «хорошая» окрестность. Будем повторять ту же процедуру для $U_2, U_3, \dots$, выбирая уже подходящие подпоследовательности $(G_{n^{(2)}}) \subseteq (G_{n^{(1)}})$, $(G_{n^{(3)}}) \subseteq (G_{n^{(2)}})$, $\dots$

В качестве искомой подпоследовательности (m) , для которой $(\underline{\lim})G_m = (\overline{\lim})G_m$, следует взять *диагональную подпоследовательность* $(n_k^{(k)}, k \geq 1)$, где $(n^{(i)}) = (n_1^{(i)}, n_2^{(i)}, \dots)$ — возрастающие последовательности индексов, вложенные в i и полученные в результате описанной выше процедуры. Действительно, для такой подпоследовательности по построению все окрестности $U \in \mathcal{U}$ будут либо «хорошими», либо «неприемлемыми». При этом предположение существования точки $x \in (\overline{\lim})G_m \setminus (\underline{\lim})G_m$, в частности, означает, что найдется «плохая» окрестность, покрывающая x и лежащая в $\mathcal{U}$.

(е) Сходимость $\delta(F_n, F) \rightarrow 0$ означает, что для фиксированного $\varepsilon > 0$ начиная с некоторого $n = n(\varepsilon)$ все точки множества F будут лежать в ε -окрестности множества F_n . Другими словами, для всех точек $x \in F$ в ε -окрестность x попадет хотя бы одна точка множества F_n при $n \geq n(\varepsilon)$. В силу произвольности ε отсюда следует первая импликация. Вторая устанавливается точно так же.

(f) *Достаточность* установлена в п. (е). Докажем *необходимость*. Будем далее писать $\delta(a, B)$ и $\delta(A, b)$ вместо $\delta(\{a\}, B)$ и $\delta(A, \{b\})$ соответственно. Заметим вначале, что функция $\delta(A, b)$ равномерно по $A \subseteq E$ непрерывна по b , поскольку

$$|\delta(A, b) - \delta(A, c)| \leq \rho(b, c), \quad A \subseteq E, \quad b, c \in E,$$

а последнее легко получить, переходя к нижней грани по $a \in A$ в неравенствах

$$\rho(a, b) \leq \rho(a, c) + \rho(b, c), \quad \rho(a, c) \leq \rho(a, b) + \rho(b, c).$$

Итак, пусть $F = [\underline{\lim}]F_n = [\overline{\lim}]F_n$. Покажем, что $\delta(F_k, [\underline{\lim}]F_n) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Пусть это не так, т. е. $\delta(F_m, [\underline{\lim}]F_n) \geq 2\varepsilon$ для некоторых $(m) \subseteq (n)$ и некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда найдется последовательность таких точек $x_m \in [\underline{\lim}]F_n$, что $\delta(F_m, x_m) \geq \varepsilon$. Выделим из (x_m) сходящуюся подпоследовательность $x_l \rightarrow x$ (здесь $(l) \subseteq (m)$), которая будет лежать в $[\underline{\lim}]F_n$ (в силу замкнутости $[\underline{\lim}]F_n$). Но это невозможно, так как, с одной стороны, точка x может быть получена как предел некоторых точек $z_n \in F_n$ и, значит, $\delta(F_n, x) \rightarrow 0$. С другой же стороны, в силу равномерной непрерывности $\delta(A, b)$ имеем

$$\delta(F_l, x_l) - \delta(F_l, x) \rightarrow 0,$$

и тем самым $\delta(F_l, x) \geq \varepsilon$ начиная с некоторого l . Таким образом, мы доказали, что

$$\delta(F_k, [\underline{\lim}]F_n) = \delta(F_k, F) \rightarrow 0.$$

Аналогично получается, что $\delta([\overline{\lim}]F_n, F_k) = \delta(F, F_k) \rightarrow 0$.

(g) Утверждение следует из п. (е) и леммы Фату для множеств (см. задачу II.1.16). $\square$

§ 2. Алгебры и σ -алгебры. Измеримые пространства

1. Пусть $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ — σ -алгебры подмножеств пространства Ω . Будут ли σ -алгебрами системы множеств

$$\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \equiv \{A: A \in \mathcal{B}_1 \text{ и } A \in \mathcal{B}_2\},$$

$$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \equiv \{A: A \in \mathcal{B}_1 \text{ или } A \in \mathcal{B}_2\}?$$

Пусть $\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2$ есть наименьшая σ -алгебра $\sigma(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, порожденная множествами из σ -алгебр $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$. Показать, что $\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2$ совпадает с наименьшей σ -алгеброй, порожденной множествами вида $B_1 \cap B_2$, где $B_1 \in \mathcal{B}_1$ и $B_2 \in \mathcal{B}_2$.

Решение. Прямой проверкой получаем, что $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ есть σ -алгебра. Система множеств $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ является σ -алгеброй тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$ или $\mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}_1$. В самом деле, пусть $\mathcal{B}_1 \not\subseteq \mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_2 \not\subseteq \mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ — σ -алгебра. Тогда найдутся такие множества $A \in \mathcal{B}_1$ и $B \in \mathcal{B}_2$, что $A \notin \mathcal{B}_2$ и $B \notin \mathcal{B}_1$, и хотя бы два из трех множеств $B \setminus A$, $A \setminus B$, $A \triangle B$, лежащих в $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, должны содержаться в каком-то из $\mathcal{B}_i$, $i = 1, 2$, к примеру в $\mathcal{B}_1$. Легко проверить, что если два из указанных множеств лежат в алгебре $\mathcal{B}_1$, то и третье там тоже

будет лежать. Поэтому $\mathcal{B}_1$ содержит A , $B \setminus A$, $A \setminus B$. Следовательно, $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$ и $(A \cap B) \cup (B \setminus A) = B$ также содержатся в $\mathcal{B}_1$. Мы получили противоречие, так что в рассматриваемом случае $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ не является даже алгеброй.

Очевидно, $\mathcal{B} \subseteq \sigma(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, где $\mathcal{B} = \sigma(B_1 \cap B_2, B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2)$. Обратное включение вытекает из равенств $B_1 = B_1 \cap \Omega$, $B_2 = B_2 \cap \Omega$, показывающих, что если $B_1 \in \mathcal{B}_1$, $B_2 \in \mathcal{B}_2$, то $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. $\square$

2. Пусть $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \dots\}$ — некоторое счетное разбиение Ω ($D_n \neq \emptyset$). Какова мощность σ -алгебры $\sigma(\mathcal{D})$?

Решение. Сигма-алгебра $\sigma(\mathcal{D})$ содержит континуум различных элементов, в чем можно убедиться, поставив в соответствие каждой последовательности $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, состоящей из нулей и единиц, множество $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cup D_2^{\alpha_2} \cup \dots$, где $D_i^{\alpha_i} = \emptyset$, если $\alpha_i = 0$, и $D_i^{\alpha_i} = D_i$, если $\alpha_i = 1$, и заметив, что в сумме такие D^α составляют $\sigma(\mathcal{D})$. $\square$

3. Показать, что

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Решение. Множество $G_n \times G_1 \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, когда G_n и G_1 — открытые множества соответственно в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}$, поэтому $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1})$. Обратно, любое открытое множество G_{n+1} в $\mathbb{R}^{n+1}$ представляется в виде

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} (a_{1k}, b_{1k}) \times \dots \times (a_{(n+1)k}, b_{(n+1)k}), \quad (*)$$

где $a_{ik} < b_{ik}$ при всех i, k . Действительно, любая точка из G_{n+1} может быть покрыта открытым параллелепипедом вида

$$(a_1, b_1) \times \dots \times (a_{n+1}, b_{n+1}),$$

содержащимся в G_{n+1} и таким, что $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$, $1 \leq i \leq n+1$. Число таких параллелепипедов *не более чем счетно*, и, значит, верно представление (*), из которого уже следует справедливость обратного включения

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1}). \quad \square$$

4. Доказать, что следующие множества *принадлежат* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$:

$$\{x: \overline{\lim}_n x_n \leq a\}, \quad \{x: \underline{\lim}_n x_n > a\},$$

$\{x: x_n \rightarrow\}$ — множество тех x , для которых $\lim_n x_n$ существует и конечен,

$$\left\{x: \sum_{n \geq 1} |x_n| > a\right\}, \quad \left\{x: \sum_{k=1}^n x_k = 0 \text{ хотя бы для одного } n \geq 1\right\},$$

где $x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$, а $a \in \mathbb{R}$.

Решение. Принадлежность к $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ первого множества следует из формулы

$$\{x: \overline{\lim}_n x_n \leq a\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{x: x_n < a + \frac{1}{k}\right\}.$$

Словесное выражение этой формулы:

$$\overline{\lim}_n x_n \leq a \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}: \forall n \geq m \ x_n < a + \frac{1}{k}.$$

Аналогичным образом доказывается принадлежность к $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ оставшихся множеств. $\square$

5. Доказать, что следующие множества *не* принадлежат $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,1]})$:

$$\{x: x_t = 0 \text{ по крайней мере для одного } t \in [0, 1]\},$$

$$\{x: \text{функция } x_t \text{ непрерывна в фиксированной точке } t_0 \in [0, 1]\},$$

где $x = (x_t)_{0 \leq t \leq 1} \in \mathbb{R}^{[0,1]}$.

Решение. Все множества в $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,1]})$ определяются «поведением» функций в счетном числе точек. В частности, для любого $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,1]})$ всегда найдутся такие $t_1, t_2, \dots \in [0, 1]$, что если $x = (x_t) \in B$ и $y_{t_n} = x_{t_n}$, $n \geq 1$, для некоторого $y = (y_t)$, то $y \in B$. Если предположить, что первое множество совпадает с некоторым $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,1]})$, и взять какую-нибудь функцию $x = (x_t)$, равную нулю в одной точке $t = s \notin \{t_1, t_2, \dots\}$, а затем рассмотреть функцию $y = (y_t)$, не равную x лишь в точке s , то получим противоречие с вышеуказанным свойством. Аналогично рассматривается второе множество. $\square$

6. Пусть D — пространство всех функций $x = (x_t)$, $t \in [0, 1]$, являющихся непрерывными справа для всех $t < 1$ и имеющих пределы слева в любой точке $t > 0$. Доказать, что функция

$$d(x, y) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \left[\sup_t |x_t - y_{\lambda(t)}| + \sup_t |t - \lambda(t)| \right]$$

задает метрику (Скорехода) на D , где Λ — множество строго возрастающих непрерывных функций $\lambda = \lambda(t)$ на $[0, 1]$, удовлетворяющих условию $\lambda([0, 1]) = [0, 1]$.

Решение. Поскольку $\lambda^{-1} \in \Lambda$, а также

$$\sup_t |u_t - v_{\lambda(t)}| = \sup_t |u_{\lambda^{-1}(t)} - v_t|$$

при $(u_t, v_t) = (x_t, y_t)$ или $(u_t, v_t) = (t, t)$, получаем, что

$$d(x, y) = d(y, x).$$

Проверим неравенство треугольника. Пусть $z \in D$, тогда для каждого $\lambda_0 \in \Lambda$ имеем

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq \sup_t |x_t - z_{\lambda_0(t)}| + \sup_t |t - \lambda_0(t)| + \\ &\quad + \inf_{\lambda \in \Lambda} [\sup_t |z_{\lambda_0(t)} - y_{\lambda(t)}| + \sup_t |\lambda_0(t) - \lambda(t)|] \leq \\ &\leq \sup_t |x_t - z_{\lambda_0(t)}| + \sup_t |t - \lambda_0(t)| + \\ &\quad + \inf_{\lambda \in \Lambda} [\sup_t |z_t - y_{\lambda_0^{-1} \circ \lambda(t)}| + \sup_t |t - \lambda_0^{-1} \circ \lambda(t)|] = \\ &= \sup_t |x_t - z_{\lambda_0(t)}| + \sup_t |t - \lambda_0(t)| + d(z, y), \end{aligned}$$

где последнее равенство следует из того, что композиция $\lambda_0^{-1} \circ \lambda$ пробегает все множество Λ , когда λ пробегает все Λ . Взяв теперь нижнюю грань по $\lambda_0 \in \Lambda$, получаем неравенство треугольника.

Осталось проверить, что равенство $d(x, y) = 0$ эквивалентно тому, что $x = y$. Если $d(x, y) = 0$, то для некоторых $\lambda_n \in \Lambda$, $n \geq 1$, выполняется условие

$$\sup_t |x_t - y_{\lambda_n(t)}| + \sup_t |t - \lambda_n(t)| \rightarrow 0.$$

Другими словами, для каждого $t \in [0, 1]$ значение x_t может быть получено пределом значений y_s , где s лежит в сколь угодно малой окрестности точки t . Следовательно,

$$x_t = \lim_{s \rightarrow t+} y_s \quad \text{или} \quad x_t = \lim_{s \rightarrow t-} y_s.$$

В частности, $x_t = y_t$ во всех точках непрерывности функции y , которые всегда образуют счетное всюду плотное множество в $[0, 1]$ (проверьте). Значения функций из D однозначно восстанавливаются по любому такому множеству, поэтому $x = y$. $\square$

7. Доказать, что $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 1$, и $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^\infty) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$.

Решение. В пространстве $\mathbb{R}^d$ любой шар может быть представлен в виде счетного объединения кубов, ребра которых параллельны соответствующим координатным осям. Поэтому все шары, порождающие $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$, лежат в $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, так что $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Аналогично устанавливается обратное включение.

Перейдем к пространству $\mathbb{R}^\infty$. Любое открытое множество в $\mathbb{R}^\infty$ представляется в виде *счетного* объединения шаров вида $\{x: \rho_\infty(x, y) < \rho\}$. Последнее — одно из свойств сепарабельных метрических пространств, каковым является $(\mathbb{R}^\infty, \rho_\infty)$. Поэтому любое открытое множество лежит в $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^\infty)$.

Докажем включение $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty) \subseteq \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^\infty)$. Проекция $\pi: \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^d$, заданная формулой $\pi(x_1, x_2, \dots) = (x_{t_1}, \dots, x_{t_d})$, является непрерывной функцией: $\lim_n \pi(z_n) = \pi(z)$, когда $z_n, z \in \mathbb{R}^\infty$ и $\rho_\infty(z_n, z) \rightarrow 0$. Следовательно, прообраз любого открытого параллелепипеда в $\mathbb{R}^d$ открыт в $\mathbb{R}^\infty$. Поэтому $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty) \subseteq \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^\infty)$, где учтено, что такие прообразы порождают $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$.

Обратно, имеем

$$\{x: \rho_\infty(x, y) < \rho\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{d=1}^{\infty} \left\{x: \rho_d(x, y) < \rho - \frac{1}{n}\right\}$$

при $\rho_d(x, y) = \sum_{i=1}^d \frac{\rho_1(x_i, y_i)}{2^i}$,

где $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots)$. Множества $\{(x_1, \dots, x_d): \rho_d(x, y) < \rho - n^{-1}\}$ открыты в $\mathbb{R}^d$ и лежат в $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Из этого следует, что

$$\left\{x: \rho_d(x, y) < \rho - \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty) \quad \text{и} \quad \{x: \rho_\infty(x, y) < \rho\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty),$$

а значит, $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^\infty) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$. □

8. По определению система $\mathcal{J}$ подмножеств Ω называется λ -системой, если

- (a) $\Omega \in \mathcal{J}$;
- (b) $(A, B \in \mathcal{J} \text{ и } A \subseteq B) \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{J}$;
- (c) $(A_n \in \mathcal{J}, n \geq 1, \text{ и } A_n \uparrow A) \Rightarrow A \in \mathcal{J}$.

Проверить, что имеется другое (эквивалентное) задание λ -системы с помощью условий

- (a) $\Omega \in \mathcal{J}$;
- (b') $A \in \mathcal{J} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{J}$;
- (c') $(A_n \in \mathcal{J}, n \geq 1, \text{ и } A_n \cap A_m = \emptyset \text{ для } n \neq m) \Rightarrow \bigcup A_n \in \mathcal{J}$.

Решение. Пусть выполнены условия (a), (b) и (c). Покажем, что имеют место условия (b') и (c'). Из соотношений $\bar{B} = \Omega \setminus B$ и $\Omega \in \mathcal{J}$ следует условие (b'). Заметим также, что если $A, B \in \mathcal{J}$ и $A \cap B = \emptyset$, то $A \cup B = \bar{A} \setminus B \in \mathcal{J}$ (в силу условий (a) и (b)). Пусть теперь $B_n \in \mathcal{J}$, $n \geq 1$, и $B_n \cap B_m = \emptyset$ для $n \neq m$, тогда множества $A_n = \bigcup_{i=1}^n B_i$, $n \geq 1$, лежат в $\mathcal{J}$ и возрастают до $A = \bigcup_{n \geq 1} B_n$. Следовательно, согласно условию (c) множество A принадлежит $\mathcal{J}$, и, значит, выполнено условие (c').

Пусть теперь $\mathcal{J}$ удовлетворяет условиям (a), (b') и (c'). Докажем, что имеют место также условия (b) и (c). Условие (c') гарантирует, что

$A \cup B \in \mathcal{I}$ при $A, B \in \mathcal{I}$, $A \cap B = \emptyset$, а из этого с учетом равенства $B \setminus A = \bar{A} \cap B$, справедливого при $A \subseteq B$, следует условие (b). Если теперь $A_n \in \mathcal{I}$, $n \geq 1$, и $A_n \uparrow A (= \bigcup A_n)$, то множества $A_1, A_2 \setminus A_1, A_3 \setminus A_2 \dots$ попарно не пересекаются и (как уже было установлено) лежат в $\mathcal{I}$. Поэтому $\bigcup A_n = \bigcup (A_{n+1} \setminus A_n) \in \mathcal{I}$. Тем самым мы проверили условие (c). $\square$

9. Теорема о монотонных классах утверждает, что $\mu(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$ для любой алгебры множеств $\mathcal{A}$. Используя этот факт, установить следующее утверждение: если $\mathcal{G}$ есть π - λ -система, то $\mathcal{G}$ является σ -алгеброй.

Решение. Система $\mathcal{G}$ замкнута относительно пересечений (так как это π -система) и дополнений (так как это λ -система), поэтому $\mathcal{G}$ является алгеброй. При этом $\mathcal{G}$ есть монотонный класс, поскольку таковыми являются все λ -системы. В самом деле, если $A_n \in \mathcal{G}$, $n \geq 1$, и $A_n \uparrow A$, то $A \in \mathcal{G}$ (одно из свойств λ -системы). Если же $A_n \in \mathcal{G}$, $n \geq 1$, и $A_n \downarrow A$, то $\bar{A}_n \in \mathcal{G}$, $\bar{A}_n \uparrow \bar{A} \in \mathcal{G}$ и, значит, $A \in \mathcal{G}$.

Другими словами, мы показали, что $\mathcal{G}$ есть алгебра и $\mathcal{G} = \mu(\mathcal{G})$. Следовательно, по теореме о монотонных классах система $\mathcal{G}$ является σ -алгеброй. $\square$

10. Пусть $\mathcal{I} = \{A \in \mathcal{F} : I_A \in \mathcal{H}\}$, где $\mathcal{H}$ — некоторая система $\mathcal{F}$ -измеримых функций, удовлетворяющая следующим свойствам:

- (a) если $f, g \in \mathcal{H}$, то $f + g \in \mathcal{H}$ и $cf \in \mathcal{H}$ для всякого $c \in \mathbb{R}$;
- (b) если $h_n \in \mathcal{H}$, $0 \leq h_n \uparrow h$, то $h \in \mathcal{H}$;
- (c) $1 = I_\Omega \in \mathcal{H}$.

Доказать, что $\mathcal{I}$ есть λ -система подмножеств $\mathcal{F}$.

Решение. Из свойств (a) и (b) следует, что

1) если $I_A, I_B \in \mathcal{H}$ и $A \subseteq B$, то $I_{B \setminus A} = I_B + (-1)I_A \in \mathcal{H}$;

2) если $I_{A_n} \in \mathcal{H}$, $n \geq 1$ и $I_{A_n} \uparrow h$, то $h = I_{\bigcup_{n=1}^\infty A_n} \in \mathcal{H}$.

Имея утверждения 1 и 2, уже просто вывести искомое свойство. $\square$

11. Говорят, что σ -алгебра является *счетно-порожденной* или *сепарабельной*, если она порождается некоторым счетным классом подмножеств.

(a) Показать, что σ -алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ борелевских множеств в $\mathbb{R}$ является счетно-порожденной.

(b) Показать на примере, что возможна ситуация, когда две σ -алгебры $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ таковы, что алгебра $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_2$ счетно-порождена, но $\mathcal{F}_1$ такой не является.

Решение. (a) σ -алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ порождена множествами вида $(a, b]$, $a, b \in \mathbb{Q}$.

(b) Возьмем $\mathcal{F}_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, и пусть $\mathcal{F}_1$ — все не более чем счетные множества в $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. $\square$

12. Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ — измеримое пространство, причем σ -алгебра $\mathcal{F}$ является *счетно-порожденной* некоторым счетным разбиением $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \dots\}$. Показать, что σ -алгебра $\mathcal{F}$ совпадает с σ -алгеброй

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\},$$

порожденной случайной величиной

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n} (2I_{D_n} + 3).$$

Решение. Случайная величина, очевидным образом, измерима относительно $\mathcal{F}$ (как борелевская функция индикаторов I_{D_n}). Поэтому $\sigma(X) \subseteq \mathcal{F}$. Обратно,

$$D_n = \{n\text{-я цифра в десятичном разложении } X \text{ равна } 5\},$$

следовательно, $\mathcal{F} = \sigma(D_1, D_2, \dots) \subseteq \sigma(X)$. $\square$

13. Показать, что σ -алгебра $\mathcal{G}$ является *счетно-порожденной* тогда и только тогда, когда $\mathcal{G} = \sigma(X)$ для некоторой случайной величины X .

Решение. Если $\mathcal{G} = \sigma(X)$, то $\mathcal{G} = \sigma(\{a < X \leq b\} : a, b \in \mathbb{Q})$. Обратно, если $\mathcal{G} = \sigma(A_n, n \geq 1)$, то положим

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n} (2I_{A_n} + 3).$$

Далее следует рассуждать, как при решении задачи II.2.12. $\square$

14. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — полное вероятностное пространство (см. подробнее задачу II.2.36), $\mathcal{G}$ — σ -подалгебра σ -алгебры $\mathcal{F}$ и $\mathcal{E}_1 \supseteq \mathcal{E}_2 \supseteq \dots$ — последовательность σ -подалгебр σ -алгебры $\mathcal{F}$. Будем предполагать, что все σ -подалгебры пополнены множествами из $\mathcal{F}$ нулевой P -меры. На первый взгляд представляется весьма естественным, что должно выполняться (по крайней мере с точностью до множеств меры нуль) следующее соотношение:

$$\bigcap_n \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{E}_n) = \sigma\left(\mathcal{G}, \bigcap_n \mathcal{E}_n\right), \quad (*)$$

или, в других обозначениях,

$$\bigcap_n (\mathcal{G} \vee \mathcal{E}_n) = \mathcal{G} \vee \bigcap_n \mathcal{E}_n. \quad (**)$$

Здесь $\mathcal{G} \vee \mathcal{E}_n \equiv \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{E}_n)$ — наименьшая σ -алгебра, порожденная множествами из $\mathcal{G}$ и $\mathcal{E}_n$; равенство (с точностью до множеств меры нуль)

произвольных пополненных σ -подалгебр $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$, принадлежащих $\mathcal{F}$, понимается в том смысле, что для каждого $A \in \mathcal{H}_1$ найдется такое $B \in \mathcal{H}_2$ (и наоборот, для каждого $B \in \mathcal{H}_2$ найдется такое множество $A \in \mathcal{H}_1$), что $P(A \Delta B) = 0$.

Однако следующий пример из книги [110] показывает, что это не так, т. е. операции взятия супремума « $\vee$ » и пересечения « $\cap$ » σ -алгебр, вообще говоря, неперестановочны.

(а) Пусть $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые бернуллиевские величины,

$$P(\xi_n = -1) = P(\xi_n = 1) = \frac{1}{2}, \quad n \geq 0.$$

Положим $X_n = \xi_0 \xi_1 \dots \xi_n$ и

$$\mathcal{G} = \sigma(\xi_1, \xi_2, \dots), \quad \mathcal{E}_n = \sigma(X_k, k \geq n).$$

Показать, что здесь

$$\bigcap_n \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{E}_n) \neq \sigma\left(\mathcal{G}, \bigcap_n \mathcal{E}_n\right).$$

(См. задачу П.3.7.)

(b) Тот факт, что для σ -алгебр операции $\vee$ и $\cap$ неперестановочны, следует из более простого, нежели в п. (а), утверждения (см. [48]), которое предлагается доказать: если ξ_1 и ξ_2 — случайные величины из п. (а) и $\mathcal{E}_1 = \sigma(\xi_1)$, $\mathcal{E}_2 = \sigma(\xi_2)$, $\mathcal{G} = \sigma(\xi_1 \xi_2)$, то

$$(\mathcal{G} \vee \mathcal{E}_1) \cap (\mathcal{G} \vee \mathcal{E}_2) \neq \mathcal{G} \vee (\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2)$$

и

$$(\mathcal{G} \cap \mathcal{E}_1) \vee (\mathcal{G} \cap \mathcal{E}_2) \neq \mathcal{G} \cap (\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2).$$

Решение. (а) Покажем, что величина ξ_0 измерима относительно $\bigcap_n \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{E}_n)$ и, значит, $\bigcap_n \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{E}_n) = \sigma(\mathcal{G}, \xi_0)$. В то же самое время $\bigcap_n \mathcal{E}_n = \{\emptyset, \Omega\}$ с точностью до множеств нулевой меры, так что $\sigma(\mathcal{G}, \bigcap_n \mathcal{E}_n) = \mathcal{G}$. Отсюда, конечно, следует требуемое утверждение.

Поскольку

$$\xi_0 = \frac{X_n}{\xi_1 \dots \xi_n}, \quad n \geq 1,$$

случайная величина ξ_0 измерима относительно $\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{E}_n)$ как борелевская функция от $(X_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$. Следовательно, она измерима относительно $\bigcap_n \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{E}_n)$.

Далее $X_n, n \geq 1$, образуют последовательность н. о. р. бернуллиевских величин,

$$P(X_n = -1) = P(X_n = 1) = \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим произвольное множество $B \in \bigcap_n \mathcal{E}_n$. Вследствие задачи II.3.7 и того, что $B \in \mathcal{E}_1$, для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно найти достаточно большое N и такое множество $B_\varepsilon \in \sigma(X_1, X_2, \dots, X_N)$, что

$$P(B \triangle B_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

Однако $\mathcal{E}_{N+1}$ не зависит от $\sigma(X_1, X_2, \dots, X_N)$ (так как X_n — н. о. р.) и $B \in \mathcal{E}_{N+1}$. Отсюда легко вывести, что B с необходимостью не зависит от самого себя, т. е.

$$(P(B \cap B_\varepsilon) \approx) P(B \cap B) = P(B)^2 (\approx P(B)P(B_\varepsilon)),$$

где $\approx$ означает приближенное равенство. Таким образом, $P(B) = 0$ или 1, а $\bigcap_n \mathcal{E}_n = \{\emptyset, \Omega\}$.

(b) С точностью до множеств меры нуль имеем $\mathcal{G} \vee \mathcal{E}_1 = \mathcal{G} \vee \mathcal{E}_2 = \sigma(\xi_1, \xi_2)$, так как

$$\xi_1 = \frac{\xi_1 \xi_2}{\xi_2}, \quad \xi_2 = \frac{\xi_1 \xi_2}{\xi_1}.$$

Далее, поскольку ξ_1 и ξ_2 независимы, $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ пересекаются по множествам, не зависящим от себя самих, т. е. имеющим меру нуль или единица. Следовательно, $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \{\emptyset, \Omega\}$. Итак,

$$(\mathcal{G} \vee \mathcal{E}_1) \cap (\mathcal{G} \vee \mathcal{E}_2) = \sigma(\xi_1, \xi_2) \neq \mathcal{G} = \mathcal{G} \vee (\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2).$$

Аналогично устанавливается, что

$$\mathcal{G} \cap (\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2) = \mathcal{G} \cap \sigma(\xi_1, \xi_2) = \mathcal{G} \neq \{\emptyset, \Omega\} = (\mathcal{G} \cap \mathcal{E}_1) \vee (\mathcal{G} \cap \mathcal{E}_2)$$

($\xi_1 \xi_2$ и ξ_i , $i = 1$ или 2, независимы, и, значит, $\mathcal{G} \cap \mathcal{E}_i = \{\emptyset, \Omega\}$). $\square$

15. Пусть $\mathcal{L}$ — λ -система подмножеств Ω . Тогда если $A, B \in \mathcal{L}$ и $AB = \emptyset$, то $A \cup B \in \mathcal{L}$.

Решение. По определению λ -системы $\Omega \setminus A = B \cup C \in \mathcal{L}$ при $C = \Omega \setminus (A \cup B)$. Кроме того, $C = (B \cup C) \setminus B \in \mathcal{L}$. Окончательно получаем $A \cup B = \Omega \setminus C \in \mathcal{L}$. $\square$

16. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — две σ -алгебры подмножеств в Ω . Положим

$$d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 4 \sup \{ |P(AB) - P(A)P(B)| : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B} \}.$$

Показать, что эта величина, характеризующая степень зависимости между $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, имеет следующие свойства:

- (a) $0 \leq d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq 1$;
- (b) $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$, если и только если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ независимы;
- (c) $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 1$, если и только если для некоторых $A_n \in \mathcal{A}$ и $B_n \in \mathcal{B}$, $n \geq 1$, выполняются условия

$$P(A_n) \rightarrow \frac{1}{2}, \quad P(A_n \triangle B_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Решение. (а) Поскольку

$$P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}), \quad P(B) = P(\bar{A}B) + P(AB),$$

мы получаем

$$|P(AB) - P(A)P(B)| \leq \sup |x - (x+y)(x+z)| = \frac{1}{4},$$

где верхняя грань берется по всем $x, y, z \in [0, 1]$, сумма которых $x + y + z$ не больше 1, и достигается либо при $x = 1/2, y = z = 0$, либо при $x = 0, y = z = 1/2$. Из указанной оценки следует искомое неравенство.

(b) Утверждение следует из определения независимости σ -алгебр.

(c) *Достаточность* приведенного условия очевидна. Докажем его *необходимость*. Допустим, что для некоторых $A_n \in \mathcal{A}$ и $B_n \in \mathcal{B}$, $n \geq 1$, выполняется равенство

$$\lim_n |P(A_n B_n) - P(A_n)P(B_n)| = \frac{1}{4}.$$

В силу рассуждений из п. (а) последнее может иметь место только в том случае, если $P(A_n \triangle B_n) \wedge P(A_n \triangle \bar{B}_n) \rightarrow 0$ и $P(A_n) \rightarrow 1/2$. Заменяя (если потребуется) B_n на $\bar{B}_n$, можно считать, что $P(A_n \triangle B_n) \rightarrow 0$. $\square$

17. Доказать существование и единственность классов $\lambda(\mathcal{E})$ и $\pi(\mathcal{E})$, содержащих систему $\mathcal{E}$ подмножеств множества Ω .

Решение. Множество всех π -систем, содержащих $\mathcal{E}$, непусто, так как содержит множество всех подмножеств множества Ω . Тогда пересечение всех π -систем непусто (поскольку во всех из них лежит $\mathcal{E}$) и является наименьшей π -системой, содержащей $\mathcal{E}$. Аналогичное верно для λ -систем. $\square$

18. Пусть $\mathcal{A}$ есть некоторая алгебра множеств, обладающая тем свойством, что любая последовательность $(A_n)_{n \geq 1}$ непересекающихся множеств $A_n \in \mathcal{A}$ такова, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Доказать, что тогда $\mathcal{A}$ является σ -алгеброй.

Решение. Утверждение есть элементарное следствие равенства

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

где A_n — попарно непересекающиеся множества, заданные соотношениями

$$A_1 = B_1, \quad A_2 = B_2 \setminus B_1, \quad A_3 = B_3 \setminus (B_1 \cup B_2), \quad \dots \quad \square$$

19. (См. [91].) Пусть $(\mathcal{A}_n)_{n \geq 1}$ есть строго возрастающая последовательность алгебр, т. е. $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$, $n \geq 1$. Показать, что $\mathcal{A} = \bigcup_n \mathcal{A}_n$ является алгеброй.

Нетрудно привести пример σ -алгебр $\mathcal{A}_n$, для которых $\mathcal{A}$ не является σ -алгеброй. Однако имеет место куда более сильное утверждение: каковы бы ни были алгебры $\mathcal{A}_n$ (строго возрастающие по n), $\mathcal{A}$ не может быть σ -алгеброй.

Замечание. Последнее утверждение сохраняет свою силу, если вместо вложенных алгебр $\mathcal{A}_n$ рассматривать вложенные π -системы множеств, т. е. системы, замкнутые относительно конечных пересечений (см. доказательство ниже).

Решение. Проверим, что $\mathcal{A} = \bigcup_n \mathcal{A}_n$ есть алгебра. Если $A \in \mathcal{A}$, то $A \in \mathcal{A}_n$ начиная с некоторого n и, следовательно, $\bar{A} \in \mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}$. Аналогично устанавливается, что $A \cup B \in \mathcal{A}$, когда $A, B \in \mathcal{A}$. Тем самым $\mathcal{A}$ замкнуто относительно операций (конечного) объединения и дополнения, поэтому является алгеброй.

Покажем теперь, что $\mathcal{A}$ не есть σ -алгебра. Допустим противное. Выберем вначале непересекающиеся множества $A_n \in \mathcal{A}_n \setminus \mathcal{A}_{n-1}$, $n \geq 1$, где $\mathcal{A}_0 = \emptyset$. Разделим далее натуральные числа $\mathbb{N}$ на непересекающиеся бесконечные подмножества $\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2, \dots$ и определим

$$B_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_k} A_n.$$

Если $\mathcal{A}$ — σ -алгебра, то $B_k \in \mathcal{A}$ и, значит, $B_k \in \mathcal{A}_{n_k}$ для некоторого n_k . Пусть теперь $m_k \in \mathbb{N}_k$ (тем самым $A_{m_k} \subset B_k$) таково, что $m_k > n_k$. Тогда $\bigcup_k A_{m_k} \in \mathcal{A}$ и, значит, $\bigcup_k A_{m_k} \in \mathcal{A}_N$ для некоторого N . Однако при $n_i > N$ мы имеем

$$\left(\bigcup_k A_{m_k} \right) \cap B_i = A_{m_i} \in \mathcal{A}_{n_i},$$

что противоречит изначальному определению A_{m_i} как элемента алгебры $\mathcal{A}_{m_i}$, не принадлежащего ни одному из $\mathcal{A}_n$ при $n < m_i$ (в частности, $\mathcal{A}_{n_i}$). $\square$

20. Пусть $\mathcal{F}$ — σ -алгебра, а множество C не принадлежит $\mathcal{F}$. Рассмотрим σ -алгебру $\sigma(\mathcal{F} \cup \{C\})$, порожденную $\mathcal{F}$ и C . Показать, что

$$\sigma(\mathcal{F} \cup \{C\}) = \{AC \cup B\bar{C} : A, B \in \mathcal{F}\}.$$

Доказать аналогичное свойство в случае алгебр.

Решение. Утверждение следует из формул

$$\overline{AC \cup B\bar{C}} = \bar{A}C \cup \bar{B}\bar{C},$$

$$\bigcup_n (A_n C \cup B_n \bar{C}) = \left(\bigcup_n A_n \right) C \cup \left(\bigcup_n B_n \right) \bar{C}.$$

$\square$

21. Пусть $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$ — *расширенная* числовая прямая. Борелевская σ -алгебра $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ может быть определена как σ -алгебра, порожденная множествами $[-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$, где $[-\infty, x] = \{-\infty\} \cup (-\infty, x]$. Показать, что так заданное $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ совпадает с любой из σ -алгебр, порожденных множествами

- (a) $[-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$, или
- (b) $(x, \infty] = (x, \infty) \cup \{\infty\}$, $x \in \mathbb{R}$, или
- (c) всеми конечными интервалами и $\{-\infty\}$ и $\{\infty\}$.

Решение. Утверждение устанавливается элементарной проверкой. $\square$

22. Пусть $C[0, 1]$ — пространство непрерывных функций

$$x = \{x(t)\}_{0 \leq t \leq 1} \quad \text{с метрикой } \rho(x, y) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)|.$$

Доказать, что пространство $C[0, 1]$ является *польским*, т. е. полным сепарабельным метрическим пространством.

Решение. В силу полноты $\mathbb{R}$ любая фундаментальная последовательность $x_n \in C[0, 1]$ сходится равномерно к некоторой функции x . Покажем, что $x \in C[0, 1]$. Имеем

$$|x(t) - x(s)| \leq |x_n(t) - x_n(s)| + 2\rho(x_n, x).$$

Выбирая достаточно большое n , мы гарантируем, что разность $|x(t) - x(s)|$ сколь угодно мала при всех s , достаточно близких к t . Поэтому $x \in C$ и C полно.

Система кусочно линейных функций, принимающих в рациональных точках рациональные значения, является счетным всюду плотным подмножеством в $C[0, 1]$, так что $C[0, 1]$ сепарабельно. $\square$

Замечание. Рассмотрим измеримое пространство

$$(C[0, 1], \mathcal{B}(C[0, 1])),$$

где $\mathcal{B}(C[0, 1])$ — система борелевских множеств, порожденная открытыми множествами в $(C[0, 1], \rho)$. Классический вопрос, восходящий к Банаху, состоял в том, чтобы проверить, лежит ли подпространство дифференцируемых функций в $\mathcal{B}(C[0, 1])$. Отрицательный ответ на этот вопрос был получен С. Мазуркевичем в 1936 г. Другие элементарные примеры неборелевских множеств (см. ссылки в статье [33]) в функциональных пространствах — это

$$\begin{aligned} &\{f \in C[0, 1]: f \text{ нигде не дифференцируема на } [0, 1]\}, \\ &\{f \in C[0, 2\pi]: \text{ряд Фурье, отвечающий } f, \text{ сходится на } [0, 1]\}, \end{aligned}$$

$\{(f_1, f_2, \dots) \in (C[0, 1])^\infty : f_n \text{ сходится поточечно на } [0, 1] \text{ при } n \rightarrow \infty\}$,

$\{(f_1, f_2, \dots) \in (C[0, 1])^\infty : \text{не существует такой последовательности } (f_{n_k}) \subset (f_n), \text{ что } f_{n_k} \text{ сходится равномерно на } [0, 1]\}$.

23. Пусть $C = C[0, \infty)$ — пространство непрерывных функций $x = (x_t)$, определенных при $t \geq 0$. Показать, что относительно метрики

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min\left\{\sup_{0 \leq t \leq n} |x_t - y_t|, 1\right\}, \quad x, y \in C,$$

это пространство является *польским*, т. е. полным сепарабельным метрическим, и σ -алгебра $\mathcal{B}_0(C)$, порожденная открытыми множествами, совпадает с σ -алгеброй $\mathcal{B}(C)$, порожденной цилиндрическими множествами.

Решение. Покажем, что метрическое пространство C является полным. Пусть последовательность $x^n = (x_t^n)$, $n \geq 1$, фундаментальна в C . Тогда для каждого $m = 1, 2, \dots$ функции $x^n|_{[0, m]} = (x_t^n)_{0 \leq t \leq m}$ образуют фундаментальную последовательность в польском пространстве $C[0, m]$ (с равномерной метрикой). Значит, при всех $m \geq 1$ выполняется условие

$$x^n|_{[0, m]} \rightarrow z^m, \quad n \rightarrow \infty,$$

в пространстве $C[0, m]$ для некоторого $z^m \in C[0, m]$. Следовательно, $\rho(x^n, z) \rightarrow 0$, где непрерывная (на $\mathbb{R}_+$) функция z (корректно) определяется условием $z|_{[0, m]} = z^m$, $m \geq 1$. Итак, пространство C является полным.

Система кусочно линейных непрерывных функций $x = (x_t)$ со значениями в $\mathbb{Q}$ при $t \in \mathbb{Q}_+$ есть счетная всюду плотная система в C . Поэтому C — сепарабельное пространство.

Равенство $\mathcal{B}_0(C) = \mathcal{B}(C)$ можно доказать аналогично равенству

$$\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^\infty) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$$

(см. задачу II.2.7). А именно, включение $\mathcal{B}(C) \subseteq \mathcal{B}_0(C)$ можно вывести из непрерывности проекции $\pi: C \rightarrow \mathbb{R}^d$, заданной формулой $\pi(x) = (x_{t_1}, \dots, x_{t_d})$ (для некоторых $t_1, \dots, t_d \geq 0$). Обратное включение можно получить с помощью соотношения

$$\begin{aligned} \{x: \rho(x, y) < r\} = \\ = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{d=1}^{\infty} \bigcap_{t_1, \dots, t_d \in \mathbb{Q}_+} \{x: \rho(x, y; t_1, \dots, t_d) < r - n^{-1}\}, \quad r > 0, \end{aligned}$$

где

$$\rho(x, y; t_1, \dots, t_d) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min \left\{ \sup_{1 \leq i \leq d: t_i \in [0, n]} |x_{t_i} - y_{t_i}|, 1 \right\}, \quad x, y \in C. \quad \square$$

24. Пусть $\mathcal{A}$ — непустая система подмножеств множества Ω . Показать, что алгебру $\alpha(\mathcal{A})$, порожденную этой системой, можно построить следующим образом.

Положим $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \cup \{\emptyset, \Omega\}$ и

$$\mathcal{A}_{n+1} = \{A \cup \bar{B} : A, B \in \mathcal{A}_n\} \quad \text{для } n \geq 1.$$

Тогда $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{A}_n \subseteq \dots$ и

$$\alpha(\mathcal{A}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n.$$

Решение. Очевидно, $\mathcal{A}_n \subseteq \alpha(\mathcal{A})$, поэтому $\bigcup_n \mathcal{A}_n \subseteq \alpha(\mathcal{A})$. К тому же если $A \in \mathcal{A}_m$, то $\bar{A} \in \mathcal{A}_{m+1}$, а также если $B \in \mathcal{A}_n$, то $A \cup B \in \mathcal{A}_{n \vee m+2}$. Другими словами, $\bigcup_n \mathcal{A}_n$ — алгебра, откуда в силу включения $\mathcal{A} \subseteq \bigcup_n \mathcal{A}_n$ следует искомое равенство. $\square$

25. Если $\mathcal{A}$ — непустая система подмножеств Ω , то в задаче II.2.24 приведена конструкция, приводящая к построению (наименьшей) алгебры, порождаемой $\mathcal{A}$. Определим по аналогии с указанной конструкцией системы вида $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \cup \{\emptyset, \Omega\}$ и

$$\mathcal{A}_{2n-1} = \left\{ \bigcup_n B_n : B_1, B_2, \dots \in \mathcal{A}_{2n-2} \right\},$$

$$\mathcal{A}_{2n} = \mathcal{A}_{2n-1} \cup \{\bar{B} : B \in \mathcal{A}_{2n-1}\} \quad \text{при } n \geq 1.$$

Можно было бы рассчитывать на то, что система $\bigcup_n \mathcal{A}_n$ приводит к σ -алгебре $\sigma(\mathcal{A})$, порожденной системой $\mathcal{A}$. Однако это, вообще говоря, не так.

Замечание. Применение описанной выше конструкции начиная с $\bigcup_n \mathcal{A}_n$ вместо $\mathcal{A}$ также не приводит, вообще говоря, к $\sigma(\mathcal{A})$. Чтобы все же получить $\sigma(\mathcal{A})$, приходится прибегать к трансфинитной индукции ($\aleph_1$ «раз»).

Можно убедиться, что $\bigcup_n \mathcal{A}_n \neq \sigma(\mathcal{A})$, на примере системы $\mathcal{A}$, содержащей все замкнутые подмножества канторова множества $\mathcal{C}$. В данном

случае $\mathcal{C}$ удобно представить в виде пространства $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ с метрикой

$$d(x, y) = \sum_{i \geq 1} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}.$$

По аналогии с работой [63] доказательство можно провести конструктивно по следующей схеме.

(а) Задать вначале вспомогательные системы

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \mathcal{A}, \quad \Pi_n = \left\{ \bigcap_n A_n : A_1, A_2, \dots \in \Sigma_{n-1} \right\}, \quad n \geq 1, \\ \Sigma_n &= \{A : \bar{A} \in \Pi_n\}, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Так, например,

$$\Sigma_1 \text{ состоит из всех множеств вида } F_\sigma = \bigcup_n F_n, \\ \text{где } F_1, F_2, \dots \text{ замкнуты в } \mathcal{C},$$

$$\Pi_1 \text{ — из всех множеств вида } G_\delta = \bigcap_n G_n, \text{ где } G_1, G_2, \dots \text{ открыты в } \mathcal{C},$$

$$\Sigma_2 \text{ — из всех множеств вида } G_{\delta\sigma} = \bigcup_n \bigcap_k G_{nk}, \text{ где } G_{nk}, n, k \geq 1, \\ \text{открыты в } \mathcal{C}, \text{ и т. д.}$$

(б) Положить $P_0 = \{(0, 0, \dots)\}$ и $S_0 = \mathcal{C} \setminus P_0$. Определить пары (P_n, S_n) , $n \geq 1$, индуктивно по формулам

$$P_n = \varphi^{-1}(S_{n-1} \times S_{n-1} \times \dots), \quad S_n = \mathcal{C} \setminus P_n,$$

где гомеоморфизм топологических пространств $\varphi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^\infty$ определяется так: берется произвольное разбиение $\mathbb{N}$ на бесконечные множества $\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2, \dots$, а далее полагается

$$\varphi(x) = (x|_{\mathbb{N}_j}, j \geq 1) \quad (\in \{0, 1\}^{\mathbb{N}_1} \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}_2} \times \dots = \mathcal{C}^\infty),$$

где $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ и $x|_{\mathbb{N}_j} = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots)$, $i_1 < i_2 < \dots$ и $\mathbb{N}_j = \{i_1, i_2, \dots\}$.

(с) Доказать, что при всех $n \geq 1$ пара (P_n, S_n) обладает свойствами

1) $P_n \in \Pi_n$ и $S_n \in \Sigma_n$;

2) для любого $B \in \Pi_n$ и любого ε , $0 < \varepsilon < 1$, найдется такое отображение $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, что $B = f^{-1}(P_n)$ и для всех $x, y \in \mathcal{C}$ выполняется неравенство

$$d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon d(x, y).$$

Отметим, что такое отображение с необходимостью имеет неподвижную точку a , т. е. такую точку, что $f(a) = a$, равную (для любого начального $x_0 \in \mathcal{C}$) пределу величин $x_n = f(x_{n-1})$ при $n \rightarrow \infty$.

(d) С помощью свойства 2 установить, что $S_n \notin \Pi_n$ при каждом n .

(e) Проверить наконец, что $\{\Pi_n\}_{n \geq 1}$ есть строго возрастающая последовательность π -систем, так что ввиду замечания к задаче II.2.19 их объединение $\bigcup_n \Pi_n = \bigcup_n \mathcal{A}_n$ не может быть σ -алгеброй.

Решение. (с) Оба свойства устанавливаются по индукции. Для доказательства свойства 1 следует воспользоваться тем, что любые теоретико-множественные операции перестановочны с φ^{-1} . Так, например,

$$\varphi^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}\right) = \bigcup_{\alpha} \varphi^{-1}(A_{\alpha}).$$

Более того, φ — гомеоморфизм, поэтому прообразы открытых и замкнутых множеств соответственно открыты и замкнуты. Из этого, в частности, следует, что $\varphi^{-1}(B) \in \Pi_n$ (аналогичное верно для Σ_n) для любого множества B , представимого в виде

$$B = \bigcap_{i_1} \bigcup_{i_2} \bigcap_{i_3} \dots B_{i_1 i_2 \dots i_n},$$

где $B_{i_1 i_2 \dots i_n}$ открыто в $\mathcal{C}^{\infty}$ при нечетных n и замкнуто при четных n , а в равенстве в общем стоит n операций « $\bigcap$ » и « $\bigcup$ ». Напомним также, что любое множество вида

$$A \times \mathcal{C}^{\infty}, \quad \mathcal{C}^k \times A \times \mathcal{C}^{\infty}, \quad k \geq 1,$$

открыто или замкнуто, если A открыто или, соответственно, замкнуто в $\mathcal{C}$. Далее,

$$\begin{aligned} P_n &= \varphi^{-1}(S_{n-1} \times S_{n-1} \times \dots) = \\ &= \bigcap_{k \geq 1} \varphi^{-1}(\mathcal{C}^k \times S_{n-1} \times \mathcal{C}^{\infty}) \cap \varphi^{-1}(S_{n-1} \times \mathcal{C}^{\infty}). \end{aligned}$$

Отсюда и из предшествующих рассуждений вытекает, что $P_n \in \Pi_n$ и, значит, $S_n \in \Sigma_n$.

Для установления свойства 2 вначале проверим шаг индукции. Пусть при всех $n \leq N$ ($N \geq 1$) свойство 2 имеет место. Докажем его для $n = N + 1$. Возьмем произвольный элемент системы Π_{N+1} :

$$B = \bigcap_{j \geq 1} B_j, \quad B_j \in \Sigma_N.$$

По предположению индукции с учетом того, что $\mathcal{C} \setminus B_j \in \Pi_N$, найдутся такие функции $f_j: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, $j \geq 1$, что

$$f_j^{-1}(S_N) = \mathcal{C} \setminus f_j^{-1}(P_N) = \mathcal{C} \setminus (\mathcal{C} \setminus B_j) = B_j,$$

и для фиксированного $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$d(f_j(x), f_j(y)) \leq \frac{\varepsilon}{2^j} d(x, y), \quad x, y \in \mathcal{C}.$$

Искомое отображение f может быть задано формулой

$$f(x) = \varphi^{-1}(f_1(x), f_2(x), \dots),$$

где $\varphi^{-1}: \mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathcal{C}$ определено в п. (b). Действительно, в этом случае

$$\begin{aligned} f^{-1}(P_{N+1}) &= f^{-1}(\varphi^{-1}(S_N \times S_N \times \dots)) = \\ &= \bigcap_{j \geq 1} f^{-1}(\varphi^{-1}(\mathcal{C}^{j-1} \times S_N \times \mathcal{C}^\infty)) \cap f^{-1}(\varphi^{-1}(S_N \times \mathcal{C}^\infty)) = \\ &= \bigcap_{j \geq 1} f_j^{-1}(S_N) = \bigcap_{j \geq 1} B_j = B \end{aligned}$$

и по определению отображения φ при $x, y \in \mathcal{C}$ и $u = f(x)$, $v = f(y)$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} d(u, v) &= \sum_{j \geq 1} \sum_{i \in \mathbb{N}_j} \frac{|u_i - v_i|}{2^i} \leq \sum_{j \geq 1} d(f_j(x), f_j(y)) \leq \\ &\leq d(x, y) \sum_{j \geq 1} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon d(x, y). \end{aligned}$$

Осталось проверить базу индукции $n = 0$. Фиксируем $0 < \varepsilon < 1$. Возьмем далее замкнутое множество F , т. е. любой элемент системы Π_0 . Любое такое F может быть получено с помощью двоичных разбиений $\mathcal{C}$ на множества вида

$$D_{ik} = \{x \in \mathcal{C}: (x_1, \dots, x_k) = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{ik})\}, \quad i = 0, \dots, 2^k - 1,$$

где $k \geq 1$, $\alpha_{ij} \in \{0, 1\}$ — цифры в двоичной записи i , т. е. $i = \sum_{j=1}^k 2^{j-1} \alpha_{ij}$.

А именно, чтобы получить F , надо брать последовательно $k = 0, 1, 2, \dots$, выбрасывая каждый раз те элементы D_{ik} , которые не содержат точек из F . Такая процедура приведет к следующему представлению F :

$$F = \bigcap_{k \geq 0} F_k,$$

где $F_0 = \mathcal{C}$, а $\Delta_k = F_k \setminus F_{k+1}$ — выброшенные на k шаге элементы D_{ik} . По построению если $\Delta_k \neq \emptyset$, то

$$d(\Delta_k, F_{k+1}) = \inf\{d(x, y) : (x, y) \in \Delta_k \times F_{k+1}\} \geq 2^{-k};$$

$$d(x, F) = \inf\{d(x, y) : y \in F\}.$$

Положим теперь $f|_F \equiv \bar{0} = (0, 0, \dots)$ и $f|_{\Delta_k} \equiv e_k = (0, \dots, 0, 1, 1, \dots)$, где $k \geq 0$ и во втором равенстве стоит столько нулей, чтобы гарантировать выполнение условия

$$d(\bar{0}, e_k) \in (0, \varepsilon 2^{-k}).$$

По определению $f^{-1}(0, 0, \dots) = F$. Более того, если $x \in F_k \setminus F_{k+1}$ и $y \in F_l \setminus F_{l+1}$ (или же $y \in F$) для некоторых $k < l$, то

$$d(f(x), f(y)) = d(e_k, e_l) \leq d(e_k, \bar{0}) < \varepsilon 2^{-k} \leq \varepsilon d(\Delta_k, F_{k+1}) \leq \varepsilon d(x, y).$$

Отсюда, конечно, следует, что отображение f сжимающее: для всех $x, y \in \mathcal{C}$ выполняется неравенство

$$d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon d(x, y).$$

(d) Согласно свойству 2 если бы выполнялось условие $S_n \in \Pi_n$, то для некоторого сжимающего отображения $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ имело бы место равенство $S_n = f^{-1}(P_n)$ и, значит,

$$P_n = f^{-1}(\mathcal{C} \setminus P_n) = f^{-1}(S_n),$$

что, очевидно, противоречит существованию неподвижной точки у отображения f .

(e) Любое замкнутое множество есть множество вида G_δ (проверьте), а открытое — F_σ (см. п. (a)). Отсюда следует, что $\Pi_n \subseteq \Pi_{n+1}$. К тому же по определению $\Sigma_n \subseteq \Pi_{n+1}$, и, значит, ввиду п. (d) включение $\Pi_n \subset \Pi_{n+1}$ строгое. Из двух указанных включений с учетом того, что $\Sigma_n = \{A : A \in \Pi_n\}$, с очевидностью следует, что $\bigcup_n \Pi_n = \bigcup_n \mathcal{A}_n$. Для завершения доказательства осталось воспользоваться замечанием к задаче П.2.19. $\square$

26. Назовем *телом* систему множеств, которая замкнута относительно операций счетного объединения и пересечения. Проверить, что σ -алгебра борелевских множеств $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ есть тело $\mathcal{B}$, порожденное открытыми множествами.

Решение. Любое замкнутое множество в $\mathbb{R}$ есть счетное пересечение некоторых открытых множеств, поэтому $\mathcal{B}$ содержит все замкнутые множества. Для завершения доказательства следует воспользоваться

принципом подходящих множеств, установив, что тело $\mathcal{B}$ замкнуто относительно дополнений, а значит, является σ -алгеброй, совпадающей с $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. $\square$

27. Устройство σ -алгебры, порожденной бесконечной системой множеств $\mathcal{A}$, может быть весьма сложным (см. задачу II.2.25). Однако в ряде случаев можно явно указать некоторую систему $S(\mathcal{A})$, несколько большую, чем $\sigma(\mathcal{A})$, и при этом имеющую ту же мощность, что $\sigma(\mathcal{A})$.

Для задания $S(\mathcal{A})$ нам потребуется A -операция (называемая также операцией Александра, операцией Суслина), ставящая в соответствие любому A -семейству, т. е. семейству множеств

$$\{A_{n_1 \dots n_k}\} = \{A_{n_1 \dots n_k}, \quad k \geq 1, \quad n_1, n_2, \dots = 1, 2, \dots\},$$

множество

$$\bigcup_{n_\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n_1 \dots n_k},$$

где объединение берется по всем *бесконечным* последовательностям $n_\infty = (n_1, n_2, \dots)$ натуральных чисел.

Пусть теперь $S(\mathcal{A})$ есть класс всех множеств, полученных применением A -операции ко всем A -подсистемам $\{A_{n_1 \dots n_k}\} \subseteq \mathcal{A}$. Установить, что класс $S(\mathcal{A})$ замкнут относительно A -операции и, в частности, является *телом* множеств (см. задачу II.2.26). Если при этом так случилось, что дополнение любого элемента системы $\mathcal{A}$ заведомо содержится в $S(\mathcal{A})$, то $S(\mathcal{A})$ с необходимостью содержит и $\sigma(\mathcal{A})$.

(См. задачу II.1.5.)

Замечание. Из этих утверждений следует, что мощность *счетно-порожденной* σ -алгебры (см. задачу II.2.11) не может быть больше континуума. Действительно, пусть система $\mathcal{A}$ состоит из счетного числа различных множеств. Тогда количество всевозможных A -подсистем $\{A_{n_1 \dots n_k}\} \subseteq \mathcal{A}_0$ в точности континуум и $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}_0) \subseteq S(\mathcal{A}_0)$, где $\mathcal{A}_0 = \{A: A \in \mathcal{A} \text{ или } \bar{A} \in \mathcal{A}\}$.

Решение. Пусть $A^{m_1 \dots m_l} \in S(\mathcal{A})$ для всех $l, m_1, m_2, \dots \geq 1$ и, значит, для некоторых $A^{m_1 \dots m_l} \in \mathcal{A}$ выполнено равенство

$$A^{m_1 \dots m_l} = \bigcup_{n_\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n_1 \dots n_k}^{m_1 \dots m_l},$$

где $k, n_1, n_2, \dots \geq 1$. Тогда по задаче II.1.5 имеем

$$A = \bigcup_{m_\infty} \bigcap_{l=1}^{\infty} A^{m_1 \dots m_l} = \bigcup_{m_\infty} \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{n_\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n_1 \dots n_k}^{m_1 \dots m_l} = \bigcup_{m_\infty} \bigcup_{n_\infty = n_\infty(\cdot)} \bigcap_{k,l=1}^{\infty} A_{n_1(l) \dots n_k(l)}^{m_1 \dots m_l},$$

где объединение по n_∞ ведется по всем функциям $n_\infty = (n_1(\cdot), n_2(\cdot), \dots)$: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^\infty$.

Итак, нам надо представить A в виде

$$\bigcup_{r_\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{r_1 \dots r_n}$$

для некоторых $B_{r_1 \dots r_n} \in \mathcal{A}$. Заметим, что при подходящем выборе $B_{r_1 \dots r_n}$ можно исключить из рассмотрения все «плохие» последовательности r_∞ , которые распознаются на основании некоторого конечного начального отрезка $(r_1, \dots, r_n)$. Действительно, в этом случае достаточно положить $B_{r_1 \dots r_n} = \emptyset$.

Искомое представление можно построить так: во-первых, переименовать множество $\{(k, l) : k, l \geq 1\}$ некоторым образом: (k_n, l_n) , $n \geq 1$, а далее заметить, что любой паре $(m_\infty, n_\infty(\cdot))$ естественным образом сопоставляется «хорошая» последовательность $r_\infty = (r_1, r_2, \dots)$,

$$r_n = 2^{l_n} 3^{k_n} p_1^{m_1} \dots p_{l_n}^{m_{l_n}} p_{l_n+1}^{n_1(l_n)} \dots p_{l_n+k_n}^{n_{k_n}(l_n)}, \quad n \geq 1,$$

где $p_1 = 5, p_2 = 7, \dots$ — упорядоченные простые числа (начиная с 5). При этом в силу единственности разложения на простые сомножители по любому «хорошему» r_∞ однозначно восстанавливается пара $(m_\infty, n_\infty(\cdot))$. Исключая теперь из рассмотрения все оставшиеся «плохие» последовательности, определим

$$B_{r_1 \dots r_n} = \begin{cases} A_{n_1(l_n) \dots n_{k_n}(l_n)}, & (r_1, \dots, r_n) \text{ — начальный отрезок «хорошей»} \\ & \text{последовательности } r_\infty, \\ \emptyset & \text{иначе.} \end{cases}$$

Отметим далее, что частным случаем A -операции является счетное объединение и пересечение. В самом деле,

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{n_\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} B_{n_1 \dots n_k}, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{n_\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} C_{n_1 \dots n_k},$$

где

$$B_{n_1 \dots n_k} = A_k, \quad C_{n_1 \dots n_k} = A_{n_1}.$$

Таким образом, $S(\mathcal{A})$ — система, замкнутая относительно операций счетного объединения и пересечения. Другими словами, $S(\mathcal{A})$ — тело множеств.

Если теперь $\mathcal{A}$ замкнуто относительно дополнений, то система

$$\mathcal{B} = \{A: A, \bar{A} \in S(\mathcal{A})\}$$

является σ -алгеброй. Последнее элементарно следует из того факта, что $S(\mathcal{A})$ представляет собой тело множеств. Очевидно, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, поэтому и $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}$. $\square$

28. Пусть $\mathfrak{c}$ — мощность континуума. Показать, что мощность борелевских множеств в $\mathbb{R}$ равна $\mathfrak{c}$, а σ -алгебры лебеговских множеств — $2^{\mathfrak{c}}$.

Решение. Количество борелевских множеств континуум. Это вытекает из задач II.2.11, II.2.26 и замечания к задаче II.2.27.

Поскольку канторово множество $\mathcal{C}$ (см. задачу II.3.20) имеет меру нуль, любое его подмножество измеримо по Лебегу. Количество таких подмножеств $2^{\mathfrak{c}}$, поскольку $|\mathcal{C}| = \mathfrak{c}$. Поэтому мощность лебеговских множеств равна $2^{\mathfrak{c}}$ (больше быть не может, так как всего различных множеств в $\mathbb{R}$ ровно $2^{\mathfrak{c}}$). $\square$

29. Показать, что не существует σ -алгебры с мощностью множества натуральных чисел $\aleph_0$, состоящей из *счетного* числа элементов. Тем самым структура σ -алгебр такова, что они всегда либо состоят из *конечного* числа элементов, либо заведомо имеют *несчетную мощность*. Согласно задаче II.2.28 мощность борелевских множеств в $\mathbb{R}$ равна мощности множества действительных чисел $\mathfrak{c}$.

Решение. Пусть $\{A_n\}_{n \geq 1}$ — бесконечное число различных элементов σ -алгебры $\mathcal{A}$. Образует для любой последовательности $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, состоящей из нулей и единиц, всевозможные пересечения

$$D_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{\alpha_n},$$

где $A^0 = \bar{A}$ и $A^1 = A$. По построению D_α попарно не пересекаются при разных α и, очевидно, лежат в $\mathcal{A}$. Кроме того, каждое A_n представляется в виде объединения каких-то D_α . Количество N непустых множеств D_α не может быть конечным, поскольку в этом случае бесконечное число различных $A_1, A_2, \dots$ будет лежать в алгебре, порожденной множествами D_α , которая имеет конечное число ($= 2^{2^N}$) несовпадающих элементов.

Итак, можно найти счетное число различных непустых множеств $D_{\alpha_1}, D_{\alpha_2}, \dots \in \mathcal{A}$. Количество всевозможных их объединений (дающих различные элементы σ -алгебры $\mathcal{A}$) совпадает с мощностью всех по-

следовательностей из нулей и единиц. Другими словами, $\mathcal{A}$ не может иметь счетную мощность. $\square$

30. (а) Показать, что любое борелевское множество A в $\mathbb{R}$ представляется в виде

$$A = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in D \text{ для некоторого } y \in \mathbb{P}\}$$

для некоторого замкнутого множества $D \subseteq \mathbb{R}^2$, где $\mathbb{P}$ — множество иррациональных чисел на $[0, 1]$.

(б) Показать, что найдется замкнутое множество $U \subseteq \mathbb{R}^3$, обладающее тем свойством, что любое замкнутое множество F в $\mathbb{R}^2$ представимо в виде

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in U\}$$

для некоторого $z \in \mathbb{R}$.

Решение. (а) Установим вначале, что любое борелевское множество в $\mathbb{R}$ есть проекция некоторого замкнутого множества в $\mathbb{R} \times \mathbb{N}^\infty$; здесь $\mathbb{N}^\infty$ — пространство всех последовательностей из натуральных чисел. Обозначим через $\mathcal{P}$ множество всех таких проекций.

Будем говорить, что $y_n \in \mathbb{N}^\infty$, $n \geq 1$, сходятся к $y \in \mathbb{N}^\infty$, если любые конечные начальные отрезки последовательностей y_n и y совпадают при достаточно больших n . Пусть также множество $B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{N}^\infty$ замкнуто, если для всякой такой последовательности точек $(x_n, y_n) \in B$, $n \geq 1$, что $x_n \rightarrow x$ и $y_n \rightarrow y$ для некоторых $x \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{N}^\infty$, точка (x, y) содержится в B .

Множество $F \times \{x\}$ замкнуто в $\mathbb{R} \times \mathbb{N}^\infty$, если F замкнуто в $\mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{N}^\infty$. Поэтому любое замкнутое множество в $\mathbb{R}$ лежит в $\mathcal{P}$. Далее, если $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P}$, т. е. каждое A_n является проекцией некоторого замкнутого множества $B_n \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{N}^\infty$, то $\bigcup_n A_n \in \mathcal{P}$ и $\bigcap_n A_n \in \mathcal{P}$ (иначе говоря, $\mathcal{P}$ есть тело множеств). Действительно, объединение $\bigcup_n A_n$ есть проекция замкнутого в $\mathbb{R} \times \mathbb{N}^\infty$ множества $\bigcup_n C_n$, где $C_n = \{(x, n * y) : (x, y) \in B_n\}$ и $n * y$ — последовательность, полученная из y приписыванием n к y справа. Кроме того, пересечение $\bigcap_n A_n$ есть проекция множества $\bigcap_n D_n$, замкнутого в $\mathbb{R} \times \mathbb{N}^\infty$ как пересечение замкнутых множеств D_n , где

$$D_n = \{(x, y) : (x, y_n) \in B_n\},$$

а $y_1, y_2, y_3, \dots \in \mathbb{N}^\infty$ определяются по y так: если

$$y = (a_1, b_1, a_2, c_1, b_2, a_3, d_1, c_2, b_3, a_4, \dots),$$

то

$$y_1 = (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots), \quad y_2 = (b_1, b_2, b_3, \dots), \quad y_3 = (c_1, c_2, \dots), \quad \dots$$

Поскольку любое открытое множество в $\mathbb{R}$ может быть представлено в виде счетного объединения замкнутых в $\mathbb{R}$ множеств, класс $\mathcal{P}$ содержит все открытые множества и, как было показано выше, является телом множеств. Применяя задачу II.2.26, получаем, что $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}$ и, значит, любое борелевское множество в $\mathbb{R}$ есть проекция некоторого замкнутого множества в $\mathbb{R} \times \mathbb{N}^\infty$. Для завершения доказательства следует воспользоваться тем, что $\mathbb{N}^\infty$ является одним из представлений иррациональных чисел $\mathbb{P}$. А именно, любое иррациональное число a однозначно представляется в виде бесконечной цепной дроби $[0; \alpha_1, \alpha_2, \dots]$ для некоторых $\alpha_i \in \mathbb{N}$ (см. задачу II.10.50 и замечание к ней), причем сходимость

$$a_n = [0; \alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \dots] \rightarrow a = [0; \alpha_1, \alpha_2, \dots]$$

при $a_n, a \in \mathbb{P}$ эквивалентна в $\mathbb{N}^\infty$ сходимости

$$(\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \dots) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots).$$

Таким образом, если борелевское множество A в $\mathbb{R}$ есть проекция некоторого замкнутого множества C в $\mathbb{R} \times \mathbb{N}^\infty$, то C можно представить как множество C' в $\mathbb{R} \times \mathbb{P}$, которое, вообще говоря, не замкнуто. Замыкание C в $\mathbb{R}$ и есть искомое множество D .

(b) Будем действовать по той же схеме, что и в п. (a). А именно, построим подходящее замкнутое множество V в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}^\infty$, а затем с помощью представления иррациональных чисел $\mathbb{P}$ через бесконечные цепные дроби получим множество V' , замыкая которое построим искомое множество U в $\mathbb{R}^3$.

Перенумеруем всевозможные открытые круги вида

$$B_r(p, q) = \{(x, y): (x - p)^2 + (y - q)^2 < r\}, \quad p, q, r \in \mathbb{Q},$$

получив тем самым последовательность $B_1, B_2, \dots$ Сопоставим любому замкнутому множеству $F \subseteq \mathbb{R}^2$ такой элемент $z(F) = (z_1, z_2, \dots) \in \mathbb{N}^\infty$, что $z_i = I(B_i \subseteq \bar{F})$, $i \geq 1$. Полученное отображение $F \rightarrow z(F)$ будет биекцией, поскольку

$$\bar{F} = \bigcup_{i: z_i(F)=1} B_i.$$

В силу замкнутости F множество $\{(x, y, z(F)): (x, y) \in F\}$ будет замкнуто в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}^\infty$. Положим

$$V = \bigcup_F \{(x, y, z(F)): (x, y) \in F\},$$

где объединение берется по всем замкнутым множествам в $\mathbb{R}^2$. При таком задании любое замкнутое множество $F \subseteq \mathbb{R}^2$ представимо в виде

$$F = \{(x, y) : (x, y, z) \in V\},$$

где $z = z(F) \in \mathbb{N}^\infty$. Осталось показать, что множество V замкнуто в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}^\infty$.

Пусть $(x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)})$, $n \geq 1$, — последовательность точек из V , сходящаяся к некоторой точке (x, y, z) . Надо показать, что (x, y) лежит в

$$F = \overline{\bigcup_{i: z_i=1} B_i}$$

(тем самым будет проверено, что $(x, y, z) \in V$). Сходимость

$$(x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)}) \rightarrow (x, y, z)$$

эквивалентна тому, что

$$(x^{(n)}, y^{(n)}) \rightarrow (x, y), \quad z^{(n)} \rightarrow z.$$

При этом $z^{(n)} \rightarrow z$ тогда и только тогда, когда для всех $i \geq 1$ при больших n ($\geq n_i$) выполняются равенства

$$z_1^{(n)} = z_1, \dots, z_i^{(n)} = z_i.$$

Последнее означает, что при больших n имеет место включение

$$(x^{(n)}, y^{(n)}) \in F_i = \overline{\bigcup_{j \leq i: z_j=1} B_j}.$$

В силу замкнутости F_i точка (x, y) с необходимостью лежит в F_i , и так для каждого $i \geq 1$. Окончательно находим, что

$$(x, y) \in \bigcap_{i \geq 1} F_i = \overline{\bigcup_{j: z_j=1} B_j}.$$

Тем самым установлена замкнутость множества V . Как и в п. (а), с помощью представления множества $\mathbf{P}$ через множество $\mathbb{N}^\infty$ теперь уже можно получить искомое множество U в $\mathbb{R}^3$. $\square$

31. Конструкция и заключение задачи II.2.25 показывают, что структура σ -алгебр может быть весьма сложной. В 1916 г. М. Я. Суслин построил контрпример к одному утверждению Лебега, считавшего, что *проекция всякого борелевского множества в $\mathbb{R}^2$ на одну из координатных осей является также борелевским множеством в $\mathbb{R}$* . Попытайтесь построить соответствующий контрпример.

Решение. Нам понадобится так называемое *универсальное множество* U в $\mathbb{R}^3$, которое обладает двумя свойствами: само оно является замкнутым, и любое замкнутое множество в $\mathbb{R}^2$ может быть получено пересечением данного множества плоскостью, ортогональной оси Oy (см. задачу II.2.30(b)). Отметим, что в силу задачи II.2.30 любое борелевское множество B в $\mathbb{R}$ имеет вид

$$B = \{x: (x, y) \in V\}$$

для некоторого $y \in \mathbb{R}$, где V — проекция множества $U' = U \cap (\mathbb{R}^2 \times P)$ на Oxy .

Покажем, что множество D , образованное пересечением V с диагональю $y = x$, и есть искомое, т. е. является неборелевским (и в то же время равно проекции двумерного борелевского множества $U' \cap \{(x, y, z): x = y\}$).

Допустим, что $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Поскольку D лежит на прямой $y = x$ в плоскости Oxy , то $P \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, где P — проекция множества D на ось Ox . При этом дополнение $\mathbb{R} \setminus P$ также должно лежать в $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Поэтому для некоторого y выполняется равенство

$$\mathbb{R} \setminus P = \{x: (x, y) \in V\}.$$

Но тогда $y \notin \mathbb{R} \setminus P$ (иначе (y, y) должен лежать и в V , и в D). При этом если $y \notin \mathbb{R} \setminus P$, то $y \in P$ и, значит, $(y, y) \in V$, т. е. $y \in \mathbb{R} \setminus P$. Полученное противоречие показывает, что проекция P (и, следовательно, D) не есть борелевское множество. $\square$

32. Пусть множества $A_1, \dots, A_N \subset \{1, \dots, n\}$ таковы, что ни одно из них не есть подмножество никакого из других. Доказать *лемму Шпернера*, утверждающую, что

$$N \leq C_n^{[n/2]},$$

где $[x]$ — целая часть числа $x \in \mathbb{R}$.

Решение. Количество всевозможных таких наборов множеств $C_0, C_1, \dots, C_n$, что

$$\varnothing = C_0 \subset C_1 \subset \dots \subset C_n = \{1, \dots, n\}, \quad |C_k| = k,$$

равно $n!$. Число указанных наборов, содержащих A_i , есть $|A_i|!(n - |A_i|)!$, причем согласно условию множества этих наборов не пересекаются при различных i . Поэтому

$$n! \geq \sum_{i=1}^N |A_i|!(n - |A_i|)! \geq N \cdot [n/2]!(n - [n/2])!,$$

что гарантирует неравенство $N \leq C_n^{[n/2]}$. $\square$

33. Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная система подмножеств в Ω . Доказать, что

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcup_{\{A_n\}} \sigma(A_1, A_2, \dots),$$

где объединение ведется по всем не более чем счетным подсистемам $\{A_n\} \subseteq \mathcal{A}$.

Другими словами, каково бы ни было множество $A \in \mathcal{A}$, в $\mathcal{A}$ можно выделить такую не более чем счетную совокупность множеств $\mathcal{G} = \mathcal{G}(A)$, что $A \in \sigma(\mathcal{G})$.

Решение. Очевидно, $\sigma(\mathcal{A}) \supseteq \mathcal{B}$, где

$$\mathcal{B} = \bigcup_{\{A_n\}} \sigma(A_1, A_2, \dots).$$

Чтобы доказать обратное включение, надо лишь установить, что система $\mathcal{B}$ есть σ -алгебра. Система $\mathcal{B}$ замкнута относительно дополнений, так как таковой же является $\sigma(A_n, n \geq 1)$ при любом выборе $\{A_n\}$. Если теперь $B_k \in \mathcal{B}$, $k \geq 1$, то

$$B_k \in \sigma(A_{nk}, n \geq 1)$$

для некоторых A_{nk} и каждого k . Следовательно,

$$\bigcup_{k \geq 1} B_k \in \sigma(A_{nk}, n, k \geq 1) \subseteq \mathcal{B}. \quad \square$$

34. В метрических пространствах (E, ρ) с метрикой ρ борелевская σ -алгебра $\mathcal{E}$ определяется как система, порожденная открытыми множествами.

Показать, что в сепарабельных пространствах $\mathcal{E}$ порождается открытыми шарами. Убедиться, что это не выполнено в несепарабельных пространствах.

Решение. Если $X = \{x_n\}_{n \geq 1}$ — счетная всюду плотная система, то любое открытое множество G в (E, ρ) представляется в виде

$$G = \bigcup_{q, n} B_q(x_n), \quad B_q(x_n) = \{x: \rho(x, x_n) < q\},$$

где объединение берется по некоторым $q \in \mathbb{Q}$ и $n \in \mathbb{N}$. Действительно, если $x \in G$, то в силу открытости G обязательно найдется шар с центром в точке из X рационального радиуса, содержащий x .

Если же пространство (E, ρ) не является сепарабельным, то найдется *дискретное* более чем счетное множество D , т. е. такое, что для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняется условие

$$x, y \in D \Rightarrow \rho(x, y) > \varepsilon.$$

Тогда открытое множество

$$\bigcup_{x \in D} B_\varepsilon(x)$$

не принадлежит σ -алгебре, порожденной открытыми шарами. $\square$

35. Пусть B — борелевское множество на числовой прямой с мерой Лебега λ . Назовем *плотностью* множества B предел

$$D(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda(B \cap [-n, n])}{2n} \quad (*)$$

(в предположении, что этот предел существует).

(а) Дать пример множества B , для которого плотность $D(B)$ не определена (т. е. предел в формуле $(*)$ не существует).

(б) Показать, что если борелевские множества A и B не пересекаются и имеют плотности, то

$$D(A + B) = D(A) + D(B).$$

(с) Построить последовательность непересекающихся борелевских множеств $B_1, B_2, \dots$, имеющих плотности и таких, что

$$D(B_1 + B_2 + \dots) \neq D(B_1) + D(B_2) + \dots$$

Решение. (а) Для борелевского множества

$$B = \bigcup_{n=0}^{\infty} [2^{2n}, 2^{2n+1}]$$

плотность $D(B)$ не определена. Действительно,

$$\lim_n \frac{\lambda(B \cap [-2^{2n}, 2^{2n}])}{2^{2n+1}} < \frac{1}{4} < \lim_n \frac{\lambda(B \cap [-2^{2n+1}, 2^{2n+1}])}{2^{2n+2}}.$$

(б) Утверждение следует из свойства аддитивности предела.

(с) Полагая $B_n = (n-1, n)$, получаем, что $D(B_n) = 0$, однако $D(B_1 + B_2 + \dots) = 1/2$. $\square$

36. (Пополнение σ -алгебр.) Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство. Говорят, что это пространство является *полным* (или полным

относительно меры P), если из того, что $B \in \mathcal{F}$ и $P(B) = 0$, вытекает, что всякое множество $A \subseteq B$ принадлежит $\mathcal{F}$.

Обозначим через $\mathcal{N}$ совокупность всех подмножеств $N \subseteq \Omega$, обладающих тем свойством, что для каждого из них найдется (свое) такое множество $B \in \mathcal{F}$ с $P(B) = 0$, что $N \subseteq B$. Пусть $\tilde{\mathcal{F}}$ (также пишут $\mathcal{F}^P$ или $\tilde{\mathcal{F}}^P$) есть совокупность всех множеств вида $A \cup N$, где $A \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathcal{N}$.

Показать, что

- (а) $\tilde{\mathcal{F}}$ является σ -алгеброй;
- (б) если $B \subseteq \Omega$ и существуют такие множества A и C из $\mathcal{F}$, что $A \subseteq B \subseteq C$ и $P(C \setminus A) = 0$, то $B \in \tilde{\mathcal{F}}$;
- (с) вероятностное пространство $(\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, P)$ является полным.

Решение. (а) Класс $\tilde{\mathcal{F}}$ замкнут относительно счетных объединений, так как $\mathcal{N}$ и $\mathcal{F}$ замкнуты относительно счетных объединений. Если $A \cup N \in \tilde{\mathcal{F}}$, где $A \in \mathcal{F}$, а N лежит в некотором множестве B из $\mathcal{F}$, $P(B) = 0$, то $\overline{A \cup N} = (\bar{A} \setminus B) \cup (B \setminus (A \cup N))$. Осталось заметить, что $\bar{A} \setminus B \in \mathcal{F}$ и $B \setminus (A \cup N) \in \mathcal{N}$, а значит, $\overline{A \cup N} \in \tilde{\mathcal{F}}$. Следовательно, $\tilde{\mathcal{F}}$ — σ -алгебра.

(б) Утверждение вытекает из того, что $B = A \cup N$ для некоторого $N \subseteq C \setminus A \in \mathcal{F}$.

(с) Утверждение следует из п. (б), если в качестве A взять $\emptyset$. $\square$

§ 3. Способы задания вероятностных мер на измеримых пространствах

1. Пусть $F(x) = P((-\infty, x])$. Показать справедливость следующих формул:

$$\begin{aligned} P((a, b]) &= F(b) - F(a), & P((a, b)) &= F(b-) - F(a), \\ P([a, b]) &= F(b) - F(a-), & P([a, b)) &= F(b-) - F(a-), \\ P(\{x\}) &= F(x) - F(x-), \end{aligned}$$

где $F(x-) = \lim_{y \uparrow x} F(y)$.

Решение. Рассматриваемые равенства вытекают из свойства аддитивности меры P , а также следующих предельных соотношений, справедливых при $\varepsilon \downarrow 0$:

$$\begin{aligned} P((a, b - \varepsilon]) &\uparrow P((a, b)), & P((a - \varepsilon, b]) &\downarrow P([a, b]), \\ P((a - \varepsilon, b)) &\downarrow P([a, b)). \end{aligned}$$

$\square$

2. Пусть P_n — вероятностная мера на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, а $F_n = F_n(x_1, \dots, x_n)$ — отвечающая ей функция распределения, т. е.

$$F_n(x_1, \dots, x_n) = P_n((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]).$$

Введем разностный оператор $\Delta_{a_i b_i}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($a_i \leq b_i$), действующий по формуле

$$\Delta_{a_i b_i} F_n(x_1, \dots, x_n) = F_n(\dots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \dots) - F_n(\dots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots)$$

(все аргументы, кроме i -го, фиксированы). Убедиться в справедливости равенства

$$\Delta_{a_1 b_1} \dots \Delta_{a_n b_n} F_n(x_1, \dots, x_n) = P_n((a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n]).$$

Решение. Искомое соотношение справедливо для любой конечной меры P_n на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Это легко получить по индукции, если заметить, что

$$F_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) = \Delta_{a_n b_n} F_n(x_1, \dots, x_n)$$

есть (обобщенная) функция распределения, отвечающая мере P_{n-1} на $(\mathbb{R}^{n-1}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}))$, заданной формулой $P_{n-1}(\cdot) = P_n(\cdot \times (a_n, b_n])$. $\square$

3. Пусть $F = F(x_1, \dots, x_n)$ — некоторая функция распределения на $\mathbb{R}^n$. Тогда на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ существует и притом единственная такая вероятностная мера P , что

$$P((a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n]) = \Delta_{a_1 b_1} \dots \Delta_{a_n b_n} F(x_1, \dots, x_n).$$

Доказать эту теорему.

Решение. Искомое утверждение устанавливается так. Сначала P задается на всех элементах алгебры $\mathcal{A}$, состоящей из всех конечных объединений множеств вида

$$(a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n],$$

с помощью указанной в условии формулы. А далее проверяются условия теоремы Каратеодори о продолжении меры, а именно счетная аддитивность меры P на $\mathcal{A}$, которая эквивалентна непрерывности P в нуле на $\mathcal{A}$. Другими словами, проверяется, что

$$P(A_n) \downarrow 0, \quad \text{когда } A_n \downarrow \emptyset, \quad A_n \in \mathcal{A}.$$

Для этого сначала выбираются множества $B_n \subseteq A_n$ ($B_n \in \mathcal{A}$), замыкания которых $[B_n]$ содержатся как в A_n , так и в

$$[-a, a] \times \dots \times [-a, a]$$

для некоторого большого $a > 0$ (не зависящего от n), и при этом $P(A_n) - P(B_n) \leq \varepsilon 2^{-n}$ для (сколь угодно) малого $\varepsilon > 0$. А затем устанавливается, что с необходимостью для некоторого $N < \infty$ выполняются условия

$$\bigcap_{n=1}^N [B_n] = \emptyset$$

и

$$P(A_N) \leq \sum_{n=1}^N P(A_n \setminus B_n) \leq \varepsilon.$$

В силу произвольности ε отсюда вытекает непрерывность в нуле (и, значит, счетная аддитивность) меры P на $\mathcal{A}$. $\square$

4. Показать, что функция распределения $F = F(x)$ на $\mathbb{R}$ имеет не более чем счетное число точек разрыва. Что можно сказать о соответствующем результате для функций распределения в $\mathbb{R}^n$?

Решение. Допустим, что $F(x-) < F(x)$ в точке $x \in \mathbb{R}$, т. е. x — точка разрыва функции F . Тогда точке x можно сопоставить рациональное число $q(x)$ из интервала $(F(x-), F(x))$. При этом разным точкам разрыва x и y будут соответствовать разные рациональные числа $q(x)$ и $q(y)$, так как $(F(x-), F(x))$ и $(F(y-), F(y))$ очевидным образом не пересекаются при $x \neq y$. Количество рациональных чисел не более чем счетно, поэтому количество точек разрыва функции F также будет не более чем счетно.

Для функций распределения в $\mathbb{R}^n$ этот результат уже неверен. В качестве примера можно рассмотреть функцию распределения, соответствующую дельта-мере

$$\delta_0(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \in A, \\ 0, & \text{если } 0 \notin A, \end{cases} \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n). \quad \square$$

5. Показать, что каждая из функций

$$G(x, y) = I(x + y \geq 0), \quad G(x, y) = [x + y] - \text{целая часть суммы } x + y$$

является непрерывной справа, возрастающей по каждой переменной, но не является (обобщенной) функцией распределения в $\mathbb{R}^2$.

Какому необходимому и достаточному условию должна удовлетворять функция $F(x, y)$, чтобы быть обобщенной функцией распределения в $\mathbb{R}^2$?

Решение. Необходимое и достаточное условие состоит в том, чтобы функция F была непрерывной справа и выполнялось неравенство

$$F(a, b) + F(c, d) - F(a, d) - F(c, b) \geq 0$$

для любых $a \leq b$ и $c \leq d$ (это есть не что иное, как мера прямоугольника $(a, b] \times (c, d]$). Для приведенных функций G указанное свойство не имеет места при $(a, b, c, d) = (-0,5; 0; 0; 0,5)$. $\square$

6. Пусть мера Лебга–Стилтьеса ν отвечает некоторой непрерывной обобщенной функции распределения на $\mathbb{R}$. Показать, что если множество A не более чем счетно, то $\nu(A) = 0$.

Решение. Из непрерывности обобщенной функции распределения вытекает, что $\nu(\{x\}) = 0$ при любом x . Поэтому в силу счетной аддитивности $\nu(A) = 0$, когда A не более чем счетно. $\square$

7. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — некоторое вероятностное пространство. Как показано в задаче II.1.6, мера P позволяет ввести «расстояние» между множествами из $\mathcal{F}$ по формуле

$$d(A, B) = P(A \triangle B).$$

(a) Установить следующее важное топологическое свойство σ -алгебры, порожденной некоторой алгеброй $\mathcal{A}$ множеств из $\mathcal{F}$:

σ -алгебра $\sigma(\mathcal{A})$ с необходимостью содержится в замыкании алгебры $\mathcal{A}$ в смысле «расстояния» d , иначе говоря, любой элемент σ -алгебры $\sigma(\mathcal{A})$ сколь угодно точно приближается элементами алгебры $\mathcal{A}$ в смысле «расстояния» d .

(b) Показать также, что любой элемент $A \in \sigma(\mathcal{A})$ сколь угодно точно приближается некоторым своим счетным накрытием $\bigcup_n A_n$ (т. е. $A \subseteq \bigcup_n A_n$, $A_n \in \mathcal{A}$, в смысле d).

Решение. (a) По сути требуется установить, что для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ и всякого $B \in \sigma(\mathcal{A})$ можно найти такое $A \in \mathcal{A}$, что $P(A \triangle B) \leq \varepsilon$.

Воспользуемся *принципом подходящих множеств*. Пусть

$$\mathcal{B} = \{B \in \sigma(\mathcal{A}) \mid \forall \varepsilon > 0 \exists A \in \mathcal{A} : P(A \triangle B) \leq \varepsilon\}.$$

Тогда если $B \in \mathcal{B}$, то $\bar{B} \in \mathcal{B}$ в силу очевидного равенства $P(A \triangle B) = P(\bar{A} \triangle \bar{B})$. К тому же если $B_1, B_2, \dots$ лежат в $\mathcal{B}$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, что

$$P(A_n \triangle B_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Выберем N из условия

$$P\left(\bigcup_n B_n \setminus \bigcup_{n=1}^N B_n\right) \leq \varepsilon.$$

Тогда с учетом задачи II.1.20

$$P\left(\bigcup_{n=1}^N A_n \triangle \bigcup_n B_n\right) \leq P\left(\bigcup_n B_n \setminus \bigcup_{n=1}^N B_n\right) + \sum_{n=1}^N P(A_n \triangle B_n) < 2\varepsilon,$$

откуда с учетом условия $\bigcup_{n=1}^N A_n \in \mathcal{A}$ находим, что $\bigcup_n B_n \in \mathcal{B}$ (так как ε произвольно). Тем самым, система $\mathcal{B}$ является σ -алгеброй, а значит, $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A})$.

(b) Рассмотрим систему $\mathcal{C}$ элементов σ -алгебры $\sigma(\mathcal{A})$, которые вместе со своим дополнением сколь угодно точно приближаются счетными накрытиями из элементов $\mathcal{A}$. По своему определению система $\mathcal{C}$ замкнута относительно дополнений и содержит $\mathcal{A}$. Осталось проверить, что она замкнута относительно счетных объединений. Пусть элементы $C_1, C_2, \dots \in \mathcal{C}$ и их накрытия $\{A_{n1}\}, \{A_{n2}\}, \dots \in \mathcal{A}$ таковы, что для фиксированного $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$P\left(\bigcup_n A_{nk} \setminus C_k\right) \leq \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Следовательно,

$$P\left(\left[\bigcup_{n,k} A_{nk}\right] \setminus \bigcup_k C_k\right) \leq P\left(\bigcup_k \left[\bigcup_n A_{nk} \setminus C_k\right]\right) \leq \sum_k \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Рассмотрим теперь дополнения $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots \in \mathcal{C}$ и их накрытия

$$\{B_{n1}\}, \{B_{n2}\}, \dots \in \mathcal{A},$$

для которых

$$P\left(\bigcup_n B_{nk} \setminus \bar{C}_k\right) \leq \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Имеем

$$P\left(\left[\bigcap_k \bigcup_n B_{nk}\right] \setminus \bigcap_k \bar{C}_k\right) \leq \sum_k \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon,$$

так что при достаточно большом K выполняется неравенство

$$P\left(\left[\bigcap_{k=1}^K \bigcup_n B_{nk}\right] \setminus \bigcap_k \bar{C}_k\right) \leq 2\varepsilon$$

и при этом

$$\bigcap_{k=1}^K \bigcup_n B_{nk} = \bigcup_{n_1, \dots, n_K} B_{n_1 1} \dots B_{n_K K},$$

а $\{B_{n_1 1} \dots B_{n_K K}\} \subseteq \mathcal{A}$ образует счетное накрытие множества $\bigcap_k \bar{C}_k = \overline{\bigcup_k C_k}$. Последнее с учетом предшествующих рассуждений гарантирует, что $\bigcup_k C_k \in \mathcal{C}$. $\square$

8. В данной задаче предлагается провести *топологическое* доказательство *теоремы Каратеодори* для вероятностных мер.

Итак, пусть имеется некоторая алгебра $\mathcal{A}$ подмножеств Ω и заданная на ней счетно-аддитивная вероятностная мера P . Согласно заключению задачи II.3.7 если продолжение меры P на $\sigma(\mathcal{A})$ существует, то с необходимостью выполнены следующие свойства: для всех множеств $A \in \sigma(\mathcal{A})$ справедливо равенство

$$P(A) = \inf P\left(\bigcup_n A_n\right),$$

где $\inf$ берется по всем счетным накрытиям $\{A_1, A_2, \dots\} \subseteq \mathcal{A}$ множества A (иначе говоря, $A \subseteq \bigcup_n A_n$), и, кроме того, все множества $A \in \sigma(\mathcal{A})$ лежат в замыкании алгебры $\mathcal{A}$ в смысле «расстояния» $d(A, B) = P(A \triangle B)$. Отметим также, что первое свойство само по себе гарантирует единственность искомого продолжения и в точности дает его вид.

Тем самым возникает естественный путь продолжения P на $\sigma(\mathcal{A})$, а именно, определить вначале *внешнюю меру* $P^*(A)$ любого множества $A \subseteq \Omega$, полагая

$$P^*(A) = \inf P\left(\bigcup_n A_n\right),$$

где $P\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_n P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)$ (это задание корректно) и, как и раньше, $\inf$ берется по всем счетным покрытиям множества A элементами алгебры $\mathcal{A}$, а затем исследовать вопрос счетной аддитивности меры P^* на замыкании $\mathcal{A}^* \subseteq 2^\Omega$ системы $\mathcal{A}$ в смысле «расстояния» d .

На самом деле $\mathcal{A}^*$ будет σ -алгеброй, содержащей $\sigma(\mathcal{A})$, а P^* будет задавать вероятностную меру на $\mathcal{A}^*$. Как и в работе [88], предлагается провести доказательство этого результата, установив последовательно следующие утверждения.

(а) Внешняя мера P^* *счетно-субаддитивна*, т. е., каковы бы ни были множества $B_1, B_2, \dots \in \Omega$, справедливо неравенство

$$P^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P^*(B_n),$$

и при этом $P^* = P$ на $\mathcal{A}$.

(b) Класс $\mathcal{A}^*$ является алгеброй.

(c) Внешняя мера P^* конечно-аддитивна на $\mathcal{A}^*$.

(d) Класс $\mathcal{A}^*$ есть σ -алгебра (не меньшая $\sigma(\mathcal{A})$), поскольку $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^*$), причем P^* — вероятностная мера на $\mathcal{A}^*$.

Решение. (а) Отметим вначале, что для всякого $A \in \mathcal{A}$, очевидным образом, выполняются равенства

$$P(A) = \inf P\left(\bigcup_n (A_n A)\right) = \inf P\left(\bigcup_n A_n\right) = P^*(A)$$

(первое равенство вытекает из счетной аддитивности меры P на алгебре $\mathcal{A}$). Далее, любая последовательность накрытий $\{A_{n1}, A_{n2}, \dots\}$ множеств B_n задает накрытие $\{A_{nm}, n, m \geq 1\}$ объединения $B = \bigcup_n B_n$.

При этом имеет место неравенство

$$P^*(B) \leq P\left(\bigcup_{n,m} A_{nm}\right) \leq \sum_m P\left(\bigcup_n A_{nm}\right).$$

Переходя в нем к нижней грани по $\{A_{nm}\}$, получаем счетную субаддитивность меры P^* . Заметим также, что $P^*(\emptyset) = 0$. Это гарантирует конечную субаддитивность P^* . Кроме того, в силу очевидной монотонности множества P^* имеем

$$P^*(A) \leq P^*(B \cup (A \triangle B)) \leq P^*(B) + d(A, B).$$

Всюду далее ε будет обозначать сколь угодно малое положительное число. Мы также постоянно будем использовать основные свойства операции « $\triangle$ » из задачи II.1.20.

(b) Если $B \in \mathcal{A}^*$, то $d(A, B) < \varepsilon$ для некоторого $A \in \mathcal{A}$. Но $A \triangle B = \bar{A} \triangle \bar{B}$ и, значит, $d(A, B) = d(\bar{A}, \bar{B}) < \varepsilon$, причем $\bar{A} \in \mathcal{A}$ (так как $\mathcal{A}$ — алгебра). Это означает, что $\bar{B} \in \mathcal{A}^*$.

Если теперь $B_1, B_2 \in \mathcal{A}^*$, то $d(A_i, B_i) < \varepsilon$, $i = 1, 2$, для некоторых $A_i \in \mathcal{A}$. Всегда имеет место включение

$$(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2),$$

поэтому $d(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) < 2\varepsilon$ и, значит, $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{A}^*$ (поскольку $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$).

(с) Пусть теперь B_1 и B_2 такие же, как и в п. (b), но уже не пересекаются. Имеем $P^*(B_1 \cup B_2) \leq P^*(B_1) + P^*(B_2)$ и

$$P^*(A_1 \cup A_2) \leq P^*(B_1 \cup B_2) + d(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \leq P^*(B_1 \cup B_2) + 2\varepsilon.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} P^*(A_1 \cup A_2) &= P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = \\ &= P^*(A_1) + P^*(A_2) - P^*(A_1 A_2) \geq P^*(B_1) + P^*(B_2) - 2\varepsilon - P^*(A_1 A_2). \end{aligned}$$

Используя теперь включение

$$(A_1 A_2 =) A_1 A_2 \Delta B_1 B_2 \subseteq (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2),$$

находим (при $B_1 B_2 = \emptyset$)

$$P^*(A_1 A_2) \leq d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2) < 2\varepsilon.$$

Окончательно получаем, что

$$P^*(B_1) + P^*(B_2) - 6\varepsilon \leq P^*(B_1 \cup B_2) \leq P^*(B_1) + P^*(B_2)$$

Отсюда, конечно, следует конечная аддитивность меры P^* на $\mathcal{A}^*$.

(d) Пусть теперь $B_1, B_2, \dots$ — произвольные элементы алгебры $\mathcal{A}^*$. Надо проверить, что $\bigcup_n B_n \in \mathcal{A}^*$. Поскольку при $B_0 = \emptyset$ выполняется равенство

$$\bigcup_n B_n = \bigcup_{n \geq 1} \left(B_n \setminus \bigcup_{i < n} B_i \right)$$

и $B_n \setminus \bigcup_{i < n} B_i \in \mathcal{A}^*$, можно считать, что B_n попарно не пересекаются.

В этом случае

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^*(B_n) = \lim_N \sum_{n=1}^N P^*(B_n) = \lim_N P^*\left(\bigcup_{n=1}^N B_n\right) \leq 1.$$

Другими словами, при достаточно большом N справедливо неравенство

$$\sum_{n > N} P^*(B_n) < \varepsilon.$$

Выберем теперь такие $A_1, \dots, A_N \subseteq \mathcal{A}$, что

$$\sum_{n=1}^N d(B_n, A_n) < \varepsilon.$$

Тогда

$$d\left(\bigcup_n B_n, \bigcup_{n=1}^N A_n\right) \leq \sum_{n=1}^N d(B_n, A_n) + \sum_{n>N} d(B_n, \emptyset) \leq \varepsilon + \sum_{n>N} P^*(B_n) < 2\varepsilon,$$

что гарантирует выполнение условия $\bigcup_n B_n \in \mathcal{A}^*$.

Рассмотрим теперь внешнюю меру объединения $\bigcup_n B_n$. В силу субаддитивности P^* имеем

$$P^*\left(\bigcup_n B_n\right) \leq \sum_n P^*(B_n),$$

однако в силу конечной аддитивности

$$\lim_N \sum_{n=1}^N P^*(B_n) = \lim_N P^*\left(\bigcup_{n=1}^N B_n\right) \leq P^*\left(\bigcup_n B_n\right).$$

Другими словами, с необходимостью $P^*\left(\bigcup_n B_n\right) = \sum_n P^*(B_n)$. Мы доказали, что P^* есть вероятностная (так как $P^*(\Omega) = P(\Omega) = 1$) мера на σ -алгебре $\mathcal{A}^*$. $\square$

9. (Продолжение задачи II.3.7.) Пусть $\mathcal{A}$ — некоторая алгебра подмножеств из Ω и $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$. Пусть μ есть σ -конечная мера на $\mathcal{F}$. Показать, что

- (а) мера μ на $\mathcal{A}$ может быть не σ -конечной;
- (б) если мера μ на $\mathcal{A}$ является σ -конечной, то справедлив аналог результата задачи II.3.7(a), т. е. для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ и всякого $B \in \sigma(\mathcal{A})$, $\mu(B) < \infty$, найдется такое множество $A \in \mathcal{A}$, что $\mu(A \triangle B) < \varepsilon$;

(с) если мера μ на $\mathcal{A}$ не является σ -конечной, то приведенное в п. (б) свойство может не выполняться.

Решение. (а) Рассмотрим полуось $\mathbb{R}_+$ с σ -алгеброй борелевских множеств $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ и мерой Лебега λ . Определим систему множеств

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+): A \cap [0, 2^n) + 2^n = A \cap [2^n, 2^{n+1})\}$$

при всех достаточно больших n ,

где $B + a = \{b + a: b \in B\}$ при $B \subseteq \mathbb{R}_+$ и $a \in \mathbb{R}$. Легко показать, что $\mathcal{A}$ есть алгебра (но не σ -алгебра). Кроме того, для любого ограниченного множества $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ найдутся $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, для которых $B = \bigcap_n A_n$, так что $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) = \sigma(\mathcal{A})$. При этом очевидно, что $\lambda(A) \in \{0, \infty\}$ для

всякого $A \in \mathcal{A}$, т. е. ограничение меры λ на $\mathcal{A}$ не является σ -конечной мерой.

(b) Если мера μ на $\mathcal{A}$ является σ -конечной, то найдется последовательность таких множеств $\Omega_1, \Omega_2, \dots \in \mathcal{A}$, что $\Omega_n \uparrow \Omega$ и $\mu(\Omega_n) < \infty$. Пусть n таково, что $\mu(B \setminus \Omega_n) < \varepsilon/2$. Нетрудно видеть, что $B \setminus \Omega_n \in \sigma(\mathcal{A}) \cap \Omega_n = \sigma(\mathcal{A} \cap \Omega_n)$. Применяя далее задачу II.3.7(a) к мере $P = \mu/\mu(\Omega_n)$, можно найти множество $A \in \mathcal{A} \cap \Omega_n$, для которого $\mu(A \triangle B \setminus \Omega_n) \leq \varepsilon/2$ и, значит,

$$\mu(A \triangle B) < \varepsilon.$$

(c) Следует рассмотреть ту же конструкцию, что и в п. (a). □

10. Дать непосредственное доказательство равенств

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1,$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} C_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = 1, \quad (p, k) \in (0, 1] \times \mathbb{N},$$

показывающих соответственно, что гауссовское и отрицательно-биномиальное распределения действительно являются *распределениями вероятностей*.

Решение. Для проверки первого равенства следует заметить, что

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}} dr = 2\pi,$$

где в последнем равенстве мы перешли к полярным координатам (r, φ) . Рассмотрим теперь второе равенство. Имеем

$$I = \sum_{n \geq k} C_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{(1-q)^k}{(k-1)!} \sum_{n \geq k} (n-1) \dots (n-k+1) q^{n-k},$$

где $q = 1 - p$, а последняя сумма есть не что иное, как $(k-1)$ -я производная функции $f(q) = (1-q)^{-1}$, $q \in [0, 1)$, которая, очевидно, равна $(k-1)!(1-q)^{-k}$. Отсюда следует, что $I = 1$. □

11. (*К теореме Каратеодори*. I.) Привести пример, показывающий, что если мера μ на алгебре $\mathcal{A}$ конечно-аддитивна, но не счетно-аддитивна, то ее нельзя, вообще говоря, продолжить до счетно-аддитивной меры на $\sigma(\mathcal{A})$.

Решение. Пусть $\Omega = \mathbb{Q}$, а $\mathcal{A}$ — алгебра всевозможных конечных объединений полуинтервалов вида $(a, b] = \{r \in \mathbb{Q} : a < r \leq b\}$, $a, b \in \mathbb{Q}$,

для которых положим $\mu((a, b]) = b - a$. Так заданная мера μ является конечно-аддитивной функцией на $\mathcal{A}$. Однако μ не продолжается до счетно-аддитивной функции на $\sigma(\mathcal{A}) = \{A : A \subseteq \mathbb{Q}\}$. Действительно, если предположить противное, то

$$\mu(\{r\}) = 0 = \lim_n \mu((r - 1/n, r])$$

и поэтому

$$\mu((a, b]) = \sum_{r: a < r \leq b} \mu(\{r\}) = 0 \neq b - a,$$

противоречие. $\square$

12. (К теореме Каратеодори. II.) Дать пример конечной счетно-аддитивной функции μ , которая задана на некоторой алгебре $\mathcal{A}$ и которая не продолжается до счетно-аддитивной функции μ на $\sigma(\mathcal{A})$ (быть может, принимающей бесконечные значения).

Решение. Пусть $\mathcal{A}$ состоит из множеств вида

$$A(n_1, \dots, n_{k+1}) = (0, 1/n_1] \cup (1/(n_2 + 1), 1/n_2] \cup \dots \cup (1/(n_k + 1), 1/n_k]$$

и

$$B(n_2, \dots, n_k) = (1/(n_2 + 1), 1/n_2] \cup \dots \cup (1/(n_k + 1), 1/n_k],$$

где $k \geq 1$, $n_1 > n_2 > n_3 > \dots$ и все n_i лежат в $\mathbb{N}$. Легко видеть, что система $\mathcal{A}$ замкнута относительно дополнений (в $(0, 1]$) и конечных объединений, а потому является алгеброй. Положим

$$\mu(A(n_1, \dots, n_k)) = \sum_{i=2}^k \frac{(-1)^{n_i+1}}{n_i} + \sum_{n \geq n_1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

и

$$\mu(B(n_2, \dots, n_k)) = \sum_{i=2}^k \frac{(-1)^{n_i+1}}{n_i}.$$

При таком задании функция μ конечна и счетно-аддитивна на $\mathcal{A}$. Последнее вытекает, в частности, из того, что

$$\mu((0, 1/n_1]) = \sum_{n \geq n_1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n \geq n_1} \mu((1/(n+1), 1/n]),$$

а также (условной) сходимости ряда $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1}/n$.

Если бы функция μ продолжалась на $\sigma(\mathcal{A})$ до счетно-аддитивной функции, то для любых натуральных $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$ ряд

$$\sum_{k \geq 1} \mu((1/(m_k + 1), 1/m_k]) \left(= \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{m_k+1}}{m_k} \right)$$

сходилась бы к $\mu\left(\bigcup_{k \geq 1} (1/(m_k + 1), 1/m_k]\right)$. В силу условной сходимости ряда $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1}/n$ можно выбрать такие (m_k) , что

$$\lim_K \sum_{k=1}^K \frac{(-1)^{m_k+1}}{m_k} \geq 1 \quad \text{и} \quad \lim_K \sum_{k=1}^K \frac{(-1)^{m_k+1}}{m_k} \leq -1.$$

Это противоречит сходимости ряда $\sum_{k \geq 1} (-1)^{m_k+1}/m_k$. $\square$

13. Пусть P — вероятностная мера на σ -алгебре $\mathcal{F}$ подмножеств множества Ω . Пусть $C \subseteq \Omega$, но $C \notin \mathcal{F}$. Показать, что меру P можно продолжить с сохранением свойства счетной аддитивности на σ -алгебру $\sigma(\mathcal{F} \cup \{C\})$.

Решение. Согласно задаче II.2.20 имеем

$$\sigma(\mathcal{F} \cup \{C\}) = \{AC \cup B\bar{C} : A, B \in \mathcal{F}\}.$$

Тогда требуемое продолжение можно задать так:

$$P(AC \cup B\bar{C}) = P^*(AC) + P_*(B\bar{C}),$$

где $P^*(E) = \inf\{P(D) : E \subset D \in \mathcal{F}\}$, $P_*(E) = \sup\{P(D) : D \subset E, D \in \mathcal{F}\}$. Такое определение корректно ($P^*(A) = P(A)$ при $A \in \mathcal{F}$). Осталось проверить счетную аддитивность. Без ограничения общности будем рассматривать только P^* .

Установим вначале конечную аддитивность, т. е. то, что

$$P^*(AC \cup BC) = P^*(AC) + P^*(BC)$$

при $A, B \in \mathcal{F}$, $AC \cap BC = \emptyset$. В силу равенства $BC = (B \setminus A)C$ можно считать, что $AB = \emptyset$. Имеем

$$\begin{aligned} P^*(AC \cup BC) &= \inf\{P(D) : AC \cup BC \subset D \in \mathcal{F}\} = \\ &= \inf\{P(AD) + P(BD) : AC \subset AD, BC \subset BD, D \in \mathcal{F}\} = \\ &= \inf\{P(AD') : AC \subset AD', D' \in \mathcal{F}\} + \\ &\quad + \inf\{P(BD'') : BC \subset BD'', D'' \in \mathcal{F}\} = P^*(AD) + P^*(BD). \end{aligned}$$

Отсюда легко вывести счетную аддитивность: для попарно непересекающихся множеств $A_n \in \mathcal{F}$ выполняется равенство

$$P^*\left(\bigcup_n A_n C\right) = \sum_{n \leq N} P^*(A_n C) + R_N,$$

где $R_N = P^*\left(\bigcup_{n > N} A_n C\right) \leq \sum_{n > N} P(A_n) \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$. Если $A_n C$ попарно не пересекаются, но A_n могут пересекаться, то для вывода счетной

аддитивности следует перейти к множествам $B_n = A_n \setminus \bigcup_{i < n} A_i$. При этом, очевидно, $A_n C = B_n C$.

Если $P_*(C) = 0$, $P^*(C) = 1$, то продолжение строится более просто:

$$P(AC \cup B\bar{C}) = \lambda P(A) + (1 - \lambda)P(B),$$

где λ — фиксированное число в $[0, 1]$. Здесь надо лишь проверить корректность введенного определения: $AC \cup B\bar{C} = A'C \cup B'\bar{C} \Rightarrow P(A) = P(A')$ и $P(B) = P(B')$. $\square$

14. Используя лемму Цорна, эквивалентную аксиоме выбора: «если на множестве X задан такой частичный порядок $\prec$, что любая цепь, т. е. множество попарно сравнимых элементов, обладает максимальным элементом, то существует элемент $x_{\max} \in X$, для которого $x \prec x_{\max}$ при всех $x \in X$ »,

показать, что всякая конечно-аддитивная вероятностная мера P , заданная на алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств Ω , может быть продолжена до конечно-аддитивной вероятности на всех подмножествах из Ω .

Решение. Для любого $A \notin \mathcal{A}$ продолжить P на алгебру, порожденную $\mathcal{A}$ и A , можно точно так же, как при решении задачи II.3.13. Зададим на всех таких продолжениях частичный порядок $\prec$, считая, что $P_1 \prec P_2$, если P_i — продолжение P на алгебру $\mathcal{A}_i \supseteq \mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$. Очевидно, каждая цепь мер P_λ на алгебрах $\mathcal{A}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, обладает максимальным элементом Q , корректно заданным формулой

$$Q|_{\mathcal{A}_\lambda} = P_\lambda$$

на алгебре $\bigcup_\lambda \mathcal{A}_\lambda$. Таким образом, по лемме Цорна существует максимальное продолжение $P_{\max}$. Оно будет определено на всех подмножествах множества Ω (иначе его можно будет продлить и тем самым возникнет противоречие с максимальностью). $\square$

15. Пусть μ и ν — две вероятностные меры на пространстве $(E, \mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ — некоторая σ -алгебра подмножеств множества E . Допустим, что для каждого $\delta > 0$ найдется такое $E_\delta \in \mathcal{E}$, что $\mu(E_\delta) < \delta$ и $\nu(\bar{E}_\delta) < \delta$. Доказать, что тогда существует такое множество $D \in \mathcal{E}$ с ν -нулевой мерой, что

$$\mu(B) = \mu(BD) \quad \text{для всех } B \in \mathcal{E}. \quad (*)$$

Замечание. Утверждение элементарным образом переносится на произвольные σ -конечные меры μ и ν .

Решение. Следует взять

$$D = E \setminus \bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N} E_{2^{-n}}. \quad \square$$

16. Пусть μ и ν — две вероятностные меры на пространстве $(E, \mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ — некоторая σ -алгебра подмножеств множества E . Лебег доказал, что всегда имеет место разложение

$$\mu(B) = \int_B f d\nu + \mu(BD), \quad B \in \mathcal{E},$$

для некоторого множества D , $\nu(D) = 0$, и неотрицательной $\mathcal{E}$ -измеримой функции $f = f(x)$, $x \in E$. Более того, данное разложение единственно в том смысле, что если оно имеет место для пар (f, D) и (g, C) , то $\mu(D \triangle C) = 0$ и $\nu(f \neq g) = 0$.

Установить справедливость этого разложения по следующей схеме.

(а) Заметить прежде всего, что функция f должна обладать свойством вида

$$\int_B f d\nu \leq \mu(B) \quad \text{для всех } B \in \mathcal{E}. \quad (**)$$

Взять в качестве искомой функции f функцию $\text{ess sup } g$ (см. задачу П.4.2), где ess sup (в смысле меры ν) берется по всем $\mathcal{E}$ -измеримым функциям g , удовлетворяющим свойству $(**)$ с заменой f на g .

При таком определении для любого $n \geq 1$ справедлива импликация вида

$$\frac{\nu(BC)}{n} = \int_B \frac{I_C}{n} d\nu \leq \lambda(B) = \mu(B) - \int_B f d\nu$$

для всех $B \in \mathcal{E} \Rightarrow \nu(C) = 0. \quad (\circ)$

(b) Проверить, что при каждом $n \geq 1$ верхняя грань

$$\sup_{B \in \mathcal{E}} [\lambda(B) - n^{-1} \nu(B)]$$

достигается на некотором множестве $D_n \in \mathcal{E}$ нулевой ν -меры. Убедиться, наконец, в том, что

$$D = \bigcup_n D_n$$

и есть искомое множество, участвующее наряду с f в разложении Лебега.

(с) Доказать, что разложение Лебега единственно.

Замечание. Данное разложение имеет место для любых σ -конечных мер μ и ν . Кроме того, теорема Радона—Никодима элементарным образом следует из рассматриваемого разложения Лебега.

Решение. (а) Отметим вначале, что если $\mathcal{E}$ -измеримые функции $f_n = f_n(x)$, $n \geq 1$, удовлетворяют условию (**), то $\sup_n f_n$ также удовлетворяет условию (**):

$$\begin{aligned} \int_B \sup_n f_n d\nu &= \\ &= \sum_{m \geq 1} \int_{B \cap \{ \max_{i \leq m-1} f_i < f_m = \sup_n f_n \}} f_m d\nu \leq \mu(B \cap \{ \max_{i \leq m-1} f_i < f_m = \sup_n f_n \}) = \mu(B) \end{aligned}$$

для всех $B \in \mathcal{E}$ при $f_0 \equiv -\infty$. Отсюда нетрудно вывести, что в качестве f можно взять $\text{ess sup } g$.

(b) Допустим вначале, что существует такое $D_n \in \mathcal{E}$, что

$$\sup_{C \in \mathcal{E}} [\lambda(C) - n^{-1}\nu(C)] = \lambda(D_n) - n^{-1}\nu(D_n).$$

Полагая $C = \bar{B}D_n$, $B \in \mathcal{E}$, находим

$$n^{-1}\nu(BD_n) = n^{-1}[\nu(D_n) - \nu(C)] \leq \lambda(D_n) - \lambda(C) = \lambda(BD_n) \leq \lambda(B),$$

откуда согласно импликации (о) заключаем, что $\nu(D_n) = 0$. Кроме того,

$$\lambda(\bar{D}_n) - n^{-1}\nu(\bar{D}_n) \leq 0.$$

В самом деле, иначе бы имела место оценка

$$\lambda(\bar{D}_n \cup D_n) - n^{-1}\nu(\bar{D}_n \cup D_n) > \lambda(D_n) - n^{-1}\nu(D_n),$$

что, конечно, противоречит определению D_n . Если теперь D есть объединение всех D_n , то D , во-первых, обязательно имеет ν -меру нуль (так как $\nu(D_n) = 0$) и, во-вторых, для любого $m \geq 1$ выполняется условие

$$0 \leq \lambda(\bar{D}) = \lambda\left(\bigcap_n \bar{D}_n\right) \leq \lambda(\bar{D}_m) \leq m^{-1}\nu(D_m) \leq m^{-1},$$

т. е. $\lambda(\bar{D}) = 0$.

Осталось убедиться в том, что множество D_n , реализующее

$$S_n = \sup_B [\lambda(B) - n^{-1}\nu(B)]$$

для фиксированного $n \geq 1$, существует. Установим вначале вспомогательный факт, что при взятии верхней грани достаточно ограничиться множествами B , которые не имеют подмножеств C с отрицательным весом $\lambda(C) - n^{-1}\nu(C) < 0$. Если это так, то в качестве D_n можно будет взять $\bigcup_{m \geq 1} B_m$, где $B_m \in \mathcal{E}$ таковы, что

$$\lim_m [\lambda(B_m) - n^{-1}\nu(B_m)] = S_n.$$

Действительно, в этом случае

$$\begin{aligned}
 S_n &\geq \lambda(D_n) - n^{-1}\nu(D_n) = \lim_m \left[\lambda\left(\bigcup_{j=1}^m B_j\right) - n^{-1}\nu\left(\bigcup_{j=1}^m B_j\right) \right] = \\
 &= \lim_m \left\{ \lambda(B_m) - n^{-1}\nu(B_m) + \sum_{i=1}^{m-1} \left[\lambda\left(B_{m-i} \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} B_{m-j}\right) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - n^{-1}\nu\left(B_{m-i} \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} B_{m-j}\right) \right] \right\} \geq \lim_m [\lambda(B_m) - n^{-1}\nu(B_m)] = S_n.
 \end{aligned}$$

Итак, пусть имеется произвольное множество $B \in \mathcal{E}$. Покажем, как можно увеличить величину $\lambda(B) - n^{-1}\nu(B)$, выкидывая из B подмножества с отрицательным весом (если они найдутся). Пусть $C_1 \subseteq B$ таково, что

$$\lambda(C_1) - n^{-1}\nu(C_1) \leq \frac{1}{2} \inf_{C \subseteq B} [\lambda(C) - n^{-1}\nu(C)] \quad (\leq 0).$$

Определим $B_1 = B \setminus C_1$. Очевидно,

$$\lambda(B) - n^{-1}\nu(B) \leq \lambda(B_1) - n^{-1}\nu(B_1)$$

и

$$\inf_{C \subseteq B} [\lambda(C) - n^{-1}\nu(C)] \leq \inf_{C \subseteq B_1} [\lambda(C) - n^{-1}\nu(C)].$$

Аналогично пусть

$$\lambda(C_2) - n^{-1}\nu(C_2) \leq \frac{1}{2} \inf_{C \subseteq B_1} [\lambda(C) - n^{-1}\nu(C)] \quad (\leq 0)$$

и $B_2 = B_1 \setminus C_2$. Продолжая такую процедуру до бесконечности, получим некоторое множество B_∞ , для которого

$$\inf_{C \subseteq B_\infty} [\lambda(C) - n^{-1}\nu(C)] = 0 \quad \text{и} \quad \lambda(B) - n^{-1}\nu(B) \leq \lambda(B_\infty) - n^{-1}\nu(B_\infty)$$

(в качестве C можно брать $\emptyset$). В самом деле, если

$$\inf_{C \subseteq B_\infty} [\lambda(C) - n^{-1}\nu(C)] = \alpha < 0,$$

то

$$\lambda\left(\bigcup_k C_k\right) - n^{-1}\nu\left(\bigcup_k C_k\right) = \sum_k [\lambda(C_k) - n^{-1}\nu(C_k)] \leq \sum_k \frac{\alpha}{2} = -\infty,$$

что противоречит конечности мер λ и ν .

Таким образом, мы доказали существование D и, значит, разложения Лебега.

(с) Пусть пара (g, C) такова, что $\nu(C) = 0$ и для всех $B \in \mathcal{B}$ выполняется равенство

$$\mu(B) = \int_B f \, d\nu + \mu(BD) = \int_B g \, d\nu + \mu(BC).$$

По построению функции f с необходимостью $\nu(f < g) = 0$. Поскольку $\nu(D \cup C) = 0$, мы получим

$$\int_E (f - g) \, d\nu = \int_{\bar{D} \cap \bar{C}} (f - g) \, d\nu = \mu(\bar{D} \cap \bar{C} \cap C) - \mu(\bar{D} \cap \bar{C} \cap D) = 0.$$

Следовательно, $\nu(f \neq g) = 0$, $\mu(BD) = \mu(BC)$ для всех $B \in \mathcal{E}$ и, значит, $\mu(D \triangle C) = 0$. $\square$

17. Доказать следующий фундаментальный результат о структуре функций распределения: каждая такая функция $F = F(x)$ представляется в виде

$$F = \alpha_1 F_d + \alpha_2 F_{abc} + \alpha_3 F_{sc},$$

где $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$,

F_d — дискретная функция распределения со скачками в некоторых точках x_k :

$$F_d(x) = \sum_{\{k: x \geq x_k\}} [F_d(x_k) - F_d(x_k -)],$$

F_{abc} — абсолютно непрерывная функция распределения, т. е.

$$F_{abc}(x) = \int_{-\infty}^x f(y) \, dy,$$

где (плотность) $f = f(x)$ — неотрицательная борелевская функция, интегрируемая по Лебегу, причем $\int_{\mathbb{R}} f(x) \, dx = 1$,

F_{sc} — сингулярная функция распределения, т. е. непрерывная функция распределения, множество точек роста которой имеет нулевую лебегову меру.

Что можно сказать о единственности приведенного представления?

Решение. Дискретную компоненту можно выделить, положив

$$\alpha_1 = \sum_y [F(y) - F(y-)], \quad F_d(x) = \frac{1}{\alpha_1} \sum_{y: x \geq y} [F(y) - F(y-)],$$

где сумма по y определена корректно, поскольку возрастающая функция F имеет не более чем счетное число разрывов. Очевидно, что

$F - \alpha_1 F_d$ — непрерывная функция, причем F_d определяется этим условием однозначно.

Теперь без ограничения общности можно считать, что функция F непрерывна. Для завершения доказательства надо перейти к мере μ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, отвечающей функции распределения F , а далее воспользоваться разложением Лебега (см. замечание к задаче II.3.16), установив, что

$$\mu(B) = \int_B f(x) dx + \mu(BD), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

для некоторой неотрицательной борелевской функции $f = f(x)$ и борелевского множества D лебеговой меры нуль. Если $\mu(D) = 0$, то сингулярной компоненты F_{sc} не будет, так как в этом случае

$$\mu((-\infty, x]) = F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Иначе же сингулярная компонента есть не что иное, как функция распределения, отвечающая вероятностной мере $\nu(B) = \mu(BD)/\mu(D)$ (при этом $\alpha_3 = \mu(D)$). Единственность полученного представления можно вывести из единственности разложения Лебега. $\square$

18. (См. [42].) *Теорема Лебега о дифференцировании монотонной функции* утверждает, что

любая неубывающая функция $f = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ имеет конечную производную $f' = f'(x)$ почти во всех (по мере Лебега) точках отрезка $[a, b]$.

Провести доказательство этой теоремы по следующей схеме.

(а) Проверить, что если $g = g(x)$ — функция с ограниченной вариацией на $[a, b]$, то для любого $r > 0$ лебегова мера множества

$$D_r = \{x: \text{функция } g \text{ непрерывна в точке } x, \bar{D} g(x) > r, \underline{D} g(x) < -r\}$$

равна нулю (т. е. оно покрывается счетной системой интервалов со сколь угодно малой суммой длин), где

$$\bar{D} g(x) = \overline{\lim}_{y \rightarrow x} \frac{g(x) - g(y)}{x - y}, \quad \underline{D} g(x) = \underline{\lim}_{y \rightarrow x} \frac{g(x) - g(y)}{x - y}.$$

Напомним, что *вариацией* функции g по отрезку $[a, b]$ называется число

$$V(g) = \sup \sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)|,$$

где $\sup$ берется по всем $(x_i)_{i=1}^n$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $n \geq 1$.

(б) Вывести из п. (а), что $\overline{D} f(x) = \underline{D} f(x)$ почти во всех точках на $[a, b]$ и, значит, $f'(x) \in [0, \infty]$ существует почти всюду на $[a, b]$.

(с) Доказать наконец, что $f'(x) < \infty$ почти всюду на $[a, b]$.

Решение. (а) Выберем малое $\varepsilon > 0$ и такие $x_0 < \dots < x_n$ ($n \geq 1$), образующие разбиение отрезка $[a, b]$, что

$$V(g) - \varepsilon = \sum_i |g(x_{i+1}) - g(x_i)|.$$

Рассмотрим какой-нибудь отрезок $[x_i, x_{i+1}]$. Допустим для определенности, что $g(x_i) \leq g(x_{i+1})$. Для всякого $x \in D_r \cap (x_i, x_{i+1})$ найдется такой интервал (c, d) , содержащий x , что

$$(c, d) \subseteq (x_i, x_{i+1}), \quad \frac{g(d) - g(c)}{d - c} < -r \quad (*)$$

(если $g(x_i) > g(x_{i+1})$, то в формуле $(*)$ надо рассматривать условие $\frac{g(d) - g(c)}{d - c} > r$).

Объединение всех интервалов (c, d) со свойством $(*)$ есть открытое множество G_i , содержащее $D_r \cap (x_i, x_{i+1})$. Наша цель — установить, что мера Лебега множества $\bigcup_i G_i$ мала при малом ε (т. е. стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$). Отсюда, конечно, будет вытекать, что $\lambda(D_r) = 0$, где λ — мера Лебега.

Представим G_i в виде объединения не более чем счетного числа непересекающихся интервалов. Упорядочим эти интервалы по их длине. Выбирая в каждом из получившихся интервалов (начиная с самого длинного) по достаточно большому отрезку, построим конечное число отрезков (в G_i), мера объединения которых не меньше чем $\lambda(G_i)/2$. Обозначим это объединение K_i . Очевидно, K_i есть компакт, лежащий в G_i . Поэтому K_i можно покрыть конечным числом интервалов $(c, d) \subseteq G_i$ со свойством $(*)$, скажем интервалами (c_{ij}, d_{ij}) , $j = 1, \dots, J_i$ ($J_i \geq 1$). Без ограничения общности можно считать, что c_{ij} возрастают по j и ни один из перечисленных интервалов не покрывает пересечение двух других (если оно непусто). Последнее, в частности, означает, что интервалы (c_{ij}, d_{ij}) с нечетными j попарно не пересекаются. Аналогичное утверждение верно для системы интервалов с четными j . Кроме того,

$$\sum_{j \text{ нечетно}} [d_{ij} - c_{ij}] \geq \frac{\lambda(G_i)}{4} \quad \text{или} \quad \sum_{j \text{ четно}} [d_{ij} - c_{ij}] \geq \frac{\lambda(G_i)}{4},$$

так как $\lambda(K_i) \geq \lambda(G_i)/2$. Пусть для определенности последнее неравенство выполнено для четных j при каждом i (общий случай рассматривается по той же схеме). Тогда

$$\begin{aligned} 0 &\leq g(x_{i+1}) - g(x_i) = g(c_{i1}) - g(x_i) + \sum_{j \text{ четно}} [g(d_{ij}) - g(c_{ij})] + \\ &\quad + \sum_{j \text{ четно}} [g(c_{i(j+2)}) - g(d_{ij})] + g(x_{i+1}) - g(d_{i1}) \leq \\ &\leq g(c_{i1}) - g(x_i) - r \sum_{j \text{ четно}} [d_{ij} - c_{ij}] + \sum_{j \text{ четно}} [g(c_{i(j+2)}) - g(d_{ij})] \leq \\ &\leq \sum_j |g(z_{i(j+1)}) - g(z_{ij})| - \frac{r\lambda(G_i)}{4}, \end{aligned}$$

где $(z_{ij})_{j=0}^{n_i}$, $z_{i0} < \dots < z_{in_i}$, — разбиение отрезка $[x_i, x_{i+1}]$, образованное точками

$$x_i, x_{i+1}, c_{i2}, d_{i2}, \dots, c_{ij}, d_{ij}, \dots$$

(j пробегает четные числа, которые не превосходят J_i).

Проводя аналогичные рассуждения для каждого i , видим, что

$$\begin{aligned} V(g) - \varepsilon &= \sum_i |g(x_{i+1}) - g(x_i)| \leq \\ &\leq \sum_{i,j} |g(z_{i(j+1)}) - g(z_{ij})| - \frac{r \sum_i \lambda(G_i)}{4} \leq V(g) - \frac{r \sum_i \lambda(G_i)}{4}, \end{aligned}$$

где мы также учли, что совокупность всех z_{ij} образует разбиение отрезка $[a, b]$. Тем самым

$$\lambda\left(\bigcup_i G_i\right) = \sum_i \lambda(G_i) \leq \frac{4\varepsilon}{r},$$

причем по построению $D_r \subseteq \bigcup_i G_i$. Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем, что $\lambda(D_r) = 0$.

(б) Функция f не может иметь более чем счетное число точек разрыва. Поэтому достаточно показать, что множество

$$D = \{x: \text{функция } f \text{ непрерывна в точке } x, \bar{D} f(x) > \underline{D} f(x)\}$$

имеет нулевую лебегову меру. Поскольку $D = \bigcup D_{pq}$ (объединение ведется по всем рациональным $p, q, p > q$), где

$$D_{pq} = \{x: \text{функция } f \text{ непрерывна в точке } x, \bar{D} f(x) > p > q > \underline{D} f(x)\},$$

достаточно проверить, что мера каждого D_{pq} равна нулю. Полагая $g(x) = f(x) - rx$ при $r = (p - q)/2$ (> 0), видим, что g имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$, так как

$$V(g) \leq f(b) - f(a) + r(b - a),$$

и при этом $\bar{D} g(x) > r$ и $\underline{D} g(x) < -r$ на D_{pq} . Тем самым $\lambda(D_{pq}) = 0$ в соответствии с п. (а).

Итак, $\lambda(\bar{D} f \neq \underline{D} f) = 0$ и, значит, $f'(x) \in [0, \infty]$ существует почти всюду (по мере Лебега).

(с) Проверку того, что $f'(x) < \infty$ почти всюду, можно сделать с помощью тех же рассуждений, что и в п. (а), на основе следующего наблюдения: для произвольных $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ($n \geq 1$) выполняется равенство

$$f(b) - f(a) = \sum_i [f(x_{i+1}) - f(x_i)],$$

и, значит, для фиксированного (большого) $r > 0$ справедливо неравенство

$$\sum_i [x_{i+1} - x_i] I \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} > r \right) \leq \frac{f(b) - f(a)}{r}. \quad \square$$

19. Пусть $X = (X_t)$ — борелевская функция на $[0, T]$. Рассматривая t как *время*, X как *наблюдаемый процесс*, а $[0, T]$ как *период наблюдения* за X , П. Леви предложил следующую формулу для подсчета времени $l_X(x, T)$, проводимого процессом X на уровне $x \in \mathbb{R}$ на временном интервале $[0, T]$:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^T I(x - \varepsilon < X_t < x + \varepsilon) dt.$$

Это так называемое *локальное время*. Доказать, что предел, задающий $l_X(x, T)$, определен и конечен для почти всех x (по мере Лебега).

Решение. Функция

$$F(x) = \int_0^T I(X_t < x) dt$$

монотонна и имеет пределы справа. Согласно задаче II.3.18 почти во всех (по мере Лебега) точках существует (конечная) производная $F'(x)$. Используя существование пределов (справа) $F(x + 0)$, $x \in \mathbb{R}$, легко

установить, что во всех точках x , где существует $F'(x)$, выполняется соотношение

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^T I(x - \varepsilon < X_t < x + \varepsilon) dt &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{F(x + \varepsilon) - F(x - \varepsilon + 0)}{2\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[\frac{F(x + \varepsilon) - F(x)}{2\varepsilon} + \frac{F(x) - F(x - \varepsilon)}{2\varepsilon} \right] = F'(x). \end{aligned}$$

Другими словами, $I_X(x, T)$ ($= F'(x)$) существует и конечно для почти всех x . $\square$

20. (а) Показать, что каждое число $x \in [0, 1]$ допускает представление вида

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n},$$

$x_n \in \{0, 1, 2\}$, $n \geq 1$.

(б) Показать, что если для x есть два представления $x = \sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{3^n}$ и $x = \sum_{n \geq 1} \frac{y_n}{3^n}$ с *необрывающимися* рядами, т. е. $\sum_{n \geq 1} |x_n| = \infty$ и $\sum_{n \geq 1} |y_n| = \infty$, то $x_n = y_n$, $n \geq 1$. Другими словами, имеет место «единственность необрывающихся представлений».

Заметим, что неединственность возможна, когда имеется *обрывающаяся* представление $x = \sum_{n=1}^m \frac{x_n}{3^n}$. В этом случае «каноническое» представление $\sum_{n \geq 1} \frac{y_n}{3^n}$ выбирают следующим образом:

1) если $x = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{x_n}{3^n} + \frac{2}{3^m}$, то полагают

$$y_n = \begin{cases} x_n, & n \leq m-1, \\ 2, & n = m, \\ 0, & n \geq m+1; \end{cases}$$

2) если же $x = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{x_n}{3^n} + \frac{1}{3^m}$, то полагают

$$y_n = \begin{cases} x_n, & n \leq m-1, \\ 0, & n = m, \\ 2, & n \geq m+1. \end{cases}$$

(с) Множеством Кантора $\mathcal{C}$ в $[0, 1]$ принято называть замкнутое множество, которое строится с помощью следующей процедуры. Берется отрезок $[0, 1]$, из которого выкидывается «серединный» интервал, т. е. интервал, середина которого совпадает с серединой изначального отрезка, а длина в три раза меньше. В результате получается два отрезка, из которых также выкидывается по «серединному» интервалу, и т. д. до бесконечности. В результате получается замкнутое множество $\mathcal{C}$ лебеговой меры нуль.

Показать, что

$$\mathcal{C} = \left\{ x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} : x_n \in \{0, 2\}, n \geq 1 \right\}.$$

(d) Установить, что канторово множество $\mathcal{C}$ с евклидовой метрикой гомеоморфно пространству последовательностей $\{0, 1\}^{\infty}$ с метрикой

$$d(x, y) = \sum_{n \geq 1} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}, \quad x, y \in \{0, 1\}^{\infty}.$$

Другими словами, существует такое взаимно однозначное отображение $\varphi: \mathcal{C} \rightarrow \{0, 1\}^{\infty}$, что φ и φ^{-1} являются непрерывными.

Замечание. Интересно отметить, что если рассматривать *десятичные* разложения точек x из канторова множества $\mathcal{C}$, то имеется (см. [108]) всего лишь 14 чисел с обрывающимися представлениями. Эти числа суть

$$\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10}, \frac{1}{40}, \frac{3}{40}, \frac{9}{40}, \frac{13}{40}, \frac{27}{40}, \frac{31}{40}, \frac{37}{40}, \frac{39}{40}.$$

Решение. (а) Искомое разложение можно строить рекуррентно. А именно, положим

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & 1 < x < 2, \\ 2, & 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Тогда

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n},$$

где $x_n = f(z_n)$ при $z_1 = 3x$ и

$$z_n = 3^n x - \sum_{k=1}^{n-1} x_k 3^{n-k}, \quad n > 1.$$

Отметим также, что для чисел x с «обрывающимися» представлениями такая процедура дает их «каноническое» представление.

(b) Допустим, что имеется два представления числа x :

$$x = \sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{3^n} = \sum_{n \geq 1} \frac{y_n}{3^n}$$

где $x_n, y_n \in \{0, 1, 2\}$, $n \geq 1$. Обозначим через $m \geq 1$ первый такой индекс, что $x_m \neq y_m$. Пусть, например, $x_m > y_m$. Тогда

$$\frac{x_m}{3^m} \geq \frac{y_m}{3^m} + \frac{1}{3^m} = \frac{y_m}{3^m} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{2}{3^n} \geq \frac{y_m}{3^m} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{y_n}{3^n}.$$

Последнее с учетом изначального равенства, очевидно, исключает тот случай, что бесконечно много значений x_n отлично от нуля, иначе выполнялось бы неравенство

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{3^n} > \sum_{n \geq 1} \frac{y_n}{3^n}.$$

(c) Если внимательно посмотреть на процедуру построения канторова множества и способ построения «канонического» троичного представления из п. (a), то можно увидеть, что они идентичны в том смысле, что определение $x_n = 0$ или $x_n = 2$ эквивалентно выкидыванию «серединного» интервала. Отсюда, конечно же, получается искомое равенство.

(d) Зададим φ по формуле

$$\varphi(x) = (x_1/2, x_2/2, \dots),$$

где $x_1, x_2, \dots \in \{0, 1, 2\}$ — цифры в «каноническом» представлении числа $x \in \mathcal{C}$

$$x = \sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{3^n}.$$

В силу единственности «канонического» представления отображение φ взаимно однозначно.

Осталось заметить, что сходимость как в $\{0, 1\}^\infty$, так и в $\mathcal{C}$ в соответствующих метриках эквивалентна тому, что цифры (в троичном разложении или как компоненты бесконечного вектора) у элементов сходящихся последовательностей, стоящие на любом фиксированном месте, начинают совпадать с некоторого момента. $\square$

21. Пусть $\mathcal{C}$ — канторово множество на $[0, 1]$.

(а) Показать, что мощность множества $\mathcal{C}$ совпадает с мощностью множества $[0, 1]$.

(б) Чему равны множества

$$\mathcal{C} \oplus \mathcal{C} = \{x + y: x, y \in \mathcal{C}\}, \quad \mathcal{C} \ominus \mathcal{C} = \{x - y: x, y \in \mathcal{C}\}?$$

Решение. (а) Вследствие задачи II.3.20(с) мощность множества $\mathcal{C}$ такая же, как у множества последовательностей, состоящих из 0 и 2. При этом хорошо известно, что мощность множества $\{0, 2\}^\infty$ — континуум.

(б) Покажем, что $\mathcal{C} \oplus \mathcal{C} = [0, 2]$. По определению $\mathcal{C} = \bigcap_n C_n$, где множества

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \supset C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \supset \dots$$

получаются последовательным выкидыванием «серединных» интервалов, см. задачу II.3.20(с). Нам потребуется следующее элементарное наблюдение:

если прямая $x + y = a$ пересекает некоторый квадрат

$$[b, b + l]^2, \quad b \in \mathbb{R}, \quad l > 0,$$

то она с необходимостью пересекает какой-то из четырех «подчиненных» квадратов

$$\begin{aligned} & \left[b, b + \frac{l}{3}\right]^2, \quad \left[b, b + \frac{l}{3}\right] \times \left[b + \frac{2l}{3}, b + l\right], \\ & \left[b + \frac{2l}{3}, b + l\right] \times \left[b, b + \frac{l}{3}\right], \quad \left[b + \frac{2l}{3}, b + l\right]^2. \end{aligned}$$

Согласно этому наблюдению любая прямая $x + y = a$, $0 \leq a \leq 2$, пересекает множество C_1^2 , представляющее собой объединение четырех «подчиненных» $[0, 2]$ квадратов, и, значит, пересекает какой-то из этих квадратов, скажем K . Пересечение квадрата K и C_2^2 вновь есть объединение четырех квадратов, «подчиненных» квадрату K , и прямая $x + y = a$ должна пересекать один из них. Продолжая такие рассуждения, находим, что для каждого $n \geq 1$ выполняется условие

$$\{(x, y) \in C_n^2: x + y = a\} \neq \emptyset,$$

причем эти множества замкнуты и убывают по n . Отсюда следует, что для каждого $0 \leq a \leq 2$ выполняется условие

$$\bigcap_n \{(x, y) \in C_n^2: x + y = a\} = \{(x, y) \in \mathcal{C}^2: x + y = a\} \neq \emptyset$$

и, значит, $[0, 2] \subseteq \mathcal{C} + \mathcal{C}$. Обратное включение очевидно.

В силу симметричности $\mathcal{C}$ относительно $x = 1/2$ имеем

$$\mathcal{C} - \mathcal{C} = \mathcal{C} + (1 - \mathcal{C}) - 1 = \mathcal{C} + \mathcal{C} - 1 = [-1, 1]. \quad \square$$

22. Показать, что канторово множество $\mathcal{C}$ является *компактным, совершенным* (т. е. *замкнутым* и в то же время *плотным в себе* — иначе говоря, без изолированных точек), *нигде не плотным* множеством.

Замечание. Это есть не что иное, как топологическая характеристика канторова множества на прямой. А именно, *любое* компактное, совершенное, нигде не плотное множество в $\mathbb{R}$ гомеоморфно канторову. Это вытекает из результатов Брауэра [43], где исследуется устройство компактных множеств в $\mathbb{R}^n$. Интересно отметить другие важные подмножества в $\mathbb{R}$, допускающие подобную характеристику:

1) множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ есть единственное (с точностью до гомеоморфизма) счетное множество в $\mathbb{R}$ без изолированных точек (Серпинский, [102]);

2) множество иррациональных чисел $\mathbb{P}$ есть единственное множество в $\mathbb{R}$, не содержащее никакого открытого интервала и являющееся полным метрическим пространством при введении некоторой метрики, причем таким, что в нем нет открытых множеств с компактным замыканием (Александров, Урысон, [28]).

Решение. Замкнутость и плотность в себе вытекает из задачи П.3.20(d). Компактность следует из замкнутости и ограниченности. Далее, если бы канторово множество $\mathcal{C}$ было плотным в некотором интервале, то в силу замкнутости $\mathcal{C}$ весь этот интервал принадлежал бы $\mathcal{C}$ и, значит, $\mathcal{C}$ имело бы положительную меру Лебега. Однако (по построению) $\mathcal{C}$ получается выкидыванием непересекающихся интервалов, общая длина которых

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{16}{81} + \dots = 1.$$

Другими словами, мера Лебега множества $\mathcal{C}$ равна нулю, так что $\mathcal{C}$ нигде не плотно. $\square$

23. Привести пример двух множеств A и B на действительной прямой $\mathbb{R}$, имеющих нулевую лебегову меру, но таких, что $A \oplus B = \mathbb{R}$.

Решение. Искомый пример можно построить, применяя задачу П.3.21(b):

$$A = \mathcal{C} \oplus \mathbb{Z}, \quad B = \mathcal{C},$$

где $\mathcal{C}$ — канторово множество на $[0, 1]$. $\square$

24. Пусть множество C замкнуто в $\mathbb{R}$. Построить функцию распределения F , для которой $\text{supp } F = C$.

Решение. Множество $\bar{C}$ открыто в $\mathbb{R}$, а значит, представляется в виде $\bigcup_n I_n$, где I_n — попарно непересекающиеся интервалы. Для $x \in I_n$ положим $F(x) = \arctg a_n$, где a_n — произвольная точка интервала I_n . Доопределим F на граничных точках D множества $\bar{C}$ пределом $F(x)$ справа, $x \in \bar{C}$. Множество $C \setminus D$ открыто, поэтому равно $\bigcup_n J_n$, где J_n — попарно непересекающиеся интервалы. На фиксированном J_n зададим F формулой $F(x) = \arctg x$. Нормируя F :

$$\frac{F(x) - F(-\infty)}{F(\infty) - F(-\infty)},$$

получаем искомую функцию распределения. □

25. Дать пример σ -конечной меры μ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, которая

(а) не является мерой Лебега—Стилтьеса — иными словами, для которой не существует такой неубывающей непрерывной справа функции $G = G(x)$ (обобщенной функции распределения), что $\mu((a, b]) = G(b) - G(a)$, $a < b$;

(б) не является *локально конечной* — иными словами, является такой, что для любой точки $x \in \mathbb{R}$ мера любой ее открытой окрестности равна бесконечности.

Решение. В обоих пунктах можно взять считающую меру из задачи II.6.68. □

26. (Множество Витали.) Введем на $[0, 1]$ отношение эквивалентности « $\sim$ »:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Предполагая справедливость *аксиомы выбора*:

«для любого множества S существует функция выбора, сопоставляющая каждому подмножеству $B \subseteq S$ какой-нибудь его элемент $b \in B$ »,

выберем из каждого класса эквивалентности по числу, образуя множество $\mathcal{V} \subset [0, 1]$. Показать, что $\mathcal{V}$ не принадлежит системе лебеговых множеств $\mathcal{B}([0, 1])$ (см. п. 1 § 3).

Решение. Предполагая, что $\mathcal{V} \in \mathcal{B}([0, 1])$, находим, что

$$[0, 1] \subset \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (\mathcal{V} + q) \subset [-1, 2].$$

С учетом того, что множества $\mathcal{V} + q$ не пересекаются при различных $q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$, получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} 1 = \lambda([0, 1]) &\leq \lambda\left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (\mathcal{V} + q)\right) = \\ &= \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} \lambda(\mathcal{V} + q) \leq \lambda([-1, 2]) = 3. \end{aligned}$$

Используя далее инвариантность меры Лебега λ относительно сдвигов, приходим к равенству

$$\sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} \lambda(\mathcal{V} + q) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} \lambda(\mathcal{V}).$$

Мера $\lambda(\mathcal{V})$ не может быть равной нулю, так как

$$1 \leq \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} \lambda(\mathcal{V}).$$

В то же время она не может быть положительной, поскольку в этом случае

$$\sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} \lambda(\mathcal{V}) = \infty \not\leq 3.$$

Полученное противоречие показывает, что $\mathcal{V}$ не измеримо по Лебегу множество. $\square$

27. (Вероятностное доказательство формулы Эйлера для дзета-функции Римана.) Пусть $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ — дзета-функция Римана ($1 < s < \infty$). Формула Эйлера утверждает, что $\zeta(s)$ допускает следующее представление:

$$\zeta(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right)^{-1},$$

где $p_1, p_2, \dots$ — последовательность простых чисел, больших единицы. Дать доказательство этого результата.

Решение. Пусть $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ — множество натуральных чисел с борелевской σ -алгеброй $2^{\mathbb{N}}$ его подмножеств. Определим на $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ вероятностную меру $P = P(\cdot)$ для подмножеств $A \subseteq \mathbb{N}$, полагая

$$P(A) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n \in A} n^{-s}.$$

Пусть $A_{p_i} = \{p_i, 2p_i, \dots\}$ — множество тех $n \in \mathbb{N}$, для которых p_i делит n . Тогда

$$P(A_{p_i}) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n=1}^{\infty} (np_i)^{-s} = p_i^{-s}$$

и для любых различных $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}$ выполняется равенство

$$P\left(\bigcap_{j=1}^k A_{p_{i_j}}\right) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n=1}^{\infty} (np_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k})^{-s} = (p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k})^{-s} = \prod_{j=1}^k P(A_{p_{i_j}}).$$

Другими словами, события $A_{p_1}, A_{p_i}, \dots$ независимы, и при этом $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{p_i} = \overline{\{1\}}$. Отсюда следует, что $\bar{A}_{p_1}, \bar{A}_{p_2}, \dots$ также независимы и

$$[\zeta(s)]^{-1} = P(\{1\}) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{A}_{p_i}\right) = \prod_{i=1}^{\infty} [1 - P(A_{p_i})] = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right). \quad \square$$

28. (Вероятностное доказательство формулы Эйлера для количества простых чисел, не превосходящих заданного числа.)

Пусть $\varphi(n)$ есть функция Эйлера — количество таких простых чисел p , что $1 < p \leq n$. Используя вероятностные соображения, доказать следующую формулу Эйлера:

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

(запись $p|n$, как обычно, означает, что p делит n).

Решение. На множестве $\{1, \dots, n\}$ определим равномерное вероятностное распределение $P(\{k\}) = 1/n$, $1 \leq k \leq n$. Для фиксированного n положим

$$A_p = \{k \leq n: p \text{ делит } k\}.$$

Пусть $p_1, p_2, \dots$ — различные простые делители числа n . Тогда

$$P(A_{p_i}) = \frac{1}{n} \sum_{k \leq n: p_i | k} 1 = \frac{n/p_i}{n} = p_i^{-1},$$

и для любых различных (взаимно простых) $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_l}$ имеем

$$P\left(\bigcap_{j=1}^l A_{p_{i_j}}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k \leq n: \prod_{j=1}^l p_{i_j} | k} 1 = \frac{1}{n} \frac{n}{\prod_{j=1}^l p_{i_j}} = \prod_{j=1}^l P(A_{p_{i_j}}).$$

Другими словами, события $A_{p_1}, A_{p_2}, \dots$ независимы. Следовательно, их дополнения $\bar{A}_{p_1}, \bar{A}_{p_2}, \dots$ также независимы. Далее, событие $\prod_{p|n} \bar{A}_p$ заключается в том, что выбранное число k , меньшее или равное n , является взаимно простым с n . Его вероятность может быть вычислена двумя способами:

$$\frac{\varphi(n)}{n} = P\left(\bigcap_{p|n} \bar{A}_p\right) = \prod_{p|n} [1 - P(A_p)] = \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

что доказывает известную формулу Эйлера. $\square$

29. Показать, что мера Лебега λ на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ является инвариантной относительно вращения при $n > 1$ и сдвига при $n \geq 1$.

(См. задачу II.3.32.)

Решение. Согласно задаче II.3.32 для всякого $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\lambda(B) = \inf\{\lambda(G) : B \subseteq G \text{ и } G \text{ открыто}\},$$

что позволяет сводить вопрос о преобразованиях меры лишь к открытым множествам G . Так, например, если мера λ инвариантна относительно некоторого преобразования на всех открытых множествах G , то это же верно и для всех борелевских множеств B .

На самом деле достаточно понять, как преобразуется мера на (полуоткрытых) кубах $\prod_{i=1}^n (c_i, c_i + b]$, $b > 0$. Последнее вытекает из того, что любое открытое множество G в $\mathbb{R}^n$ представимо в виде $G = \bigcup_{C \in \mathfrak{A}} C$, где $\mathfrak{A}$ — некоторая счетная система попарно непересекающихся кубов указанного вида.

Систему $\mathfrak{A}$ можно построить следующим образом. Вначале рассмотрим все кубы вида $\prod_{i=1}^n (m_i, m_i + 1]$, $m_i \in \mathbb{N}$, отобрав из них лишь те, которые содержат хотя бы одну точку из G . Включим в $\mathfrak{A}$ (изначально $\mathfrak{A} = \emptyset$) все кубы, строго лежащие в G . Оставшиеся же раздробим на более мелкие кубы, длина ребра которых вдвое меньше ребра исходных. Вновь отберем из этих мелких кубов лишь те, что пересекаются с G . Включим в $\mathfrak{A}$ все из них, которые строго лежат в G , остальные раздробим на еще более мелкие и т. д. до бесконечности. Ясно, что объединение кубов полученной системы содержится в G .

При этом любая точка $x \in G$ с необходимостью попадет в какой-нибудь куб из $\mathfrak{A}$. Действительно, в силу открытости G найдется шар S с центром в x , целиком лежащий в G . Таким образом, для любой

последовательности вложенных кубов, которые содержат x и имеют длины ребер $1, 1/2, 1/4, \dots$, через конечное число шагов получится куб, целиком принадлежащий S , а значит, и G . Поэтому и в $\mathfrak{A}$ обязательно найдется куб, содержащий x .

Итак, надо лишь разобраться с преобразованиями кубов. Прямым вычислением устанавливается, что их мера не меняется при сдвигах, а при гомотетии $x \rightarrow ax$, $x \in \mathbb{R}^n$, $a > 0$, увеличивается (или уменьшается) в a^n раз. Следовательно, то же верно для любого открытого множества G и, значит, всякого борелевского множества B . Далее, при вращении $x \xrightarrow{\varphi} x$, $x \in \mathbb{R}^n$, вокруг начала координат (т. е. любом ортогональном преобразовании) открытый шар B_1 единичного радиуса переходит в себя. Но, как мы уже установили, $B_1 = \bigcup_{k \geq 1} C_k$, где C_k , $k \geq 1$, — некоторые

попарно непересекающиеся кубы вида $\prod_{i=1}^n (c_i, c_i + b]$, $b > 0$. Каждый куб C_k с точностью до сдвига и коэффициента гомотетии a_k есть единичный куб $[0, 1]^n$. Тем самым

$$\lambda(B_1) = \sum_{k \geq 1} \lambda(C_k) = \sum_{k \geq 1} a_k^n \cdot \lambda([0, 1]^n).$$

Но тогда и

$$\lambda(B_1) = \lambda(\varphi(B_1)) = \sum_{k \geq 1} \lambda(\varphi(C_k)) = \sum_{k \geq 1} a_k^n \cdot \lambda(\varphi([0, 1]^n)).$$

Другими словами, $\lambda(\varphi([0, 1]^n)) = \lambda([0, 1]^n)$. Мы доказали, что мера Лебега инвариантна относительно вращений. $\square$

30. Привести примеры, показывающие, что предположение о том, что участвующая в теореме Каратеодори система множеств $\mathcal{A}$ есть алгебра, является существенным как для самого факта возможности продолжения вероятностной меры P , заданной на системе $\mathcal{A}$, до меры на σ -алгебре $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$, так и для единственности продолжения. Именно, требуется

(а) построить такое пространство Ω и такие системы его подмножеств $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, что $\mathcal{E}$ не алгебра, но $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{F}$, а также вероятностную меру P на $\mathcal{E}$, которую нельзя продолжить до вероятностной меры на σ -алгебре $\mathcal{F}$;

(б) построить пространство Ω и системы его подмножеств $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ со свойством $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{E})$, а также две разные вероятностные меры P и Q на σ -алгебре $\mathcal{F}$, совпадающие на множествах из $\mathcal{E}$.

Решение. (а) Искомый пример строится следующим образом: $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{E} = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \Omega\}$, $\mathcal{F}$ — σ -алгебра всех подмножеств множества Ω и $P(\Omega) = P(\{1, 2\}) = P(\{1, 3\}) = 1$, $P(\{1\}) = 1/2$, $P(\emptyset) = 0$.

(б) Достаточно положить $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{E} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \Omega\}$, в качестве $\mathcal{F}$ взять σ -алгебру всех подмножеств множества Ω и положить $P(\{1\}) = P(\{4\}) = 1/2$, $Q(\{2\}) = Q(\{3\}) = 1/2$. $\square$

31. Пусть $F = F(x)$ — функция распределения на $\mathbb{R}$. Показать, что для всех $a \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$\int_{\mathbb{R}} [F(x+a) - F(x)] dx = a.$$

Решение. Первый способ доказательства основан на рассмотрении площади между двумя графиками

$$\Gamma = \{(x, y): y \in [F(x-), F(x)]\}$$

и

$$\Gamma_a = \{(x, y): y \in [F(x+a-), F(x+a)]\}.$$

Эта площадь и есть $\int_{\mathbb{R}} [F(x+a) - F(x)] dx$. Если поменять местами оси x и y , то график Γ_a будет получаться сдвигом Γ на a единиц и будет соответствовать функции, обратной к $f_a(x) = F(x+a)$. Отсюда следует искомое соотношение.

Другой способ основан на теореме Фубини:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} [F(x+a) - F(x)] dx &= \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} I_{(x, x+a]} dP = \\ &= \int_{\mathbb{R}} dP \int_{\mathbb{R}} I_{(x, x+a]} dx = \int_{\mathbb{R}} a dP = a, \end{aligned}$$

где P — мера, отвечающая F . $\square$

32. Пусть S — топологическое пространство с борелевской σ -алгеброй $\mathcal{E}$, порожденной всеми открытыми множествами. Пусть также для любого замкнутого множества F в S найдется убывающая система таких открытых множеств $G_1 \supset G_2 \supset \dots$, что $F = \bigcap_n G_n$. Показать с помощью принципа подходящих множеств, что всякая вероятностная мера μ на $(S, \mathcal{E})$ является *регулярной* в том смысле, что для всякого борелевского множества $E \in \mathcal{E}$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \mu^*(E) = \inf\{\mu(G): G \supseteq E, G \text{ — открытое множество}\}, \\ \mu(E) &= \mu_*(E) = \sup\{\mu(F): F \subseteq E, F \text{ — замкнутое множество}\}. \end{aligned}$$

В частности, в качестве $(S, \mathcal{E})$ можно взять $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, $d \geq 1$. Убедиться, что в последнем случае для всякого борелевского множества $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ выполняется равенство

$$\mu(B) = \sup_K \{\mu(K) : K \subseteq B, K \text{ — компакт}\}.$$

Решение. Определим систему множеств

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{E} : \mu(A) = \mu^*(A) = \mu_*(A)\}.$$

Все открытые и замкнутые множества лежат в $\mathcal{A}$. Последнее, в частности, вытекает из того факта, что по условию для любого открытого множества G и его замкнутого дополнения $F = \bar{G}$ найдутся такая убывающая система открытых множеств $G_1 \supset G_2 \supset \dots$ и такая возрастающая система таких замкнутых множеств $F_n = \bar{G}_n$, что

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n, \quad F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Кроме того, если $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ и A_n , $n \geq 1$, попарно не пересекаются, то $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$. Действительно, для фиксированного $\varepsilon > 0$ выберем открытые множества $G_1, G_2, \dots$ и замкнутые множества $F_1, F_2, \dots$, для которых $F_n \subseteq A_n \subseteq G_n$ и $\mu(G_n \setminus F_n) \leq \varepsilon 2^{-n}$. Тогда множество $\bigcup_n G_n$ является открытым и

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_n G_n\right) - \varepsilon &\leq \sum_n [\mu(G_n) - \varepsilon 2^{-n}] \leq \sum_n \mu(A_n) = \\ &= \mu\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \mu\left(\bigcup_n G_n\right). \end{aligned}$$

К тому же для достаточно большого N имеем

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^N F_n\right) \leq \mu\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) + \varepsilon \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^N F_n\right) + 2\varepsilon,$$

причем множество $\bigcup_{n=1}^N F_n$, очевидно, является замкнутым.

В силу произвольности ε отсюда следует, что

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \mu^*\left(\bigcup_n A_n\right) = \mu_*\left(\bigcup_n A_n\right).$$

Осталось заметить, что по определению класс $\mathcal{A}$ замкнут относительно дополнений. Тем самым мы доказали, что $\mathcal{A}$ — σ -подалгебра алгебры

$\mathcal{E}$, содержащая все открытые множества. Последнее возможно только при $\mathcal{A} = \mathcal{E}$.

В случае $S = \mathbb{R}^d$ любое замкнутое множество F может быть представлено как объединение вложенных компактов $K_n = F \cap [-n, n]^d$, откуда и следует последнее указанное в задаче равенство. $\square$

33. (Парадокс Бертрана.) Известный «классический» парадокс, предложенный Берtrandом, служит хорошей иллюстрацией того положения, что при решении вероятностных задач (и, в частности, задач на геометрические вероятности, с которыми и связан рассматриваемый парадокс) надо четко формулировать вероятностную модель, четко определять, что подразумевается под выражениями типа «наугад выбранная точка», «случайно выбранный объект» и т. п.

Задача, приводимая Берtrandом в его учебнике [35], и разные ответы (в этом-то и заключается «парадокс»), найденные разными методами, интерпретировались им как то, что в случае вероятностных экспериментов с бесконечным числом исходов в принципе нельзя дать определенного ответа на вопрос о значениях вероятностей некоторых событий.

Формулировка задачи Бертрана такова: в круге $\{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$ «случайным образом» (?) выбирается хорда AB с концами A и B , лежащими на ограничивающей круг окружности. Какова вероятность того, что длина $|AB|$ «случайно выбранной хорды» AB меньше r ?

Приведем три возможные формулировки этой задачи.

(а) Будем понимать слова «хорда AB выбирается случайно» как то, что точки A и B независимым образом выбираются на окружности с равномерным распределением на ней.

Показать, что в этом случае

$$P_a(|AB| < r) = 1/3.$$

(b) Каждая хорда AB полностью определяется положением точки M , являющейся основанием перпендикуляра, опущенного на нее из центра окружности. Будем понимать под словами «хорда выбирается случайно» то, что точка M имеет равномерное распределение на круге, ограниченном окружностью.

Показать, что в этом случае

$$P_b(|AB| < r) = 1/4.$$

(с) Длина хорды AB не зависит от ее направления, а зависит лишь от расстояния до центра окружности. Естественно поэтому предполагать, что хорда имеет определенное направление, скажем, параллельное

горизонтальному диаметру CD , а точка M пересечения с вертикальным диаметром EF (перпендикулярным CD) имеет равномерное распределение на EF .

Показать, что

$$P_c(|AB| < r) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\approx 0, 13).$$

Решение. (а) Зафиксируем точку A и рассмотрим правильный вписанный шестиугольник со стороной r и вершинами $A_1 = A, A_2, \dots, A_6$, расставленными по часовой стрелке. Условная вероятность того, что B будет находиться от A ближе, чем A_2 и A_6 (или, что эквивалентно, $|AB| < r$), равна $1/3$, так как дуга A_6A_1 есть в точности треть окружности, а B выбирается независимо от A с равномерным распределением на окружности. Тогда и безусловная вероятность $P_a(|AB| < r)$ равна $1/3$.

(б) Событие $\{|AB| < r\}$ совпадает с событием, что точка M принадлежит кольцу, заключенному между окружностями радиуса r и радиуса $r\sqrt{3}/2$. Площадь кольца равна $1/4$ площади круга, следовательно, $P_b(|AB| < r) = 1/4$.

(с) Утверждение вытекает из того, что события $\{|AB| < r\}$ и $\{|OM| > \sqrt{3}r/2\}$ совпадают, где $|OM|$ — расстояние от центра окружности O до точки M . $\square$

34. (Продолжение задачи II.3.33.) Приведенные в задаче II.3.33 решения правильны, но, как следует из изложенного, относятся на самом деле к разным вероятностным задачам. Именно, будем задавать хорду двумя параметрами $(r, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi)$ — полярными координатами точки M (основания перпендикуляра, опущенного из точки O на хорду).

Показать, что в каждом из рассмотренных в задаче II.3.33 случаев (б) и (с) совместное распределение пары (r, θ) определяется следующими плотностями:

$$p_a(r, \theta) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{1-r^2}}, \quad p_b(r, \theta) = \frac{r}{\pi}, \quad p_c(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}.$$

Отсюда становится понятным, что никакого «парадокса» нет, поскольку словам «случайно выбранная хорда» можно придавать разный вероятностный смысл.

Решение. (а) Пусть $A = (\cos \theta_A, \sin \theta_A)$ и $B = (\cos \theta_B, \sin \theta_B)$, где $\theta_A, \theta_B \in [0, 2\pi)$. Тогда по условию θ_A и θ_B независимы и распределены равномерно на $[0, 2\pi)$. Имеем $r = |\cos \theta_-| = \sin |\theta_- - \pi/2|$ и

$$\theta = \theta_+ - \pi I(\theta_- > \pi/2, \theta_+ > \pi) + \pi I(\theta_- > \pi/2, \theta_+ \leq \pi),$$

где

$$\theta_+ = \frac{\theta_A + \theta_B}{2}, \quad \theta_- = \frac{|\theta_A - \theta_B|}{2}.$$

Пара случайных величин (θ_-, θ_+) имеет равномерное распределение на треугольнике с вершинами $(0, 0)$, (π, π) и $(0, 2\pi)$. Дальнейшее доказательство сводится к проверке того, что вектор $(|\theta_- - \pi/2|, \theta)$ распределен равномерно на $[0, \pi/2] \times [0, 2\pi]$, откуда, в частности, следует независимость величин $|\theta_- - \pi/2|$ и θ (а значит, r и θ). С этой целью полезно вначале нарисовать множество, на котором равномерно распределен вектор (θ_-, θ) , а затем уже перейти к $(|\theta_- - \pi/2|, \theta)$.

Если же известно, что величины $|\theta_- - \pi/2|$ и θ независимы и распределены равномерно соответственно на $[0, \pi/2]$ и $[0, 2\pi]$, то при $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$ имеем

$$\begin{aligned} P(r \leq u, \theta \leq v) &= P(|\theta_- - \pi/2| \leq \arcsin u, \theta \leq v) = \\ &= \frac{2}{\pi} \arcsin u \cdot \frac{v}{2\pi} = \int_0^u \int_0^v \frac{dr dv}{\pi^2 \sqrt{1-r^2}}, \end{aligned}$$

откуда и следует искомое равенство.

(b) Пусть $M = (X, Y)$. Тогда плотность вектора (X, Y) равна $\frac{1}{\pi}$ в круге

$$\{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$$

и нулю вне него. Для получения p_b надо лишь перейти к полярным координатам.

(c) По условию ρ и θ независимы и имеют равномерное распределение соответственно на $[0, 1)$ и $[0, 2\pi)$, откуда сразу же получается искомое равенство для p_c . $\square$

35. Пусть $(X, \mathcal{X}, \mu)$ — измеримое пространство $(X, \mathcal{X})$ со счетно-аддитивной мерой μ , где $\mathcal{X}$ — заданная σ -алгебра подмножеств множества X .

Измеримое множество A называется *атомом* по отношению к мере μ или μ -атомом, если $\mu(A) > 0$ и для всякого измеримого множества B или $\mu(A \cap B) = 0$, или $\mu(A \setminus B) = 0$. Мера μ называется *атомической*, если каждое измеримое множество положительной μ -меры содержит атом.

Мера μ называется *неатомической*, если μ -атомы отсутствуют.

Мера μ называется *диффузной*, если одноточечные множества являются измеримыми и имеют μ -меру нуль.

Привести примеры атомических, неатомических, диффузных мер и пример меры, которая является одновременно и атомической, и диффузной.

Показать, что сумма атомической и неатомической мер может быть атомической.

Замечание. Каждая конечная мера μ может быть разложена в сумму атомической меры μ_a и неатомической меры μ_c . Это легко проверить, заметив, что если A есть μ -атом, то $\mu - \delta_A$ есть неотрицательная мера, где $\delta_A(B) = I(A \subseteq B)$, $B \in \mathcal{X}$. Тем самым атомическая часть μ_a может быть составлена последовательным добавлением достаточно больших атомов. Точнее говоря, $\mu_a = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{A_n}$, где A_n определяются индуктивно: A_n есть μ_{n-1} -атом, и

$$\mu_{n-1}(A_n) \geq \frac{1}{2} \sup\{\mu_{n-1}(A) : A - \mu_{n-1}\text{-атом}\} = \frac{s_{n-1}}{2},$$

где $\mu_0 = \mu$ и $\mu_n = \mu_{n-1} - \delta_{A_n}$, $n > 1$. Из конечности меры μ и того, что s_n не возрастает по n , с необходимостью следует, что предельная мера $\mu_{\infty} = \mu - \mu_a$ не имеет атомов.

Решение. Мера Лебега λ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ диффузная и неатомическая. Мера μ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, заданная формулой

$$\mu(B) = I([0, 1] \subseteq B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

является атомической с μ -атомом $[0, 1]$ и в то же время диффузной. Сумма (неатомической) меры Лебега λ и (атомической) считающей меры (см. задачу II.6.68) есть атомическая мера. $\square$

§ 4. Случайные величины. I

1. Доказать, что случайная величина X *дискретна, абсолютно непрерывна* или *сингулярна* тогда и только тогда, когда таковой же является ξX , где ξ — не зависящая от X величина, $P(\xi = 1) = P(\xi = -1) = 1/2$.

Решение. В случае дискретных величин утверждение очевидно. Если теперь величина X сингулярна, то для некоторого борелевского множества D лебеговой меры нуль имеем $P(X \in D) = 1$. Но тогда $P(\xi X \in D \cup \{x : -x \in D\}) = 1$, причем лебегова мера множества $D \cup \{x : -x \in D\}$ есть нуль. Поэтому величина ξX сингулярна. Обратное вытекает из того, что из соотношения вида

$$P(\xi X \in D) = \frac{P(X \in D) + P(-X \in D)}{2} = 1$$

следует равенство $P(X \in D) = 1$.

Если теперь X имеет плотность $f = f(x)$, то ξX также обладает плотностью, равной $g = (f(x) + f(-x))/2$. Обратно, если для всех борелевских множеств D лебеговой меры нуль выполняется равенство

$$P(\xi X \in D) = \frac{P(X \in D) + P(-X \in D)}{2} = 0,$$

то и $P(X \in D) = 0$ для всех таких D . $\square$

2. Пусть $\{X_\alpha\}$ — семейство расширенных случайных величин, где α пробегает произвольное множество индексов. Доказать, что можно выделить такое *не более чем счетное* подмножество $\{Y_n\} \subseteq \{X_\alpha\}$, что

$$P(\sup_n Y_n \leq X) = 1 \Rightarrow P(X_\alpha \leq X) = 1 \text{ для всех } \alpha.$$

Величину $\text{ess sup}_\alpha X_\alpha$, называемую *существенным супремумом* величин X_α , обычно определяют как $\sup_n Y_n$. Установите, что такое определение корректно с точностью до множеств P -меры нуль.

Замечание. Аналогичным образом вводится $\text{ess inf}_\alpha X_\alpha$.

Решение. Пусть не более чем счетные семейства $\{Y_{nk}\} \subseteq \{X_\alpha\}$, $k = 1, 2, \dots$, таковы, что

$$\lim_k E \arctg \sup_n Y_{nk} = \sup_{\{X_{\alpha_n}\}} E \arctg \sup_n X_{\alpha_n},$$

где второй $\sup$ берется по всем не более чем счетным подмножествам $\{X_{\alpha_n}\} \subseteq \{X_\alpha\}$. Тогда в качестве искомого подмножества $\{Y_n\}$ можно взять объединение всех $\{Y_{nk}\}$, $k \geq 1$. Докажем это от противного. Допустим, величина X обладает тем свойством, что

$$P(\sup_n Y_n \leq X) = 1,$$

и при этом найдется индекс α , для которого $P(X_\alpha \leq X) < 1$. Последнее, в частности, означает, что

$$P(\sup_n Y_n \leq X_\alpha) > 0.$$

Но тогда в силу строгой монотонности функции $f(x) = \arctg x$ на $\mathbb{R}$ имеем

$$(\sup_{\{X_{\alpha_n}\}} E \arctg \sup_n X_{\alpha_n}) E \arctg \sup_n Y_n < E \arctg \sup_{Y \in \{X_\alpha, Y_1, Y_2, \dots\}} Y.$$

Полученное противоречие доказывает, что $\sup_n Y_n$ удовлетворяет всем требованиям. Так же проверяется корректность определения $\text{ess sup}_\alpha X_\alpha$. $\square$

3. (См. [15].) Пусть $f = f(x)$ — возрастающая на $\mathbb{R}$ борелевская функция. Проверить, что $\inf \mathbb{E} f(|X|)$ по всем величинам X с плотностью, не превосходящей $1/2$, достигается на величине U с равномерным распределением на $[-1, 1]$.

Решение. Пусть $p = p(x)$ — произвольная плотность, не превосходящая $1/2$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(|x|) p(x) dx &= \\ &= f(1) + \int_{|x| > 1} \{f(|x|) - f(1)\} p(x) dx + \int_{-1}^1 \{f(|x|) - f(1)\} p(x) dx \geq \\ &\geq f(1) + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \{f(|x|) - f(1)\} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(|x|) dx = \mathbb{E} f(|U|). \quad \square \end{aligned}$$

4. Показать, что случайная величина ξ непрерывна, если и только если $P(\xi = x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Решение. Если F — функция распределения величины ξ , то

$$P(\xi = x) = F(x) - F(x-),$$

что в силу условия задачи означает непрерывность функции F (а значит, и ξ). $\square$

5. Верно ли, что если величина $|\xi|$ является $\mathcal{F}$ -измеримой, то ξ также $\mathcal{F}$ -измерима?

Решение. Нет, неверно. Действительно, пусть $\Omega = \{0, 1\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$, а $\xi(0) = -1$, $\xi(1) = 1$. Тогда $|\xi| \equiv 1$ — $\mathcal{F}$ -измеримая величина, а ξ — нет. $\square$

6. Доказать, что функции

$$x^n, \quad x^+ = x \vee 0, \quad x^- = (-x) \vee 0, \quad |x| = x^+ + x^-$$

являются борелевскими. Доказать также более общий результат: любая непрерывная функция $f = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, является борелевской.

Решение. По топологическому определению непрерывной функции

функция f непрерывна, если прообраз любого открытого множества также является открытым.

Тем самым множество $f^{-1}(G)$ открыто, когда G открыто. Поэтому

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) &= f^{-1}(\sigma(G : G \text{ открыто})) = \\ &= \sigma(f^{-1}(G) : G \text{ открыто}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n). \quad \square \end{aligned}$$

7. Показать, что если ξ и η — $\mathcal{F}$ -измеримые величины, то $\{\omega: \xi(\omega) = \eta(\omega)\} \in \mathcal{F}$.

Решение. Утверждение следует из представления

$$\{\xi = \eta\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_q \left\{ \xi, \eta \in \left(q - \frac{1}{n}, q + \frac{1}{n} \right) \right\},$$

где объединение берется по всем рациональным q . $\square$

8. Пусть ξ и η — две случайные величины на $(\Omega, \mathcal{F})$ и множество A принадлежит $\mathcal{F}$. Тогда

$$\zeta = \xi I_A + \eta I_{\bar{A}}$$

также является случайной величиной.

Решение. Для любого борелевского множества $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ имеем

$$\{\zeta \in B\} = (A \cap \{\xi \in B\}) \cup (\bar{A} \cap \{\eta \in B\}),$$

откуда вытекает требуемое утверждение. $\square$

9. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — случайные величины и $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ — борелевская функция. Показать, что функция $\varphi(\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega))$ является случайной величиной.

Решение. Достаточно показать, что отображение

$$\omega \mapsto (\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega)) \in \mathbb{R}^n$$

является $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ -измеримым, поскольку в этом случае отображение

$$\omega \mapsto \varphi(\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega))$$

будет являться композицией измеримых отображений. Измеримость первого отображения следует из более общего утверждения задачи П.5.3. $\square$

10. Пусть ξ и ζ — произвольные случайные величины. Выяснить, когда $\sigma(\xi) = \sigma(\zeta)$.

Решение. Если $\sigma(\xi) = \sigma(\zeta)$, то по теореме 3 из В1.П.4 найдутся такие борелевские функции φ и ψ , что $\xi = \varphi(\zeta)$ и $\zeta = \psi(\xi)$. Последнее, в частности, означает, что φ — биективное отображение из $\{\zeta(\omega): \omega \in \Omega\}$ в $\{\xi(\omega): \omega \in \Omega\}$ и $\varphi^{-1} = \psi$.

Пусть теперь

$$\xi = \varphi(\zeta) \text{ и } \zeta = \psi(\xi) \text{ для некоторых борелевских функций } \varphi \text{ и } \psi. \quad (*)$$

Тогда вследствие теоремы 3 из В1.П.4 имеем $\sigma(\xi) \subseteq \sigma(\zeta)$ и $\sigma(\zeta) \subseteq \sigma(\xi)$. Другими словами, мы доказали эквивалентность

$$\sigma(\xi) = \sigma(\zeta) \Leftrightarrow (*).$$

$\square$

11. Привести пример плотности $f = f(x)$ (некоторой случайной величины ξ), для которой

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \text{ не существует}$$

и, следовательно, функция $f(x)$ на бесконечности не аннулируется.

Показать, однако, что для почти всех $x \in \mathbb{R}$ (по мере Лебега) выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x+n) = 0.$$

Решение. Достаточно рассмотреть плотность

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{[n, n+2^{-n}]}(x).$$

Для такой функции f имеем

$$0 = \varliminf_{x \rightarrow \infty} f(x) < \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1.$$

Перейдем ко второй части задачи. Поскольку при всех $(x, N) \in [0, 1] \times \mathbb{Z}$ выполняется условие

$$\lim_n f(x+n) = 0 \Leftrightarrow \lim_n f(x+N+n) = 0,$$

достаточно доказать, что для всех $\varepsilon > 0$ справедливо равенство

$$\lambda(x \in [0, 1]: \overline{\lim}_n f(x+n) > \varepsilon) = 0,$$

где λ — мера Лебега. Имеем

$$\begin{aligned} \lambda(x \in [0, 1]: \overline{\lim}_n f(x+n) > \varepsilon) &\leq \lambda\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} \{x \in [0, 1]: f(x+n) > \varepsilon\}\right) \leq \\ &\leq \sum_{n=N}^{\infty} \lambda(x \in [0, 1]: f(x+n) > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=N}^{\infty} \int_0^1 f(x+n) dx = \frac{1}{\varepsilon} \int_N^{\infty} f(x) dx, \end{aligned}$$

где последний интеграл стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$, т. е.

$$\lambda(x \in [0, 1]: \overline{\lim}_n f(x+n) > \varepsilon) = 0.$$

В силу произвольности ε и неотрицательности f отсюда следует требуемое равенство. $\square$

12. Пусть E — не более чем счетное подмножество пространства $\mathbb{R}$, ξ — отображение $\Omega \rightarrow E$. Доказать, что ξ является случайной величиной на $(\Omega, \mathcal{F})$ тогда и только тогда, когда $\{\xi = x\} \in \mathcal{F}$ для каждого $x \in E$.

Решение. Утверждение вытекает из того, что для каждого борелевского множества B в $\mathbb{R}$ выполняется равенство

$$\{\xi \in B\} = \bigcup_{x \in B \cap E} \{\xi = x\},$$

где объединение, очевидно, ведется по не более чем счетному числу точек x . $\square$

13. Пусть ξ — такая невырожденная случайная величина, что для констант $a > 0$ и $b \in \mathbb{R}$ распределение величины $a\xi + b$ совпадает с распределением величины ξ . Показать, что тогда с необходимостью $a = 1$ и $b = 0$.

Решение. Без ограничения общности можно считать, что $a \leq 1$, иначе от тройки (a, b, ξ) перейдем к $(1/a, b/a^2, \xi/a)$. Пусть $F = F(x)$ — функция распределения величины ξ . Тогда при всех $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$F(x) = F\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Если $0 < a < 1$, то

$$\begin{aligned} F(x) &= F\left(\frac{x-b}{a}\right) = F\left(\frac{x-b(1+a)}{a^2}\right) = \dots = \lim_n F\left(\frac{x}{a^n} - \frac{b}{a^n} \frac{1-a^n}{1-a}\right) = \\ &= \begin{cases} 1, & x > \frac{b}{1-a}, \\ F\left(\frac{b}{1-a}\right), & x = \frac{b}{1-a}, \\ 0, & x < \frac{b}{1-a}. \end{cases} \end{aligned}$$

Другими словами, ξ должна быть вырожденной случайной величиной, равной $\frac{b}{1-a}$, что противоречит условию. Значит, a не может быть меньше единицы.

Если теперь $a = 1$, то при $b \neq 0$ для каждого x имеем

$$F(x) = F(x-b) = F(x-2b) = \lim_n F(x-nb) = I(b < 0),$$

т. е. F — постоянная функция, чего быть не может. Итак, мы доказали, что $b = 0$ при $a = 1$. $\square$

14. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство и $(\Omega, \bar{\mathcal{F}}, P)$ — пополнение $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ по мере P . Предположим, что $\bar{\xi} = \bar{\xi}(\omega)$ есть случайная величина на $(\Omega, \bar{\mathcal{F}}, P)$. Показать, что найдется такая случайная величина $\xi = \xi(\omega)$ на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, что $P(\xi = \bar{\xi}) = 1$. Иначе говоря, $\bar{\xi}$ и ξ отличаются лишь на некотором множестве нулевой вероятности.

Решение. Будем считать, что $P(\bar{\xi} \geq 0) = 1$, иначе перейдем к $\exp \bar{\xi}$. Дискретизируя $\bar{\xi}$, находим такую последовательность $\bar{\xi}_n$, что $\bar{\xi}_n \uparrow \bar{\xi}$ всюду, а именно

$$\bar{\xi}_n = \frac{1}{n} \sum_{k \geq 0} k I(k \leq n\bar{\xi} < k+1).$$

По определению пополнения $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ любое событие $\{k \leq n\bar{\xi} < k+1\}$ совпадает с некоторым $B_{nk} \in \mathcal{F}$ с точностью до множеств нулевой вероятности. Обозначая

$$\xi_n = \frac{1}{n} \sum_{k \geq 0} k I_{B_{nk}},$$

закключаем, что $P(\xi_n = \bar{\xi}_n) = 1$, $B = \{\xi_1 \leq \xi_2 \leq \xi_3 \leq \dots\} \in \mathcal{F}$ и

$$P(\xi_1 \leq \xi_2 \leq \xi_3 \leq \dots) = 1 \quad \left(= \lim_n P(\xi_1 \leq \dots \leq \xi_n) \right).$$

Следовательно, полагая

$$\xi = \begin{cases} \lim_n \xi_n(\omega), & \omega \in B, \\ 0, & \omega \in \bar{B}, \end{cases}$$

получаем, что $P(\xi = \bar{\xi}) = 1$, причем ξ — $\mathcal{F}$ -измеримая случайная величина. $\square$

15. Точкой роста функции распределения $F = F(x)$ называется любое $x \in \mathbb{R}$, для которого $F(x - \varepsilon) < F(x + \varepsilon)$ при всех $\varepsilon > 0$. Показать, что случайная величина ξ с функцией распределения F п. н. лежит в множестве точек роста функции F .

Решение. Введем отношение эквивалентности « $\sim$ » на множестве точек, не являющихся точками роста функции F ,

$$x \sim y, \quad x \leq y \Leftrightarrow P(\xi \in [x, y]) = 0.$$

Очевидно, если $x \sim z$ и $x \leq y \leq z$, то y не есть точка роста функции F , $x \sim y$ и $y \sim z$. Таким образом, классы эквивалентности $I(x) := \{y \in \mathbb{R} : x \sim y\}$ являются либо открытыми интервалами, либо полуинтервалами, либо отрезками, причем

$$P(\xi \in I(x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Поскольку $I(x) \cap I(y) = \emptyset$ при $x \neq y$, различных классов эквивалентности не более чем счетное число, и, следовательно,

$$P\left(\bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{\xi \in I(x)\}\right) = 0.$$

Последнее гарантирует справедливость требуемого свойства. $\square$

16. Показать, что носитель $\text{supp } F$ непрерывной функции распределения F есть *совершенное* множество (т. е. являющееся замкнутым и не имеющее изолированных точек), совпадающее с множеством G_F точек роста F .

Привести пример дискретной функции распределения F , носитель которой $\text{supp } F = \mathbb{R}$, т. е. совпадает со всей числовой прямой $\mathbb{R}$.

Замечание. Напомним, что $\text{supp } F$ для функции распределения F на $\mathbb{R}$ определяется как то наименьшее замкнутое множество G , для которого $\mu(\mathbb{R} \setminus G) = 0$, где μ — мера, отвечающая функции распределения F ; см. также § 2 приложения.

Решение. Любая точка роста x функции F с необходимостью лежит в $\text{supp } F$. Действительно, если $x \notin \text{supp } F$, то $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap \text{supp } F = \emptyset$ для малых $\varepsilon > 0$ в силу замкнутости $\text{supp } F$. Однако в этом случае, очевидно, $\mu(\text{supp } F) \neq 1$ (см. замечание выше). Полученное противоречие показывает, что $G_F \subseteq \text{supp } F$. Проверим замкнутость множества G_F . Если $x_n \in G_F$ и $x_n \uparrow x$, то для каждого $\varepsilon > 0$ имеем

$$F(x + \varepsilon) \geq F(x) \geq F(x_n + \delta) > F(x_n - \delta) \geq F(x - \varepsilon)$$

для всех достаточно больших n и малых $\delta > 0$, т. е. $x \in G_F$. Аналогично рассматривается случай $x_n \downarrow x$. Другими словами, G_F замкнуто и, значит, совпадает с $\text{supp } F$ (так как $\mu(G_F) = 1$).

Покажем теперь, что G_F не имеет изолированных точек, когда F непрерывно. Если $((x - \varepsilon, x) \cup (x, x + \varepsilon)) \cap G_F = \emptyset$, $\varepsilon > 0$, то для любого $z \in (x - \varepsilon, x) \cup (x, x + \varepsilon)$ найдется такое $\delta_z > 0$, что $F(z + \delta_z) - F(z - \delta_z) = 0$. Отсюда следует, что $F(z)$ постоянно на $(x - \varepsilon, x)$ и $(x, x + \varepsilon)$ соответственно и в силу непрерывности $F(z) = F(x)$, т. е. $x \notin G_F$.

В качестве примера такой функции F , что $\text{supp } F = \mathbb{R}$, можно взять функцию дискретного распределения, сосредоточенного на $\mathbb{Q}$ (с ненулевой вероятностью для каждого рационального числа). $\square$

17. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — н. о. р. случайные величины с функцией распределения $F = F(x)$. Показать, что замыкание множества

$$\{\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots\}, \quad \omega \in \Omega,$$

с вероятностью единица совпадает с некоторым множеством, не зависящим от ω . Описать структуру указанного замыкания по отношению к F .

Решение. Рассматриваемое замыкание принадлежит замыканию множества A точек роста функции распределения F (см. задачу II.4.15).

Выберем не более чем счетное всюду плотное в A множество $B \subset A$ и покажем, что

$$P\left(\bigcap_{k \geq 1, x \in B} \{\exists n: \xi_n \in (x - 1/k, x + 1/k)\}\right) = 1.$$

Отсюда элементарным образом вытекает искомое свойство. Рассматриваемое равенство обеспечивается следующим соотношением, верным при $x \in B$, $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} 1 - P(\exists n: \xi_n \in (x - 1/k, x + 1/k)) &= P(\forall n: \xi_n \notin (x - 1/k, x + 1/k)) = \\ &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\xi_n \notin (x - 1/k, x + 1/k)\}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} P(\xi_n \notin (x - 1/k, x + 1/k)) = \\ &= \lim_n P(\xi_1 \notin (x - 1/k, x + 1/k))^n = 0, \end{aligned}$$

где мы также учли, что $P(\xi_1 \notin (x - 1/k, x + 1/k)) < 1$ для точек роста $x \in B$. $\square$

18. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность случайных величин. Показать, что

$$\begin{aligned} \{\omega: \lim_n \xi_n(\omega) \text{ не существует}\}, \\ \{\omega: \lim_n \xi_n(\omega) \text{ существует и конечен}\} \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Решение. Утверждение следует из того, что $\varliminf_n \xi_n$ и $\overline{\varlimsup}_n \xi_n$ являются случайными величинами со значениями в $[-\infty, \infty]$, а также из равенств

$$\begin{aligned} \{\lim_n \xi_n \text{ не существует}\} &= \{\varliminf_n \xi_n < \overline{\varlimsup}_n \xi_n\} = \\ &= \bigcup_{p, q} \{\varliminf_n \xi_n \leq p < q \leq \overline{\varlimsup}_n \xi_n\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\lim_n \xi_n \text{ существует и конечен}\} &= \\ &= \Omega \setminus (\{\varliminf_n \xi_n < \overline{\varlimsup}_n \xi_n\} \cup \{\varliminf_n \xi_n = \overline{\varlimsup}_n \xi_n = \pm\infty\}), \end{aligned}$$

где объединение берется по всем таким парам рациональных чисел p и q , что $p < q$. $\square$

19. Пусть ξ и X — независимые случайные величины, причем

$$P(\xi = 1) = P(\xi = -1) = \frac{1}{2}.$$

Показать эквивалентность следующих утверждений:

- (а) $X \stackrel{d}{=} -X$, т. е. X имеет симметричное распределение;
- (b) $X \stackrel{d}{=} \xi X$;
- (с) $X \stackrel{d}{=} \xi|X|$.

Решение. Достаточно доказать, что (а) $\Leftrightarrow$ (b) и (а) $\Leftrightarrow$ (с). Для произвольного борелевского множества B равенство $P(X \in B) = P(-X \in B)$ равносильно следующему:

$$P(X \in B) = \frac{P(X \in B)}{2} + \frac{P(-X \in B)}{2} = P(\xi X \in B).$$

Мы доказали эквивалентность утверждений (а) и (b). Определим

$$\zeta = \begin{cases} 1, & X > 0, \\ \xi, & X = 0, \\ -1, & X < 0. \end{cases}$$

Очевидно, $X = \zeta|X|$, причем для всех борелевских множеств $B \subseteq \mathbb{R}_+$ имеем

$$\begin{aligned} P(\zeta = 1, |X| \in B) &= P(X > 0, |X| \in B) + P(\xi = 1, X = 0 \in B) = \\ &= P(X \in B \setminus \{0\}) + \frac{I_B(0)}{2} P(X = 0) = \\ &= \frac{P(|X| \in B \setminus \{0\})}{2} + \frac{I_B(0)}{2} P(|X| = 0) = \frac{P(|X| \in B)}{2}, \end{aligned}$$

где предпоследнее равенство справедливо при $X \stackrel{d}{=} -X$, так как в этом случае

$$P(|X| \in B \setminus \{0\}) = P(X \in B \setminus \{0\}) + P(-X \in B \setminus \{0\}) = 2P(X \in B \setminus \{0\}).$$

Другими словами, если выполнено утверждение (а), то $(\zeta, |X|) \stackrel{d}{=} (\xi, |X|)$ и, значит, $X = \zeta|X| \stackrel{d}{=} \xi|X|$, т. е. имеет место утверждение (с). Обратно: в силу симметричности ξ (и независимости от $|X|$) выполнено равенство $(\xi, |X|) = (-\xi, |X|)$, так что

$$X \stackrel{d}{=} \xi|X| \stackrel{d}{=} -\xi|X| \stackrel{d}{=} -X. \quad \square$$

20. Показать, что совместное распределение двух бернуллиевских величин X и Y , принимающих значения 0 и 1 (для простоты), полностью определяется параметрами

$$P(X = 1), \quad P(Y = 1), \quad \text{cov}(X, Y).$$

В частности, X и Y независимы, если $\text{cov}(X, Y) = 0$.

Решение. По определению $\text{cov}(X, Y)$ имеем

$$\begin{aligned} P(X = 1, Y = 1) &= EXY = \text{cov}(X, Y) + EXEY = \\ &= \text{cov}(X, Y) + P(X = 1)P(Y = 1). \end{aligned}$$

Кроме того,

$$P(X = 0, Y = 1) = E(1 - X)Y = P(Y = 1) - \text{cov}(X, Y) - P(X = 1)P(Y = 1).$$

Аналогично вычисляются $P(X = 1, Y = 0)$ и $P(X = 0, Y = 0)$. При этом $\text{cov}(X, Y) = 0$ только для независимых X и Y . $\square$

§ 5. Случайные элементы

1. Множество $\{\omega: X(\omega) = Y(\omega)\}$ есть событие, если X и Y — случайные величины (см. задачу II.4.7). Убедиться на примере, что это, вообще говоря, не так, когда X и Y — случайные элементы.

Решение. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}^{[0,1]}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,1]}))$, $X(\omega) \equiv \omega$ при $\omega \in \Omega$ и $Y \equiv (0)_{0 \leq t \leq 1} - \mathcal{F}$ -измеримые отображения в $(\mathbb{R}^{[0,1]}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,1]}))$. Тогда

$$\{\omega: X(\omega) = Y(\omega)\} = \{(0)_{0 \leq t \leq 1}\} \notin \mathcal{F}. \quad \square$$

2. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — дискретные случайные величины. Показать, что они независимы тогда и только тогда, когда для любых действительных чисел $x_1, \dots, x_n$ выполняется равенство

$$P(\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n) = \prod_{i=1}^n P(\xi_i = x_i).$$

Решение. Необходимость указанного равенства очевидна. Докажем его достаточность. Для любых не более чем счетных множеств $B_1, \dots, B_n$, состоящих из значений случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$ соответственно, выполняются соотношения

$$\begin{aligned} P(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n) &= \sum_{\substack{x_i \in B_i, \\ 1 \leq i \leq n}} P(\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n) = \\ &= \sum_{\substack{x_i \in B_i, \\ 1 \leq i \leq n}} \prod_{i=1}^n P(\xi_i = x_i) = \prod_{i=1}^n \sum_{x_i \in B_i} P(\xi_i = x_i) = \prod_{i=1}^n P(\xi_i \in B_i), \end{aligned}$$

что доказывает требуемое свойство. $\square$

3. Провести доказательство того, что всякая *случайная функция* $X = (X_t)_{t \in T}$, рассматриваемая как случайный элемент со значениями в пространстве $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T))$, есть *случайный процесс*, т. е. совокупность случайных величин X_t , и наоборот.

Решение. Если $X = X(\omega)$ является $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ -измеримой функцией, то для $t \in T$ и $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ имеем

$$\{\omega: X_t(\omega) \in B\} = \{\omega: X(\omega) \in C\} \in \mathcal{F}, \quad \text{где } C = \{x \in \mathbb{R}^T: x_t \in B\}.$$

Обратно, достаточно рассмотреть цилиндрические множества $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ вида

$$\{x: x_{t_1} \in B_1, \dots, x_{t_n} \in B_n\},$$

где $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, для которых, очевидно, $X^{-1}(C) \in \mathcal{F}$, и заметить, что

$$\begin{aligned} \{X^{-1}(C): C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)\} = \\ = \sigma(\{X^{-1}(C): C \text{ — цилиндрическое множество в } \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)\}). \quad \square \end{aligned}$$

4. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — случайные элементы со значениями в $(E_1, \mathcal{E}_1), \dots, (E_n, \mathcal{E}_n)$ соответственно. Пусть, далее, $(G_1, \mathcal{G}_1), \dots, (G_n, \mathcal{G}_n)$ — измеримые пространства и $g_1, \dots, g_n$ являются $\mathcal{E}_1/\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{E}_n/\mathcal{G}_n$ -измеримыми функциями соответственно.

Показать, что если $X_1, \dots, X_n$ независимы, то независимы также и случайные элементы $g_1 \circ X_1, \dots, g_n \circ X_n$, где $g_i \circ X_i = g_i(X_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Решение. Достаточно заметить, что для любых $B_i \in \mathcal{G}_i, i = 1, \dots, n$, выполняется равенство

$$\begin{aligned} P(g_1(X_1) \in B_1, \dots, g_n(X_n) \in B_n) = \\ = P(X_1 \in g_1^{-1}(B_1), \dots, X_n \in g_n^{-1}(B_n)). \quad \square \end{aligned}$$

5. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_m$ и $\eta_1, \dots, \eta_n$ — случайные величины. Образует случайные векторы $X = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ и $Y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$. Предположим, что выполнены следующие условия:

- 1) случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_m$ независимы;
- 2) случайные величины $\eta_1, \dots, \eta_n$ независимы;
- 3) случайные векторы X и Y , рассматриваемые как случайные элементы со значениями в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно, независимы.

Доказать, что тогда случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_n$ независимы.

Решение. Для любых $B_1, \dots, B_m, C_1, \dots, C_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ выполнены соотношения

$$B = B_1 \times \dots \times B_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m), \quad C = C_1 \times \dots \times C_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

и ввиду условий 1–3 имеем

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^m \{\xi_i \in B_i\} \cap \bigcap_{j=1}^n \{\eta_j \in C_j\}\right) &= \\ &= P(X \in B, Y \in C) = P(X \in B)P(Y \in C) = \\ &= P\left(\bigcap_{i=1}^m \{\xi_i \in B_i\}\right)P\left(\bigcap_{j=1}^n \{\eta_j \in C_j\}\right) = \prod_{i=1}^m P(\xi_i \in B_i) \prod_{j=1}^n P(\eta_j \in C_j), \end{aligned}$$

откуда следует независимость рассматриваемых величин. $\square$

6. Даны случайные векторы $X = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ и $Y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, относительно которых известно, что случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_n$ являются независимыми.

(a) Доказать, что случайные векторы X и Y , рассматриваемые как случайные элементы, независимы.

(b) Пусть $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — борелевские функции. Доказать, что случайные величины $f(\xi_1, \dots, \xi_m)$ и $g(\eta_1, \dots, \eta_n)$ независимы.

Решение. (a) Воспользуемся *принципом подходящих множеств*. Для фиксированного $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ обозначим

$$\mathcal{B}(C) = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) : P(X \in B, Y \in C) = P(X \in B)P(Y \in C)\}.$$

По условию для всех $C = C_1 \times \dots \times C_n, C_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, имеет место включение

$$B = B_1 \times \dots \times B_m \in \mathcal{B}(C)$$

при всех $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), 1 \leq i \leq m$. Легко проверить, что класс $\mathcal{B}(C)$ замкнут относительно дополнений и счетных пересечений и тем самым является σ -алгеброй. Следовательно, $\mathcal{B}(C) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ для всех $C = C_1 \times \dots \times C_n, C_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Определяя теперь

$$\mathcal{C} = \{C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : P(X \in B, Y \in C) = P(X \in B)P(Y \in C) \text{ для всех } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)\},$$

можно точно так же установить, что $\mathcal{C} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, откуда уже вытекает независимость векторов X и Y .

(b) Утверждение следует из п. (a) и более общего утверждения из задачи II.5.4. $\square$

7. Показать, что $(X_1, X_2, \dots)$ будет независимой системой случайных величин тогда и только тогда, когда X_n и $(X_1, \dots, X_{n-1})$ независимы при каждом $n \geq 1$.

Решение. *Достаточность* очевидна. *Необходимость* следует из задачи II.5.6. $\square$

8. Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ — измеримое пространство и $(E, \mathcal{E}, \rho)$ — метрическое пространство с метрикой ρ и σ -алгеброй $\mathcal{E}$ борелевских подмножеств, порожденных открытыми множествами. Пусть $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots$ — такая последовательность $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ -измеримых функций (случайных элементов), что для всех $\omega \in \Omega$ существует предел

$$X(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega).$$

Показать, что предельная функция $X(\omega)$ также $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ -измерима.

Решение. Любое замкнутое множество $F \in \mathcal{E}$ представимо в виде

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F^{(1/k)},$$

где $F^{(\delta)} = \{x \in E : \inf_{y \in F} \rho(x, y) < \delta\}$, $\delta > 0$, — открытая δ -окрестность множества F . По определению X имеем

$$\{X \in F\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} \{X_n \in F^{(1/k)}\} \in \mathcal{F}.$$

Тем самым $\{X \in G\} = \Omega \setminus \{X \in E \setminus G\} \in \mathcal{F}$ для любого открытого множества G (дополнение $E \setminus G$ к открытому множеству G всегда является замкнутым). Осталось заметить, что

$$\{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{E}\} = \sigma(\{X^{-1}(G) : G \text{ открыто в } E\}) \in \mathcal{F},$$

так как $\mathcal{E} = \sigma(\{G : G \text{ открыто в } E\})$. $\square$

9. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$, $n \geq 1$, и τ — момент остановки относительно $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$. Положим

$$\eta_n(\omega) = \xi_{n+\tau(\omega)}(\omega).$$

Показать, что последовательность $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots)$ имеет то же самое распределение, что и последовательность $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$.

Решение. В силу независимости и одинаковости распределенности величин ξ_n , $n \geq 1$, распределения последовательностей ξ и $\xi^t = (\xi_{1+t}, \xi_{2+t}, \dots)$ совпадают для всякого $t = 0, 1, \dots$. Кроме того, поскольку $\{\tau = t\} \in \sigma(\xi_1, \dots, \xi_t)$, событие $\{\tau = t\}$ не зависит от ξ^t . Поэтому при $P(\tau = t) \neq 0$ для каждого $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ имеем

$$P(\eta \in B | \tau = t) = P(\xi^t \in B | \tau = t) = P(\xi^t \in B) = P(\xi \in B)$$

и, значит,

$$\begin{aligned} P(\eta \in B) &= \sum_{t=1}^{\infty} P(\xi^t \in B, \tau = t) = \sum_{t: P(\tau=t) \neq 0} P(\xi^t \in B | \tau = t) P(\tau = t) = \\ &= \sum_{t: P(\tau=t) \neq 0} P(\xi \in B) P(\tau = t) = P(\xi \in B). \end{aligned}$$

Другими словами, распределения последовательностей ξ и η совпадают. $\square$

§ 6. Интеграл Лебега. Математическое ожидание

1. Пусть X — случайная величина, $E|X| < \infty$, а $\varphi(x) = E|X - x|$, $x \in \mathbb{R}$. Доказать, что распределение величины X однозначно восстанавливается по функции $\varphi = \varphi(x)$.

Решение. Поскольку

$$\frac{||X - x| - |X - y||}{|x - y|} \leq 1, \quad x \neq y,$$

по теореме Лебега о мажорируемой сходимости правая производная функции φ существует всюду и равна

$$E[-I(x < X) + I(x \geq X)] = 2P(X \leq x) - 1.$$

Иными словами, $P(X \leq x) = (\varphi'_+(x) + 1)/2$, $x \in \mathbb{R}$. Отсюда, конечно, следует искомого утверждение. $\square$

2. Пусть ξ — неотрицательная случайная величина, а S — множество простых неотрицательных функций s , не превосходящих ξ ($s \leq \xi$). Доказать, что

$$\sup_{s \in S} Es = E\xi.$$

Решение. Если $s \in S$ и $(\xi_n)_{n \geq 1}$ — такая последовательность простых случайных величин, что $\xi_n \uparrow \xi$, то $\max(\xi_n, s) \uparrow \xi$ и $Es \leq E \max(\xi_n, s)$,

а значит, $E s \leq E \xi$ и $\sup_{s \in S} E s \leq E \xi$. Обратное неравенство следует непосредственно из конструкции $E \xi$. $\square$

3. Пусть ξ и η — случайные величины, для которых определены $E \xi$ и $E \eta$, причем хотя бы одно из них бесконечно и выражение $E \xi + E \eta$ имеет смысл (не имеет вида $\infty - \infty$ или $-\infty + \infty$). Тогда $E(\xi + \eta) = E \xi + E \eta$. Доказать это свойство, используя аналогичное свойство для конечных математических ожиданий.

Решение. Для установления искомого свойства следует рассмотреть разные возможности, вытекающие из представлений $\xi = \xi^+ - \xi^-$ и $\eta = \eta^+ - \eta^-$. Пусть, например, $E \xi^+ = \infty$, $E \xi^- < \infty$, $E \eta^+ = \infty$ и $E \eta^- < \infty$. Тогда

$$(\xi + \eta)^- \leq \xi^- + \eta^- \quad \text{и} \quad E(\xi + \eta)^- \leq E(\xi^- + \eta^-) = E \xi^- + E \eta^- < \infty.$$

Кроме того, $\xi^+ \leq (\xi + \eta)^+ + (-\eta)^+ = (\xi + \eta)^+ + \eta^-$ и, следовательно, $I(\xi_+ > 2\eta^-) \xi^+/2 \leq (\xi + \eta)^+$. Выберем простые неотрицательные величины $\xi_n \uparrow \xi^+$. Тогда $E \xi_n = E \xi_n I(\xi^+ \leq 2\eta^-) + E \xi_n I(\xi^+ > 2\eta^-) \uparrow \infty$ и

$$E \xi_n I(\xi^+ \leq 2\eta^-) \uparrow E \xi_n I(\xi^+ \leq 2\eta^-) \leq 2E \eta^- < \infty,$$

так что $E \xi_n I(\xi_+ > 2\eta^-) \uparrow E \xi^+ I(\xi_+ > 2\eta^-) = \infty$ и

$$E(\xi + \eta)^+ \geq E I(\xi_+ > 2\eta^-) \xi^+/2 = \infty$$

(т. е. $E(\xi + \eta)^+ = \infty$). Окончательно получаем, что

$$E(\xi + \eta) = E(\xi + \eta)^+ - E(\xi + \eta)^- = \infty = E \xi + E \eta. \quad \square$$

4. Показать, что если $\xi = \eta$ п. н. и $E \xi$ существует, то $E \eta$ также существует и $E \eta = E \xi$.

Решение. Из равенства $\xi = \eta$ п. н. следует, что $P(\xi^- = \eta^-) = P(\xi^+ = \eta^+) = 1$. Таким образом (в силу определения математического ожидания), достаточно рассмотреть случай, когда ξ и η неотрицательны. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n^2} \frac{k-1}{n} P\left(\frac{k-1}{n} \leq \xi < \frac{k}{n}\right) \uparrow E \xi \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k-1}{n} P\left(\frac{k-1}{n} \leq \eta < \frac{k}{n}\right) \uparrow E \eta.$$

Из условия $P(\xi = \eta) = 1$ следует, что для всякого $n \geq 1$ выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^{n^2} \frac{k-1}{n} P\left(\frac{k-1}{n} \leq \xi < \frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k-1}{n} P\left(\frac{k-1}{n} \leq \eta < \frac{k}{n}\right)$$

и, значит, $E \xi = E \eta$. $\square$

5. Пусть ξ — расширенная случайная величина, а μ — такая мера, что $I = \int_{\Omega} |\xi| d\mu < \infty$. Показать, что тогда $\mu(|\xi| = \infty) = 0$.

Решение. Искомое равенство вытекает из того, что

$$\mu(|\xi| = \infty) \leq \mu(|\xi| > m) \leq \frac{1}{m} \int_{\Omega} |\xi| d\mu \leq \frac{I}{m}, \quad m \rightarrow \infty. \quad \square$$

6. Пусть μ — произвольная мера, а ξ и η — расширенные случайные величины, для которых $\int_{\Omega} |\xi| d\mu$ и $\int_{\Omega} |\eta| d\mu$ конечны. Тогда если для всех множеств $A \in \mathcal{F}$ имеет место неравенство $\int_A \xi d\mu \leq \int_A \eta d\mu$, то $\mu(\xi > \eta) = 0$.

Решение. Из конечности интеграла $\int_{\Omega} (|\xi| + |\eta|) d\mu$ следует, что $\mu(A_n) < \infty$, где $A_n = \{|\xi| + |\eta| > 1/n\}$, $n \geq 1$. На каждом A_n неравенство $\xi > \eta$ выполнено с μ -мерой нуль. Последнее вытекает из аналогичного свойства для конечных мер (при надлежащей нормировке которых получим вероятностные меры). Но тогда

$$\mu(\xi > \eta) \leq \sum_n \mu(\{\xi > \eta\} \cap A_n) = 0. \quad \square$$

7. Пусть X — произвольная случайная величина. Доказать, что для всех $t \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$E \operatorname{ch}(tX) = \sum_{n \geq 1} \frac{t^{2n}}{(2n)!} EX^{2n}$$

в том смысле, что левая часть равенства конечна тогда и только тогда, когда все EX^{2n} конечны и ряд, стоящий в правой части, сходится.

Решение. Утверждение следует из теоремы Фубини и разложения

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n \geq 1} \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \quad \square$$

8. Пусть ξ — интегрируемая случайная величина ($E|\xi| < \infty$). Показать, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такая простая случайная величина ξ_ε , что $E|\xi - \xi_\varepsilon| \leq \varepsilon$.

Решение. Устанавливается аналогично задаче II.6.73(а). $\square$

9. Пусть ξ и ζ — независимые неотрицательные случайные величины. Показать, что тогда $E\xi\zeta = E\xi E\zeta$.

Решение. Устанавливается аналогично доказательству теоремы 6 из В1.П.6. $\square$

10. Функция Дирихле, определенная на $[0, 1]$ по формуле

$$d(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ иррациональное,} \\ 0, & x \text{ рациональное,} \end{cases}$$

интегрируема по Лебегу, однако не интегрируема по Риману. Почему?

Решение. Рассмотрим интегральную сумму Римана

$$I_n = I_n(x_1, \dots, x_n, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} d(\omega_i)(x_{i+1} - x_i),$$

$$0 = x_1 < \dots < x_n = 1,$$

где $\omega_i \in [x_i, x_{i+1}]$ при всех $1 \leq i \leq n-1$. Очевидно, $I_n = 1$, когда все ω_i рациональны, и $I_n = 0$, когда все ω_i иррациональны. Поэтому I_n не могут иметь предела по базе всех разбиений с диаметрами, стремящимися к нулю. $\square$

11. Привести пример последовательности интегрируемых по Риману функций $(f_n)_{n \geq 1}$, заданных на $[0, 1]$ и таких, что $|f_n| \leq 1$, $f_n \rightarrow f$ всюду, но f не интегрируема по Риману.

Решение. Рассмотрим функции $f_n(x) = \sum_{i=1}^n I_{\{q_i\}}(x)$, где q_n пробегает все рациональные числа на $[0, 1]$. Тогда интегрируемые по Риману функции f_n всюду сходятся к функции Дирихле, не интегрируемой на отрезке $[0, 1]$ (см. задачу II.6.10). $\square$

12. Пусть $\{a_{ij}\}_{i,j \geq 1}$ — такое семейство действительных чисел, что $\sum_{i,j} |a_{ij}| < \infty$. Вывести из теоремы Фубини, что

$$\sum_{i,j} a_{ij} = \sum_i \sum_j a_{ij} = \sum_j \sum_i a_{ij}. \quad (*)$$

Решение. Рассмотрим произвольную последовательность положительных чисел $p_1, p_2, \dots$, $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$, и определим вероятностную меру P на $\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ по формуле $P(A) = \sum_{i \in A} p_i$. Возьмем далее функцию $f(i, j) = \frac{a_{ij}}{p_i p_j}$, для которой, очевидно,

$$\int_{\Omega \times \Omega} |f(\omega_1, \omega_2)| d(P \times P) = \sum_{i,j} |f(i, j)| p_i p_j = \sum_{i,j} |a_{ij}| < \infty.$$

Для завершения доказательства соотношений $(*)$ осталось воспользоваться теоремой Фубини. $\square$

13. Привести пример семейства $\{a_{ij}\}_{i,j \geq 1}$, для которого $\sum_{i,j} |a_{ij}| = \infty$ и равенства в формуле (*) из задачи II.6.12 не выполняются.

Решение. В качестве (a_{ij}) можно взять

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j, \\ (i - j)^{-3}, & i \neq j. \end{cases} \quad \square$$

14. Доказать справедливость следующего результата об интегрировании с помощью подстановки в $\mathbb{R}$.

Пусть $\varphi = \varphi(y)$ — гладкая функция на $[a, b]$, $\varphi(a) < \varphi(b)$, а борелевская функция $f = f(x)$ интегрируема по мере Лебега функция на $[\varphi(a), \varphi(b)]$. Тогда функция $f(\varphi(y))\varphi'(y)$ также интегрируема и

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(y))\varphi'(y) dy. \quad (*)$$

Решение. Если функция f непрерывна, то по формуле Ньютона—Лейбница

$$(R) \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)),$$

где (R) $\int$ — интеграл Римана, а

$$F(z) = (R) \int_{\varphi(a)}^z f(x) dx, \quad \varphi(a) \leq z \leq \varphi(b),$$

— первообразная функции f . Аналогично получается, что

$$F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = (R) \int_a^b f(\varphi(y))\varphi'(y) dy,$$

поскольку $F(\varphi(y))' = f(\varphi(y))\varphi'(y)$ на $[a, b]$. Отсюда следует, что

$$(R) \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = (R) \int_a^b f(\varphi(y))\varphi'(y) dy.$$

Для непрерывных функций интеграл Римана совпадает с интегралом Лебега. Тем самым мы доказали искомое равенство для непрерывных функций f .

Осталось проверить требуемое равенство для ограниченных (борелевских) функций f . В силу теоремы Лузина II.10.35 для любой

такой функции f можно найти такую последовательность непрерывных (ограниченных той же константой, скажем, единицей) функций $(f_n)_{n \geq 1}$, что $f_n \rightarrow f$ почти всюду (по мере Лебега). Поскольку

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f_n(x) dx = \int_a^b f_n(\varphi(y)) \varphi'(y) dy,$$

в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости надо лишь показать, что

$$g_n = f_n(\varphi) \varphi' \rightarrow g = f(\varphi) \varphi' \quad \text{почти всюду.}$$

Имеем при $m \rightarrow \infty$

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \{y: g_n(y) \not\rightarrow g(y), |\varphi'(y)| > 1/m\} = \{y: g_n(y) \not\rightarrow g(y)\}$$

и

$$\lambda(y: g_n(y) \not\rightarrow g(y), |\varphi'(y)| > 1/m) \uparrow \lambda(y: g_n(y) \not\rightarrow g(y)),$$

где λ — мера Лебега. Множество $\{y: |\varphi'(y)| > 1/m\}$ для любого фиксированного m открыто и, значит, представляется в виде объединения не более чем счетного числа непересекающихся полуинтервалов $(a_i, b_i] \subset [a, b]$, $i \geq 1$. На каждом полуинтервале $(a_i, b_i]$ производная φ' сохраняет знак и функция φ монотонна (пусть для определенности возрастает). Поэтому для всех $c, d \in \varphi((a_i, b_i])$, $c < d$, имеем

$$\varphi^{-1}((c, d]) \cap (a_i, b_i] \in (\varphi^{-1}(c), \varphi^{-1}(c) + m(d - c)]$$

и

$$\lambda(\varphi^{-1}((c, d]) \cap (a_i, b_i]) \leq m(d - c).$$

Отсюда нетрудно вывести, что $\lambda(\varphi^{-1}(B) \cap (a_i, b_i]) = 0$ при $\lambda(B) = 0$ (следует рассмотреть покрытие множества B счетной системой непересекающихся полуинтервалов со сколь угодно малой общей длиной). Из этого следует, что

$$\lambda\left(\varphi^{-1}(B) \cap \bigcup_{i \geq 1} (a_i, b_i]\right) = \lambda(\varphi^{-1}(B) \cap \{y: |\varphi'(y)| > 1/m\}) = 0$$

при $\lambda(B) = 0$. Используя это соотношение, окончательно получаем, что

$$\begin{aligned} \lambda(y: g_n(y) \not\rightarrow g(y)) &= \lim_m \lambda(y: g_n(y) \not\rightarrow g(y), |\varphi'(y)| > 1/m) = \\ &= \lim_m \lambda(\varphi^{-1}(\{x: f_n(x) \not\rightarrow f(x)\}) \cap \{y: |\varphi'(y)| > 1/m\}) = 0, \end{aligned}$$

т. е. $g_n \rightarrow g$ почти всюду (по мере Лебега). $\square$

15. (См. [79].) Доказать справедливость следующего результата об интегрировании с помощью подстановки в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\varphi = (\varphi_1(y), \dots, \varphi_n(y))$ — гладкое (до второго порядка) отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, $\varphi(y) = y$ вне некоторого шара, а $f = f(x)$ — интегрируемая по мере Лебега с конечным носителем на $\mathbb{R}^n$. Тогда функция $f(\varphi(y)) \det \varphi'(y)$ интегрируема и

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(\varphi(y)) \det \varphi'(y) dy,$$

где $\varphi'(y) = (\nabla \varphi_1(y) \dots \nabla \varphi_n(y))^T$, а ∇ означает градиент.

Замечание. Классическая формулировка теоремы о замене переменных в интеграле Лебега в $\mathbb{R}^n$ состоит в следующем. Пусть I — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $\varphi = \varphi(y)$ — функция, определенная для $y = (y_1, \dots, y_n) \in I$, со значениями в $\mathbb{R}^n$. Пусть также (матричная) производная φ' существует, непрерывна и при этом $|\det \varphi'(y)| > 0$, $y \in I$. Тогда множество $\varphi(I)$ открыто, на нем однозначно определено обратное отображение φ^{-1} и для всякой неотрицательной или интегрируемой функции $f = f(x)$, $x \in I$, справедливы формулы

$$\int_I f(x) dx = \int_{\varphi(I)} f(\varphi^{-1}(y)) \frac{dy}{|\det \varphi'(y)|} = \int_{\varphi(I)} f(\varphi^{-1}(y)) |\det(\varphi^{-1})'(y)| dy.$$

Решение. Сначала рассмотрим случай, когда функция f непрерывна. Для непрерывных функций с ограниченным носителем интегралы Римана и Лебега совпадают (проверяется так же, как и в одномерном случае), так что достаточно установить искомое равенство для интеграла Римана.

По условию $\varphi(x) = x$ вне некоторого шара, а f имеет ограниченный носитель. Без ограничения общности будем считать, что $\varphi(x) = x$ и $f(x) = 0$ вне $[0, 1]^n$. Положим

$$g(x) = \int_0^{x_1} f(u, x_2, \dots, x_n) du,$$

где $\int$ означает интеграл Римана, а $x = (x_1, \dots, x_n)$. Тогда, во-первых, $g(x) = 0$ на всех гранях куба $[0, 1]^n$ с $x_1 < 1$ и, во-вторых,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(\varphi(y)) \det \varphi'(y) dy &= \int_{[0,1]^n} f(\varphi(y)) \det \varphi'(y) dy = \\ &= \int_{[0,1]^n} g'_{x_1}(\varphi(y)) \det \varphi'(y) dy. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} g'_{x_1}(\varphi) \det \varphi' &= g'_{x_1}(\varphi) \det(\nabla \varphi_1 \dots \nabla \varphi_n) = \det([g'_{x_1}(\varphi) \nabla \varphi_1] \nabla \varphi_2 \dots \nabla \varphi_n) = \\ &= \det\left(\left[\sum_{i=1}^n g'_{x_i}(\varphi) \nabla \varphi_i\right] \nabla \varphi_2 \dots \nabla \varphi_n\right) = \det(\nabla g(\varphi) \nabla \varphi_2 \dots \nabla \varphi_n). \end{aligned}$$

Раскладывая $\det$ по первому столбцу, находим, что

$$g'_{x_1}(\varphi) \det \varphi' = \sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} M_i \frac{\partial g(\varphi)}{\partial y_i},$$

где M_i — определитель матрицы, полученной из $(\nabla \varphi_2 \dots \nabla \varphi_n)$ вычеркиванием i -й строки. Следовательно, интегрируя по частям, получаем (с учетом теоремы Фубини), что

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^n} g'_{x_1}(\varphi(y)) \det \varphi'(y) dy &= \int_{[0,1]^n} \sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} M_i(y) \frac{\partial g(\varphi(y))}{\partial y_i} dy = \\ &= \int_{[0,1]^n} g(\varphi(y)) \sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} \frac{\partial M_i(y)}{\partial y_i} dy + \\ &\quad + \int_{[0,1]^{n-1}} g(1, y_2, \dots, y_n) M_1(1, y_2, \dots, y_n) dy_2 \dots dy_n, \end{aligned}$$

где мы также учли, что $\varphi(y) = y = (y_1, \dots, y_n)$ на границе куба $[0, 1]^n$ и, значит, $g(\varphi(y)) = g(y) = 0$ на всех гранях куба $[0, 1]^n$, $y_1 < 1$. Легко видеть, что $M_1(y) = 1$ на границе куба $[0, 1]^n$ (там отображение φ тождественно), поэтому по определению g имеем

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^{n-1}} g(1, y_2, \dots, y_n) M_1(1, y_2, \dots, y_n) dy_2 \dots dy_n &= \\ &= \int_{[0,1]^{n-1}} dy_2 \dots dy_n \int_0^1 f(u, y_2, \dots, y_n) du = \int_{[0,1]^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx. \end{aligned}$$

Осталось проверить, что

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} \frac{\partial M_i}{\partial y_i} \equiv 0.$$

С помощью формулы дифференцирования произведения функций данное тождество легко свести к следующему равенству (в символической записи):

$$\det(\nabla \nabla h c_3 \dots c_n) \equiv 0,$$

где $\nabla = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$, $h = h(x)$ — любая гладкая (до второго порядка) функция на $\mathbb{R}^n$, а $c_3, \dots, c_n \in \mathbb{R}^n$. Разлагая $\det$ по двум первым столбцам, видим, что

$$\det(\nabla \nabla h c_3 \dots c_n) = \sum_{i < j} \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_i} \right] M_{ij} \equiv 0,$$

где M_{ij} ($i < j$) — определитель (с точностью до знака) матрицы, полученной из $(c_3 \dots c_n)$ вычеркиванием i -й и j -й строк.

Итак, мы доказали искомое равенство для непрерывных функций f (для интеграла Римана, а значит, и Лебега). Осталось проверить его для ограниченных измеримых функций f с конечным носителем. По теореме Лузина (см. замечание к задаче II.10.35) для любой такой функции f можно найти такую последовательность непрерывных (ограниченных той же константой, скажем, единицей) функций $(f_n)_{n \geq 1}$, что f_n непрерывны на некотором фиксированном шаре $C \subseteq \mathbb{R}^n$ большого радиуса, содержащем носитель функции f , равны нулю вне C , а также $f_n \rightarrow f$ почти всюду (по мере Лебега). Сглаживая f_n на границе C , например, с помощью свертки

$$f_n^\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_n(y) \frac{I(\max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| < \varepsilon)}{(2\varepsilon)^n} dy,$$

можно добиться, что $f_n^{\varepsilon_n} \rightarrow f$ почти всюду для некоторых малых $\varepsilon_n > 0$. При этом функции $f_n^{\varepsilon_n}$ будут непрерывны на $\mathbb{R}^n$, ограничены единицей и будут иметь носитель, лежащий в некотором фиксированном шаре. Для простоты индекс ε_n далее будем опускать.

Учитывая теорему Лебега о мажорируемой сходимости, видим, что из сходимости

$$g_n = f_n(\varphi) \det \varphi' \rightarrow g = f(\varphi) \det \varphi' \quad \text{почти всюду}$$

следует искомое равенство с f . Обозначим через $l = l(y)$ минимальное из абсолютных значений (комплексных) собственных чисел матрицы $\varphi'(y)$. Тогда $l(y)$ есть непрерывная функция y (так как $\varphi'(y)$ — матрица, состоящая из непрерывных функций, и имеет место непрерывная зависимость корней характеристического многочлена от его коэффициентов). Имеем

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \{y: g_n(y) \not\rightarrow g(y), l(y) > 1/m\} = \{y: g_n(y) \not\rightarrow g(y)\}$$

и при $m \rightarrow \infty$

$$\lambda(y: g_n(y) \not\rightarrow g(y), l(y) > 1/m) \uparrow \lambda(y: g_n(y) \not\rightarrow g(y)),$$

где λ — мера Лебега. Множество $\{y: l(y) > 1/m\}$ для любого фиксированного m открыто (так как функция $l(y)$ непрерывна). По теореме об обратной функции на этом множестве однозначно определено (гладкое) обратное отображение φ^{-1} . При этом множество $\varphi(\{y: l(y) > 1/m\})$ открыто и для всех $u, v \in \varphi(\{y: l(y) > 1/m\})$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} |\varphi^{-1}(v) - \varphi^{-1}(u)| &= \left| \int_0^1 (\varphi^{-1})'(tu + (1-t)v)(u-v) dt \right| = \\ &= \left| \int_0^1 [\varphi'(\varphi^{-1}(tu + (1-t)v))]^{-1}(u-v) dt \right| \leq \frac{|u-v|}{\inf\{l(y): y \in y^j + (0, b_j]^n\}} \leq \\ &\leq m|u-v|. \end{aligned}$$

Таким образом, если $B_r(z) \subseteq \varphi(\{y: l(y) > 1/m\})$ (здесь $B_r(z)$ — открытый шар с центром в $z \in \mathbb{R}^n$ радиуса $r > 0$), то

$$\varphi^{-1}(B_r(z)) \cap \{y: l(y) > 1/m\} \subseteq B_{mr}(\varphi^{-1}z)$$

и

$$\lambda(\varphi^{-1}(B_r(z)) \cap \{y: l(y) > 1/m\}) \leq m^n \lambda(B_r(z)).$$

Отсюда можно вывести, что $\lambda(\varphi^{-1}(B) \cap \{y: l(y) > 1/m\}) = 0$ при $\lambda(B) = 0$ (следует рассмотреть покрытие $B \cap \varphi(\{y: l(y) > 1/m\})$ счетной системой шаров, лежащих в $\varphi(\{y: l(y) > 1/m\})$, со сколь угодно малым общим объемом; существование такой системы вытекает, например, из решения задачи II.3.29). Итак, окончательно заключаем, что

$$\begin{aligned} \lambda(y: g_n(y) \not\rightarrow g(y)) &= \lim_m \lambda(y: g_n(y) \not\rightarrow g(y), \lambda(y) > 1/m) = \\ &= \lim_m \lambda(\varphi^{-1}(\{x: f_n(x) \not\rightarrow f(x)\}) \cap \{y: \lambda(y) > 1/m\}) = 0, \end{aligned}$$

т. е. $g_n \rightarrow g$ почти всюду (по мере Лебега). $\square$

16. Пусть $(X, \mathcal{X}, \mu)$ — измеримое пространство с мерой μ , а $f = f(x)$, $g = g(x)$ и $h = h(x)$ — $\mathcal{X}$ -измеримые функции на X . Доказать, что для любых таких $p, q, r \geq 1$, что $p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} = 1$, выполняется неравенство

$$\int_X |fgh| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_X |h|^r d\mu \right)^{\frac{1}{r}}.$$

При этом допускаются бесконечные значения для приведенных интегралов.

Решение. Для вывода требуемого неравенства следует дважды применить неравенство Гёльдера для произвольных измеримых пространств (доказывается точно так же, как в случае вероятностных пространств)

$$\int_X |\varphi\psi| d\mu \leq \left(\int_X |\varphi|^\alpha d\mu \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_X |\psi|^\beta d\mu \right)^{\frac{1}{\beta}},$$

где $\alpha, \beta \geq 1$ и $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1$. □

17. Пусть f, g и h — функции соответственно из L^p, L^q и L^r , где $p, q, r \geq 1$ таковы, что $p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} = 2$. Обозначим через $f * g$ свертку $\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy$. Используя задачу II.6.16, доказать, что

$$\left| \int_{\mathbb{R}} (f * g)(x)h(x)dx \right| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \cdot \|h\|_r,$$

где

$$\|F\|_\alpha = \left(\int_{\mathbb{R}} |F(x)|^\alpha dx \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Вывести отсюда *неравенство Юнга*

$$\|f * g\|_s \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q,$$

справедливое при $p, q, s \geq 1, p^{-1} + q^{-1} = 1 + s^{-1}$.

Решение. Определим α, β, γ из следующих уравнений:

$$\alpha^{-1} + \beta^{-1} = p^{-1}, \quad \beta^{-1} + \gamma^{-1} = q^{-1}, \quad \gamma^{-1} + \alpha^{-1} = r^{-1}.$$

Тогда $\alpha, \beta, \gamma \geq 1$ и

$$\alpha^{-1} + \beta^{-1} + \gamma^{-1} = \frac{p^{-1} + q^{-1} + r^{-1}}{2} = 1,$$

и поэтому в силу задачи II.6.16 (и с учетом теоремы Фубини) имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} (f * g)(x)h(x)dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |f(y)| |g(x-y)| |h(x)| dx dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} F(x, y)G(x, y)H(x, y) dx dy \leq \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} F(x, y)^\alpha dx dy \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} G(x, y)^\beta dx dy \right)^{\frac{1}{\beta}} \times \\ &\times \left(\int_{\mathbb{R}^2} H(x, y)^\gamma dx dy \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r, \end{aligned}$$

где

$$F(x, y) = |h(x)|^{\frac{r}{\alpha}} |f(x - y)|^{\frac{p}{\alpha}},$$

$$G(x, y) = |f(x - y)|^{\frac{p}{\beta}} |g(y)|^{\frac{q}{\beta}},$$

$$H(x, y) = |g(x - y)|^{\frac{q}{\gamma}} |h(x)|^{\frac{r}{\gamma}}.$$

Неравенство Юнга следует из уже доказанного неравенства, если в качестве r взять $(1 - s^{-1})^{-1}$ и положить

$$h(x) = \frac{|(f * g)(x)|^r}{(f * g)(x)}. \quad \square$$

18. Пусть X — случайная величина, $\varphi(x) = \frac{x}{1+x}$, $x > 0$. Доказать справедливость следующих неравенств:

$$\mathbb{E}[\varphi(|X|) - \varphi(x)] \leq \mathbb{P}(|X| \geq x) \leq \frac{\mathbb{E}\varphi(|X|)}{\varphi(x)}.$$

Решение. Утверждение следует из неравенств

$$\begin{aligned} \varphi(|X|) - \varphi(x) &= \frac{|X| - x}{(1+x)(1+|X|)} \leq \frac{|X| - x}{|X| + x} \leq I(|X| \geq x) \leq \\ &\leq \frac{\varphi(|X|)}{\varphi(x)} \cdot I(|X| \geq x). \quad \square \end{aligned}$$

19. Пусть ξ и ζ — ограниченные случайные величины. Доказать, что если

$$\mathbb{E}\xi^m \zeta^n = \mathbb{E}\xi^m \cdot \mathbb{E}\zeta^n$$

для всех $m, n \geq 1$, то ξ и ζ независимы.

Решение. Без ограничения общности можно считать, что

$$\mathbb{P}(|\xi| \leq 1) = \mathbb{P}(|\zeta| \leq 1) = 1.$$

Вследствие условия задачи

$$\mathbb{E}f(\xi)g(\zeta) = \mathbb{E}f(\xi) \cdot \mathbb{E}g(\zeta)$$

для произвольных многочленов f и g . Используя теорему Бернштейна о равномерном приближении непрерывной функции многочленами, отсюда легко вывести справедливость последнего равенства для любых непрерывных функций f и g . Приближая далее индикаторные функции $I(x \leq a)$ и $I(x \leq b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, непрерывными функциями f и g , нетрудно получить равенство

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi \leq a, \zeta \leq b) &= \mathbb{E}I(\xi \leq a)I(\zeta \leq b) = \mathbb{E}I(\xi \leq a) \cdot \mathbb{E}I(\zeta \leq b) = \\ &= \mathbb{P}(\xi \leq a) \cdot \mathbb{P}(\zeta \leq b). \quad \square \end{aligned}$$

20. Пусть $X = X_t(\omega)$ и $Y = Y_t(\omega)$, $(\omega, t) \in \Omega \times [0, 1] - \mathcal{F} \times \mathcal{B}[0, 1]$ -измеримые функции, причем $\int_0^1 |X_t| dt, \int_0^1 |Y_t| dt < \infty$ п. н. Предположим, что

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \quad \text{и} \quad (Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}) \text{ независимы}$$

для любых $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$ ($n \geq 1$). Доказать, что тогда величины $\int_0^1 X_t dt$ и $\int_0^1 Y_t dt$ также являются независимыми.

Решение. Поскольку п. н.

$$\int_0^1 X_t I(|X_t| \leq n) dt \rightarrow \int_0^1 X_t dt, \quad \int_0^1 Y_t I(|Y_t| \leq n) dt \rightarrow \int_0^1 Y_t dt \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

достаточно доказать искомое свойство, предполагая ограниченность функций X и Y . Итак, пусть X и Y — ограниченные функции на $\Omega \times [0, 1]$. Тогда по теореме Фубини для всех $m, n \geq 1$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^1 X_t dt \right]^n \left[\int_0^1 Y_t dt \right]^m &= \int_{[0,1]^{n+m}} \mathbb{E} \prod_{i,j} X_{t_i} Y_{s_j} dt_i ds_j = \\ &= \int_{[0,1]^n} \mathbb{E} \prod_i X_{t_i} dt_i \int_{[0,1]^m} \mathbb{E} \prod_j Y_{s_j} ds_j = \mathbb{E} \left[\int_0^1 X_t dt \right]^n \cdot \mathbb{E} \left[\int_0^1 Y_t dt \right]^m, \end{aligned}$$

где $i = 1, \dots, n$, а $j = 1, \dots, m$. Осталось применить результат задачи П.6.19. $\square$

21. (См. [59].) Пусть $f = f(x, \theta)$ при каждом фиксированном $\theta \in (a, b)$, $a < b$, является плотностью распределения на $\mathbb{R}$. Пусть также f является гладкой вплоть до второго порядка функцией по θ , т. е. $f''_{\theta\theta} \in C(a, b)$, а множество

$$\{x: f(x, \theta) > 0\}$$

не зависит от θ . Допуская возможность дифференцирования под знаком интеграла Лебега, доказать эквивалентность следующих представлений информации Фишера $I(\theta)$:

$$\begin{aligned} I(\theta) &= \int_{\mathbb{R}} [s(x, \theta)]^2 f(x, \theta) dx = - \int_{\mathbb{R}} s'_\theta(x, \theta) f(x, \theta) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} [h'_\theta(x, \theta)]^2 f(x, \theta) dx, \end{aligned}$$

где $s(x, \theta) = (\ln f(x, \theta))'_\theta$ — скор-функция, $h(x, \theta) = \ln \frac{f(x, \theta)}{1 - F(x, \theta)}$ — логарифм функции риска, а $F(x, \theta)$ — функция распределения с плотностью $f(x, \theta)$.

Для вывода последнего равенства предположите, что для каждого θ , $a < \theta < b$, выполняется соотношение

$$\frac{[F'_\theta(x, \theta)]^2}{1 - F(x, \theta)} \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Решение. Поскольку $\int_{\mathbb{R}} f(x, \theta) dx \equiv 1$, имеем

$$\frac{d}{d\theta} \int_{\mathbb{R}} f(x, \theta) dx = \int_{\mathbb{R}} f'_\theta(x, \theta) dx = \int_{\mathbb{R}} s(x, \theta) f(x, \theta) dx \equiv 0.$$

Кроме того,

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \int_{\mathbb{R}} f(x, \theta) dx = \int_{\mathbb{R}} f''_{\theta\theta}(x, \theta) dx \equiv 0.$$

С другой стороны, легко проверить, что

$$f''_{\theta\theta}(x, \theta) = [s(x, \theta)]^2 f(x, \theta) + s'_\theta(x, \theta) f(x, \theta),$$

а значит,

$$\int_{\mathbb{R}} [s(x, \theta)]^2 f(x, \theta) dx = - \int_{\mathbb{R}} s'_\theta(x, \theta) f(x, \theta) dx.$$

Докажем оставшееся равенство. Имеем

$$\begin{aligned} [h'_\theta(x, \theta)]^2 &= \left[s(x, \theta) + \frac{F'_\theta(x, \theta)}{1 - F(x, \theta)} \right]^2 = \\ &= [s(x, \theta)]^2 + 2s(x, \theta) \frac{F'_\theta(x, \theta)}{1 - F(x, \theta)} + \left[\frac{F'_\theta(x, \theta)}{1 - F(x, \theta)} \right]^2. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{F'_\theta(x, \theta)}{1 - F(x, \theta)} \right]^2 f(x, \theta) dx &= \left[\frac{F'_\theta(x, \theta)}{1 - F(x, \theta)} \right]^2 \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} \frac{2f'_\theta(x, \theta)F'_\theta(x, \theta)}{1 - F(x, \theta)} dx = \\ &= -2 \int_{\mathbb{R}} \frac{F'_\theta(x, \theta)}{1 - F(x, \theta)} s(x, \theta) f(x, \theta) dx, \end{aligned}$$

где мы также учли равенство $F''_{\theta x}(x, \theta) = F''_{x\theta}(x, \theta) = f'_\theta(x, \theta)$. Теперь уже просто вывести искомое соотношение. $\square$

22. Пусть ξ, η — неотрицательные случайные величины.

(а) Если $E\xi^p, E\eta^q < \infty$ при $p, q > 1, 1/p + 1/q = 1$, то по неравенству Гёльдера

$$E\xi\eta \leq (E\xi^p)^{1/p} (E\eta^q)^{1/q}.$$

Доказать, что при $q < 0 < p < 1$ выполнено *обратное неравенство Гёльдера*

$$E\xi\eta \geq (E\xi^p)^{1/p} (E\eta^q)^{1/q}, \quad \text{если } E\eta^q > 0.$$

(б) Если $E\xi^p, E\eta^p < \infty$ при $p > 1$, то по неравенству Минковского

$$(E(\xi + \eta)^p)^{1/p} \leq (E\xi^p)^{1/p} + (E\eta^p)^{1/p}.$$

Доказать, что при $0 < p < 1$ имеет место *обратное неравенство Минковского*

$$(E(\xi + \eta)^p)^{1/p} \geq (E\xi^p)^{1/p} + (E\eta^p)^{1/p}.$$

Решение. (а) Если $E\xi\eta = \infty$, то неравенство очевидно. Пусть, далее, $E\xi\eta < \infty$. В силу неравенства Гёльдера имеем

$$E\xi^p = E(\xi\eta)^p \eta^{-p} \leq (E\xi\eta)^p (E\eta^{-p/(1-p)})^{1-p},$$

откуда и следует искомая оценка, так как $q = -p/(1-p)$.

(б) Вследствие п. (а) имеем

$$\begin{aligned} E(\xi + \eta)^p &= E(\xi + \eta)^{p-1} \xi + E(\xi + \eta)^{p-1} \eta \geq \\ &\geq (E(\xi + \eta)^p)^{(p-1)/p} \left[(E\xi^p)^{1/p} + (E\eta^p)^{1/p} \right], \end{aligned}$$

что эквивалентно требуемой оценке. $\square$

23. (См. [84].) Пусть вогнутая функция $f = f(x)$ определена на $(0, \infty)$ и такова, что функция $f(x^{-1})$ выпукла. Доказать, что функция $xf(x)$ также является выпуклой и при этом f либо строго возрастает, либо является константой.

Показать, что в первом случае для любой положительной случайной величины ξ имеют место неравенства

$$\frac{1}{E\xi^{-1}} \leq f^{-1}(Ef(\xi)) \leq E\xi \leq f^{-1}\left(\frac{Ef(\xi)}{E\xi}\right) \leq \frac{E\xi^2}{E\xi},$$

где предполагается, что все математические ожидания существуют.

Решение. Покажем вначале, что функция $xf(x)$ является выпуклой на $(0, \infty)$. Функция $f(x^{-1})$ выпукла на $(0, \infty)$, что эквивалентно неравенству

$$\frac{f(y^{-1}) - f(x^{-1})}{y - x} \leq \frac{f(z^{-1}) - f(y^{-1})}{z - y},$$

выполненному при всех $0 < x < y < z$. Преобразуя данное неравенство, получаем

$$0 \leq [f(z^{-1}) - f(y^{-1})](y - x) - [f(y^{-1}) - f(x^{-1})](z - y) = \begin{vmatrix} x & f(x^{-1}) & 1 \\ y & f(y^{-1}) & 1 \\ z & f(z^{-1}) & 1 \end{vmatrix}.$$

Пусть теперь $0 < a = z^{-1} < b = y^{-1} < c = x^{-1}$, тогда

$$\begin{aligned} 0 \leq \begin{vmatrix} c^{-1} & f(c) & 1 \\ b^{-1} & f(b) & 1 \\ a^{-1} & f(a) & 1 \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} a^{-1} & f(a) & 1 \\ b^{-1} & f(b) & 1 \\ c^{-1} & f(c) & 1 \end{vmatrix} = -(abc)^{-1} \begin{vmatrix} 1 & af(a) & a \\ 1 & bf(b) & b \\ 1 & cf(c) & c \end{vmatrix} = \\ &= (abc)^{-1} \begin{vmatrix} a & af(a) & 1 \\ b & bf(b) & 1 \\ c & bf(c) & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Другими словами, мы получили выпуклость функции $xf(x)$.

По неравенству Йенсена для любой положительной случайной величины ξ имеем

$$f\left(\frac{1}{E\xi^{-1}}\right) \leq Ef(\xi) \leq f(E\xi) \leq \frac{E\xi f(\xi)}{E\xi} = Ef(\eta) \leq f(E\eta) = f\left(\frac{E\xi^2}{E\xi}\right), \quad (*)$$

где η распределено следующим образом:

$$P(\eta \in B) = \frac{E\xi I(\xi \in B)}{E\xi}, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

В частности, при $a < b$, $x = b - \sqrt{b(b-a)}$, $y = b + \sqrt{b(b-a)}$ имеем

$$f(a) = f\left(\frac{2}{x^{-1} + y^{-1}}\right) \leq f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(b)$$

(в качестве ξ взяли бернуллиевскую величину с $P(\xi=x)=P(\xi=y)=1/2$). Для вогнутой неубывающей функции $f(x)$ равенство $f(a)=f(b)$ для некоторых $a < b$ возможно только в случае, когда $f(x)=f(a)$ при каждом $x \geq a$. Аналогично для вогнутой невозрастающей функции $f(1/x)$ из равенства $f(a)=f(b)$ при $a < b$ следует, что $f(1/x)=f(b)$ при каждом $x \geq 1/b$ (т. е. $f(x)=f(b)$ при $x \leq b$). Таким образом, f либо равно константе всюду, либо строго возрастает на $(0, \infty)$. Для доказательства оставшегося неравенства надо применить f^{-1} ко всем выражениям в формуле (*). $\square$

24. Пусть $0 \leq \xi \leq 1$ п. н., а ζ — случайная величина со значениями в $\mathbb{C}$ и $E|\zeta| < \infty$. Доказать *неравенство Абеля*

$$|E\xi\zeta| \leq \sup_{0 \leq x \leq 1} |E\zeta I(\xi \geq x)|.$$

Решение. По теореме Фубини

$$E\xi\zeta = E\zeta \int_0^1 I(\xi \geq x) dx = \int_0^1 E\zeta I(\xi \geq x) dx,$$

откуда, очевидным образом, следует требуемое равенство. $\square$

25. Назовем функции $f = f(x)$ и $g = g(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, *однотонными*, если

$$[f(y) - f(x)][g(y) - g(x)] \geq 0$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}^d$. Допустим, что распределение случайного вектора (ξ, ζ) совпадает с распределением пары (ζ, ξ) , где ξ, ζ — случайные векторы в $\mathbb{R}^d$. Доказать следующий вариант *неравенства Чебышёва*:

$$Ef(\xi)g(\xi) \geq Ef(\xi)g(\zeta).$$

В частности, если ζ — независимая копия вектора ξ , то неравенство Чебышёва переписывается в виде

$$\text{cov}(f(\xi), g(\xi)) \geq 0.$$

Решение. Для вывода искомого неравенства следует воспользоваться легко проверяемой формулой

$$Ef(\xi)g(\xi) - Ef(\xi)g(\zeta) = \frac{1}{2}E[f(\xi) - f(\zeta)][g(\xi) - g(\zeta)]. \quad \square$$

26. (*Эквивалентное определение равномерной интегрируемости*; см. определение 4 из В1.П.6.4.) Доказать, что

$$\sup_n E|\xi_n|I(|\xi_n| > c) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \overline{\lim}_n E|\xi_n|I(|\xi_n| > c) \rightarrow 0, \quad c \rightarrow \infty,$$

при условии конечности $E|\xi_n|$, $n \geq 1$.

Решение. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега

$$\max_{i \leq n} E|\xi_i|I(|\xi_i| > c) \rightarrow 0, \quad c \rightarrow \infty,$$

для любого фиксированного n , так как при каждом $i \leq n$ выполняется соотношение

$$\{|\xi_i| > c\} \downarrow \emptyset, \quad c \rightarrow \infty.$$

Отсюда легко вывести искомую эквивалентность. $\square$

27. (*Теорема Ла Валле Пуссена.*) Доказать, что $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ равномерно интегрируемо тогда и только тогда, когда

$$\sup_n EG(|\xi_n|) < \infty$$

для такой неотрицательной возрастающей функции G , что

$$\frac{G(x)}{x} \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow \infty.$$

Показать также, что в качестве G можно брать выпуклые функции.

Решение. Если $\sup_n EG(|\xi_n|) < \infty$, то при достаточно больших $c > 0$ имеем

$$\sup_n E|\xi_n| I(|\xi_n| > c) \leq \sup_n EG(|\xi_n|) \cdot \sup_{x>c} \frac{x}{G(x)} \rightarrow 0, \quad c \rightarrow \infty.$$

Другими словами, семейство $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ равномерно интегрируемо.

Обратно: пусть семейство $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ равномерно интегрируемо. Тогда ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(|\xi_n| > i)$$

сходится равномерно по n , так как

$$\sup_n \sum_{i>j} P(|\xi_n| > i) \leq \sup_n E|\xi_n| I(|\xi_n| > j).$$

Определим (n_k) из условий $n_k \uparrow \infty$ и

$$\sup_n \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}} P(|\xi_n| > i) \leq \frac{1}{2^{2k}}.$$

Тогда функция

$$G(x) = \int_0^x \sum_k 2^k I(z \in (n_k, n_{k+1}]) dz$$

будет удовлетворять всем необходимым условиям (в частности, выпуклости). $\square$

28. Пусть $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ — равномерно интегрируемое семейство величин. Показать, что семейства

$$\{\zeta: |\zeta| \leq |\xi_n| \text{ при некотором } n\},$$

$$\left\{ \sum_n \lambda_n \xi_n : \lambda_n \in \mathbb{R}, \sum_n |\lambda_n| = 1 \right\}$$

также будут равномерно интегрируемыми, где предполагается, что ряд $\sum_n \lambda_n \xi_n$ сходится в L^1 , а « $\leq$ » означает стохастическое доминирование, т. е.

$$|X| \leq |Y| \Leftrightarrow P(|X| > x) \leq P(|Y| > x) \quad \text{для всех } x > 0.$$

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} E|\zeta|I(|\zeta| > c) &= \int_c^\infty P(|\zeta| > x) dx + cP(|\zeta| > c) \leq \\ &\leq \int_c^\infty P(|\xi_n| > x) dx + cP(|\xi_n| > c) = E|\xi_n|I(|\xi_n| > c). \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $c \rightarrow \infty$, получаем равномерную интегрируемость первого семейства.

Обозначим $M = \sup_n E|\xi_n|$. Тогда при $c > 0$ имеем

$$P\left(\sum_n \lambda_n \xi_n > c\right) \leq c^{-1} E \sum_n |\lambda_n \xi_n| \leq \frac{M}{c}.$$

Следовательно, по лемме 2 из В1.П.6 получаем

$$0 \leq \sup_\zeta E|\zeta|I(|\zeta| > c) \leq \sup_{A: P(A) \leq \frac{M}{c}} \sup_n E|\xi_n| \mathbf{1}_A \rightarrow 0, \quad c \rightarrow \infty,$$

где первая верхняя грань берется по всем ζ вида $\sum_n \lambda_n \xi_n$, $\sum_n |\lambda_n| = 1$.

Последнее означает, что второе семейство равномерно интегрируемо. $\square$

29. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — произвольные случайные величины. Показать, что семейство $\left\{n^{-1} \sum_{i=1}^n \xi_i\right\}_{n \geq 1}$ равномерно интегрируемо, когда таковым же является хотя бы одно из семейств $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ или $\left\{\sum_{i=1}^n \xi_i/i\right\}_{n \geq 1}$.

Решение. Если семейство $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ равномерно интегрируемо, то это же верно и для $\left\{n^{-1} \sum_{i=1}^n \xi_i\right\}_{n \geq 1}$ (см. задачу П.6.28). Пусть теперь семейство $\{X_n\}_{n \geq 1}$, $X_n = \sum_{i=1}^n \xi_i/i$, равномерно интегрируемо. Поскольку при всех $n \geq 1$ выполняется равенство

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i = \frac{n+1}{n} X_n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

искомое свойство следует из уже доказанного выше. $\square$

30. Пусть $0 \leq \xi_n \xrightarrow{d} \xi$ и $E\xi_n < \infty$. Доказать, что следующие условия равносильны:

- 1) $E\xi_n \rightarrow E\xi < \infty$,
- 2) $\lim_n E\xi_n \leq E\xi < \infty$,

3) семейство $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ равномерно интегрируемо.

Решение. По определению сходимости $\xrightarrow{d}$ для любой точки непрерывности x функции $f(x) = P(\xi > x)$ имеем $f_n(x) = P(\xi_n > x) \rightarrow f(x)$. Следовательно, $f_n \rightarrow f$ почти всюду по мере Лебега (мера множества точек разрыва монотонной функции равна нулю) и при этом $P(\xi \geq 0) = 1$. Таким образом, если f непрерывно при $c > 0$, то

$$\begin{aligned} E\xi_n I(\xi_n \leq c) &= \int_0^c P(\xi_n > x) dx - cP(\xi_n > c) \rightarrow \\ &\rightarrow \int_0^c P(\xi > x) dx - cP(|\xi| > c) = E\xi I(\xi \leq c) \end{aligned}$$

по теореме Лебега о мажорируемой сходимости. Тем самым если $\overline{\lim}_n E\xi_n \leq E\xi$, то в точках непрерывности f

$$\overline{\lim}_n E\xi_n I(\xi_n > c) \leq E\xi I(\xi > c) \rightarrow 0, \quad c \rightarrow \infty.$$

Ввиду задачи П.6.26 из этого следует равномерная интегрируемость семейства $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$.

Очевидно, что из условия 1 следует условие 2. Осталось показать, что условие 1 вытекает из условия 3. Имеем (в точках непрерывности f)

$$\sup_n E\xi_n \geq \lim_n E\xi_n I(\xi_n \leq c) = E\xi I(\xi \leq c) \rightarrow E\xi, \quad c \rightarrow \infty,$$

т. е. $E\xi < \infty$. Окончательно получаем

$$\begin{aligned} |E\xi_n - E\xi| &\leq |E\xi_n I(\xi_n \leq c) - E\xi I(\xi \leq c)| + \sup_n E\xi_n I(\xi_n > c) + \\ &+ E\xi I(\xi > c) \rightarrow 0, \quad n, c \rightarrow \infty. \quad \square \end{aligned}$$

31. (Критерий Витали.) Пусть $p > 0$, $E|\xi_n|^p < \infty$, $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$. Доказать, что следующие условия равносильны:

- 1) $E|\xi_n|^p \rightarrow E|\xi|^p < \infty$,
- 2) $\overline{\lim}_n E|\xi_n|^p \leq E|\xi|^p < \infty$,
- 3) семейство $\{|\xi_n|^p\}_{n \geq 1}$ равномерно интегрируемо,
- 4) $E|\xi_n - \xi|^p \rightarrow 0$.

Решение. Из сходимости $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$ в силу непрерывности функции $\varphi(x) = |x|^p$ следует, что $|\xi_n|^p \xrightarrow{p} |\xi|^p$. Таким образом, вследствие задачи П.6.30 условия 1, 2 и 3 эквивалентны ($\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, так как $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$).

Условие $\lim_n E|\xi_n - \xi|^p = 0$ при $E|\xi_n|^p < \infty$, в частности, означает, что $E|\xi|^p < \infty$. По неравенству Минковского при $p \geq 1$ имеем

$$|(E|\xi|^p)^{1/p} - (E|\xi_n|^p)^{1/p}| \leq (E|\xi_n - \xi|^p)^{1/p} \rightarrow 0,$$

т. е. выполнено условие 1. Если же $p \in (0, 1)$, то функция $f(x) = x^p$ вогнута при $x \geq 0$ и, значит,

$$f(x+y) - f(x) \leq f(y) - f(0) = f(y), \quad x, y \geq 0.$$

Отсюда следует, что

$$|E|\xi|^p - E|\xi_n|^p| \leq E|\xi_n - \xi|^p, \quad 0 < p < 1.$$

Теперь достаточно доказать, что из условия 3 и конечности $E|\xi|^p$ следует условие 4. Установим это. По лемме 2 из В1.П.6 семейство $\{|\xi_n - \xi|^p\}_{n \geq 1}$ равномерно интегрируемо, поскольку при $c \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \sup_n E|\xi_n - \xi|^p I(|\xi_n - \xi| > c) &\leq \sup_n E|2\xi_n \vee 2\xi|^p I(|2\xi_n \vee 2\xi| > c) \leq \\ &\leq \sup_n E|2\xi_n|^p I(|2\xi_n| > c) + E|2\xi|^p I(|2\xi| > c) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Вновь применяя утверждение задачи П.6.30, приходим к условию 4. $\square$

32. (Лемма Пратта, [93].) Пусть ξ, η, ζ и $\xi_n, \eta_n, \zeta_n, n \geq 1$, — такие случайные величины, что $\eta_n \leq \xi_n \leq \zeta_n$ при всех n ,

$$\xi_n \xrightarrow{p} \xi, \quad \eta_n \xrightarrow{p} \eta, \quad \zeta_n \xrightarrow{p} \zeta, \quad E\eta_n \rightarrow E\eta, \quad E\zeta_n \rightarrow E\zeta$$

и математические ожидания $E\xi, E\eta, E\zeta$ конечны. Показать, что $E\xi_n \rightarrow E\xi$ и при этом

$$E|\xi_n - \xi| \rightarrow 0 \Leftrightarrow E|\eta_n - \eta| \rightarrow 0, \quad E|\zeta_n - \zeta| \rightarrow 0.$$

Решение. Поскольку $0 \leq \xi_n - \eta_n \leq \zeta_n - \eta_n$ и $E(\zeta_n - \eta_n) \rightarrow E(\zeta - \eta)$, семейство $\{\zeta_n - \eta_n\}_{n \geq 1}$ равномерно интегрируемо (см. задачу П.6.31) и, значит, семейство $\{\xi_n - \eta_n\}_{n \geq 1}$ также является равномерно интегрируемым. Отсюда $E(\xi_n - \eta_n) \rightarrow E(\xi - \eta)$ и $E\xi_n \rightarrow E\xi$. Более того, применяя результат задачи П.6.30, находим

$$E|(\xi_n - \eta_n) - (\xi - \eta)| \rightarrow 0, \quad E|(\zeta_n - \eta_n) - (\zeta - \eta)| \rightarrow 0.$$

Это обеспечивает требуемую эквивалентность. $\square$

33. (Лемма Шеффе, [101].) Доказать, что если $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$, то

$$E|\xi_n - \xi| \rightarrow 0 \Leftrightarrow E|\xi_n| \rightarrow E|\xi|, \quad n \rightarrow \infty,$$

где предполагается, что $E|\xi|, E|\xi_n| < \infty$.

Решение. Утверждение есть частный случай задачи II.6.31. $\square$

34. Доказать следующую *теорему Бенно Леви*.

Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ интегрируемы, т. е. $E|\xi_n| < \infty$ для всех $n \geq 1$. Если при этом $\sup_n E\xi_n < \infty$ и $\xi_n \uparrow \xi$, то случайная величина ξ интегрируема и $E\xi_n \uparrow E\xi$.

Решение. По условию для всех $n \geq 1$ имеет место равенство

$$\xi_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n, \quad \xi_n = \xi_n - \xi_{n-1} \geq 0.$$

Более того, в силу ограниченности $E\xi_n$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\xi_n < \infty.$$

Отсюда следует, что ξ_n сходится к ξ в L^1 ($E|\xi_n - \xi| \rightarrow 0$), причем

$$E\xi_n \uparrow E\xi \quad \text{и} \quad E|\xi_n| \leq E|\xi_1| + \sum_{n=1}^{\infty} E\xi_n. \quad \square$$

35. Доказать следующую разновидность *леммы Фату*.

Если $0 \leq \xi_n \rightarrow \xi$ п. н. и $\sup_n E\xi_n < \infty$, то случайная величина ξ интегрируема и $E\xi \leq \sup_n E\xi_n$.

Решение. Будем считать, что величина ξ непрерывна, иначе заменим величины $\xi, \xi_1, \dots$ на $\xi + U, \xi_1 + U, \dots$, где U — равномерно распределенная на $[0, 1]$, независимая от $\xi, \xi_1, \dots$. Обозначим

$$\zeta_{mn} = \sum_{k=1}^{m^2} \frac{k-1}{m} \cdot I((k-1)m^{-1} \leq \xi_n < km^{-1}),$$

$$\zeta_m = \sum_{k=1}^{m^2} \frac{k-1}{m} \cdot I((k-1)m^{-1} \leq \xi < km^{-1}).$$

Тогда $E\zeta_{mn} \leq E\xi_n$ и с вероятностью единица

$$\lim_n \zeta_{mn} = \zeta_m, \quad \zeta_m \uparrow \xi, \quad m \uparrow \infty.$$

В силу ограниченности ζ_{mn} при каждом фиксированном m по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\lim_n E\zeta_{mn} = E\zeta_m \leq \sup_n E\xi_n.$$

Используя теперь определение интеграла Лебега, получаем $\lim_m E\zeta_m = E\xi$ и, значит, $E\xi \leq \sup_n E\xi_n$. $\square$

36. Пусть $\xi_n \downarrow \xi$ п. н., $E|\xi_n| < \infty$, $n \geq 1$, и $\inf E\xi_n > -\infty$. Показать, что $E|\xi_n - \xi| \rightarrow 0$.

Решение. Имеем $E|\xi_n - \xi| \leq E|\xi_n^+ - \xi^+| + E|\xi_n^- - \xi^-|$. При этом $0 \leq \xi_n^+ \downarrow \xi^+$, $0 \leq \xi_n^- \uparrow \xi^-$ и $\sup E\xi_n^- < \infty$. Поскольку $P(\xi_n^+ \leq \xi_1^+) = 1$ и $E\xi_1^+ < \infty$, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости $E|\xi_n^+ - \xi^+| \rightarrow 0$. Далее, поскольку $\sup E\xi_n^- < \infty$, заключаем, что $E\xi^- < \infty$ (см. задачу П.6.35). Тем самым, вновь применяя теорему Лебега о мажорируемой сходимости ($0 \leq \xi_n^- \leq \xi^-$ п. н.), получаем, что $E|\xi_n^- - \xi^-| \rightarrow 0$ и, значит, $E|\xi_n - \xi| \rightarrow 0$. $\square$

37. Пусть случайные величины ξ_n , $n \geq 1$, таковы, что $D\xi_n = o((E\xi_n)^2)$ и

$$E\xi_n \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказать, что $\xi_n \xrightarrow{p} \infty$.

Решение. По неравенству Чебышёва

$$P(\xi_n < E\xi_n/2) \leq P(|\xi_n - E\xi_n| > E\xi_n/2) \leq \frac{4D\xi_n}{(E\xi_n)^2} \rightarrow 0,$$

и, следовательно, для любого $c > 0$ имеем

$$P(\xi_n > c) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty. \quad \square$$

38. Привести пример таких случайных величин ξ_n , $n \geq 1$, что

$$E \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} E\xi_n.$$

Решение. Зададим ξ_n , $n \geq 1$, равенством

$$\xi_n = nI(nU \leq 1) - (n-1)I((n-1)U \leq 1),$$

где U — случайная величина, имеющая равномерное распределение на $[0, 1]$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n = \lim_n \sum_{i=1}^n \xi_i = \lim_n nI(nU \leq 1) = 0$$

с вероятностью единица. Тем самым

$$E \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n = 0 \neq 1 = \lim_n E nI(nU \leq 1) = \lim_n \sum_{i=1}^n E\xi_i = \sum_{n=1}^{\infty} E\xi_n. \quad \square$$

39. Для любого *конечного* числа независимых интегрируемых случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$ выполняется равенство

$$E \prod_{i=1}^n \xi_i = \prod_{i=1}^n E\xi_i.$$

Показать, что если $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность независимых интегрируемых случайных величин, то, вообще говоря,

$$\mathbb{E} \prod_{i=1}^{\infty} \xi_i \neq \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{E} \xi_i.$$

Решение. Пусть $\xi_i, i = 1, 2, \dots$, — бернуллиевские случайные величины,

$$\mathbb{P}(\xi_i = 0) = \mathbb{P}(\xi_i = 2) = \frac{1}{2}.$$

Тогда $\mathbb{E} \xi_i = 1$ и $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{E} \xi_i = 1$. С другой стороны,

$$\mathbb{P}\left(\prod_{i=1}^{\infty} \xi_i > 0\right) = \lim_n \mathbb{P}(\xi_1 = 2, \dots, \xi_n = 2) = \lim_n [\mathbb{P}(\xi_1 = 2)]^n = 0,$$

т. е. $\prod_{i=1}^{\infty} \xi_i = 0$ с вероятностью единица. Таким образом,

$$\mathbb{E} \prod_{i=1}^{\infty} \xi_i = 0 \neq 1 = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{E} \xi_i. \quad \square$$

40. Пусть случайная величина X такова, что

$$\lim_n \frac{\mathbb{P}(|X| > 2n)}{\mathbb{P}(|X| > n)} < \frac{1}{2}.$$

Доказать, что тогда $\mathbb{E}|X| < \infty$.

Решение. Поскольку

$$\mathbb{E}|X| = \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{P}(|X| > x) dx,$$

конечность $\mathbb{E}|X|$ эквивалентна сходимости интеграла

$$\int_1^{\infty} \mathbb{P}(|X| > x) dx < \infty.$$

Кроме того,

$$\int_1^{\infty} \mathbb{P}(|X| > x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2^n}^{2^{n+1}} \mathbb{P}(|X| > x) dx \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} \mathbb{P}(|X| > 2^n).$$

Выберем такое $\delta < 1/2$, достаточно близкое к $1/2$, что

$$\mathbb{P}(|X| > 2n) < \delta \mathbb{P}(|X| > n)$$

при всех $n > n_\delta$. Следовательно,

$$\begin{aligned} P(|X| > 2^n) &= P(|X| > 2 \cdot 2^{n-1}) < \delta P(|X| > 2^{n-1}) < \dots \\ &\dots < \delta^{k_n} P(|X| > 2^{n-k_n}) \leq \delta^{k_n}, \end{aligned}$$

где $k_n = n + O(1)$ выбрано из условия

$$2^{n-k_n} > n_\delta \geq 2^{n-k_n-1}.$$

Используя тот факт, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \delta^n < \infty,$$

легко вывести сходимость рассматриваемого интеграла. $\square$

Замечание. Заметим, что утверждение о конечности EX сохраняет свою силу, если при некотором $\alpha > 1$ выполняется неравенство

$$\varlimsup_n \frac{P(X > \alpha n)}{P(X > n)} < \frac{1}{\alpha},$$

что устанавливается теми же рассуждениями. Более того, если указанный верхний предел равен нулю для некоторого $\alpha > 1$, то X имеет моменты всех порядков.

41. Пусть X — неотрицательная случайная величина с непрерывной функцией распределения $F = F(x)$. Привести пример какой-нибудь неотрицательной функции $G = G(x)$, зависящей от F и такой, что $EG(X) < \infty$ и при этом конечность $EG(\alpha X)^2$ для некоторого $0 < \alpha < 1$ гарантирует существование всех моментов у X .

Решение. В качестве G можно взять $(1 - F)^{-1/2}$. Тогда

$$EG(X) = \int_0^{\infty} [1 - F(x)]^{-1/2} dF(x) = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2.$$

Если при этом

$$EG(\alpha X)^2 = \int_0^{\infty} \frac{dF(x)}{1 - F(\alpha x)} < \infty,$$

то

$$0 \leq \frac{P(X > z)}{P(X > \alpha z)} = \frac{1 - F(z)}{1 - F(\alpha z)} \leq \int_z^{\infty} \frac{dF(x)}{1 - F(\alpha x)} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty.$$

Вследствие замечания к задаче II.6.40 отсюда следует существование всех моментов у величины X . $\square$

42. Назовем многочлен $P = P(x, y)$ степени n допустимым, если в нем при x^n и y^n стоят ненулевые коэффициенты. Пусть X и Y — такие независимые случайные величины, что некоторые допустимые многочлены $P(X, Y)$ и $Q(X, Y)$ степеней n и m соответственно задают независимые величины.

Несколько неожиданным является тот факт, установленный Зингером, что в этом случае X и Y с необходимостью имеют моменты всех порядков.

(а) Доказать это, предполагая, что $E|X|^p, E|Y|^p < \infty$ для некоторого $p > 0$.

(b) Не предполагая существования каких-либо моментов у X и Y , установить это утверждение с помощью II.6.41, считая для простоты, что величины X и Y распределены непрерывно и неограничены на всей числовой оси.

Решение. (а) Заметим вначале, что всегда можно подобрать такое большое $a > 0$, что для всех x, y в $\mathbb{R}$ выполняются неравенства

$$|P(x, y)| < a(|x| + |y| + 1)^n, \quad |Q(x, y)| < a(|x| + |y| + 1)^m.$$

Отсюда $E|P(X, Y)|^{p/n}, E|Q(X, Y)|^{p/m} < \infty$. Но тогда и

$$E|P(X, Y)|^{p/n} |Q(X, Y)|^{p/m} = E|P(X, Y)|^{p/n} \cdot E|Q(X, Y)|^{p/m} < \infty.$$

В силу допустимости многочленов P и Q для любого достаточно большого $b > 0$ всегда можно найти такое $c = c(b) > 0$, что для всех $|y| \leq b$, $b^2 \leq |x|$ выполняются неравенства

$$(c|x|)^n < |P(x, y)|, \quad (c|x|)^m < |Q(x, y)|. \quad (*)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} c^{2p} P(|Y| \leq b) E|X|^{2p} I(|X| \geq b^2) &= c^{2p} E|X|^{2p} I(|Y| \leq b, b^2 \leq |X|) \leq \\ &\leq E|P(X, Y)|^{p/n} |Q(X, Y)|^{p/m}, \end{aligned}$$

и тем самым, выбирая b из условия $P(|Y| \leq b) > 0$, мы видим, что $E|X|^{2p} < \infty$. Так же получается, что $E|Y|^{2p} < \infty$.

Итак, мы установили, что из существования моментов порядка p следует существование моментов порядка $2p$ (а значит, и $4p, 8p, \dots$). Это, конечно, гарантирует существование всех моментов у величин X и Y .

(b) Пусть теперь отсутствуют какие-либо предположения о конечности моментов величин X и Y . Обозначим через F и G функции

распределения величин $|X|$ и $|Y|$ соответственно и рассмотрим функцию

$$H(x) = [1 - F(x) + 1 - G(x)]^{-1/2}, \quad x \geq 0.$$

Полагая далее (см. первую оценку в п. (а))

$$P_1(x, y) = \frac{1}{2} [a^{-1/n} |P(x, y)|^{1/n} - 1],$$

$$Q_1(x, y) = \frac{1}{2} [a^{-1/m} |Q(x, y)|^{1/m} - 1],$$

получаем

$$\begin{aligned} EH(P_1(X, Y)) &\leq EH\left(\frac{|X| + |Y|}{2}\right) \leq EH(|X| \vee |Y|) \leq \\ &\leq E[1 - F(|X|)]^{-1/2} + E[1 - G(|Y|)]^{-1/2} < \infty \end{aligned}$$

(конечность последнего выражения установлена при решении задачи II.6.41). Аналогично $EH(Q_1(X, Y)) < \infty$.

Фиксируем какое-нибудь большое b , для которого $P(|Y| \leq b) > 0$ и при $|y| \leq b$, $b^2 \leq |x|$ неравенства

$$c|x| \leq P_1(x, y), \quad c|x| \leq Q_1(x, y),$$

имеют место при некотором $c = c(b)$, $0 < c < 1$ (это всегда можно сделать, когда P и Q допустимы). Тогда

$$\begin{aligned} P(|Y| \leq b) EH(c|X|)^2 I(|X| \geq b^2) &= EH(c|X|)^2 I(|y| \leq b, b^2 \leq |x|) \leq \\ &\leq EH(P_1(X, Y)) H(Q_1(X, Y)) = EH(P_1(X, Y)) \cdot EH(Q_1(X, Y)) < \infty. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает конечность $EH(c|X|)^2$, так как функция $H(cx)$ ограничена при $x \in [0, b]$.

Аналогично выводится конечность $EH(d|Y|)^2$ для некоторого d , $0 < d < 1$. Полагая теперь $\alpha = c \wedge d$, получаем

$$EH(\alpha|X|)^2 + EH(\alpha|Y|)^2 = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{d[F(x) + G(x)]}{1 - F(\alpha x) + 1 - G(\alpha x)} < \infty.$$

Поэтому (см. решение задачи II.6.41) все моменты

$$\int_0^\infty x^p d \frac{F(x) + G(x)}{2}, \quad p > 0,$$

смеси распределений величин $|X|$ и $|Y|$ конечны. А значит, то же верно отдельно для моментов величины $|X|$ и моментов величины $|Y|$. $\square$

Замечание. Аналогичным способом получается *теорема Зингера* (см. [6]), в которой уже идет речь о двух допустимых многочленах

от K независимых случайных величин $X_1, \dots, X_K$. Эта теорема утверждает несколько большее, чем существование всех моментов, а именно, что для некоторого $\alpha > 0$ выполняется соотношение

$$\max_{1 \leq k \leq K} P(|X_k| > x) = O(e^{-x^\alpha}), \quad x \rightarrow \infty.$$

43. Пусть X — случайная величина, принимающая значения $n = 0, 1, 2, \dots$ с вероятностями p_n . Функция

$$G(s) = \mathbf{E}s^X = p_0 + p_1s + p_2s^2 + \dots, \quad |s| \leq 1,$$

называется *производящей функцией* случайной величины X (см. § 3 приложения). Установить следующие формулы:

(а) если X — пуассоновская случайная величина, т. е. $p_n = e^{-\lambda} \lambda^n / n!$, где $\lambda > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, то

$$G(s) = e^{-\lambda(1-s)}, \quad |s| \leq 1;$$

(б) если случайная величина X имеет геометрическое распределение, т. е. $p_n = p(1-p)^n$, где $0 < p < 1$, $n \in \mathbb{Z}_+$, то

$$G(s) = \frac{p}{1-s(1-p)}, \quad |s| \leq 1;$$

(с) если $X_1, \dots, X_n$ — н. о. р. величины,

$$P(X_1 = 1) = p, \quad P(X_1 = 0) = 1 - p,$$

а $X = X_1 + \dots + X_n$, то

$$G(s) = (ps + 1 - p)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \cdot s^k$$

и, значит, $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $0 \leq k \leq n$.

Решение. Прямой проверкой получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} s^n = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^n}{n!} = e^{\lambda s - \lambda},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^n s^n = p \sum_{n=0}^{\infty} [(1-p)s]^n = \frac{p}{1-(1-p)s},$$

$$\mathbf{E}s^{X_1 + \dots + X_n} = \mathbf{E}s^{X_1} \dots \mathbf{E}s^{X_n} = (\mathbf{E}s^{X_1})^n = (sp + 1 - p)^n. \quad \square$$

44. Пусть X — случайная величина, принимающая значения в множестве $\mathbb{Z}_+$. Ее *факториальные моменты* $m_{(n)}$ определяются формулой

$$m_{(n)} = \mathbf{E}X(X-1)\dots(X-n+1) = \mathbf{E}(X)_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Показать, что при любом $n \geq 1$ справедливы следующие утверждения:

(а) если $EX^n < \infty$, то факториальный момент $E(X)_n$ конечен и

$$E(X)_n = \lim_{s \rightarrow 1} G^{(n)}(s) = G_-^{(n)}(1),$$

где $G^{(n)}(s)$ есть n -я производная $G(s)$ — производящей функции величины X ;

(б) если $EX^n = \infty$, то $E(X)_n = \infty$ и $\lim_{s \rightarrow 1} G^{(n)}(s) = \infty$;

(с) $m_{(n)} = \lambda^n$, когда X имеет пуассоновское распределение с параметром $\lambda > 0$.

Решение. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости при каждом $0 < s < 1$ существует

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} [G(s + \varepsilon) - G(s)] = E \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} [(s + \varepsilon)^X - s^X] = EXs^{X-1} = G'(s),$$

так как при $x \geq 1$ справедливы неравенства

$$\sup_{|\varepsilon| < (1-s)/2} |\varepsilon^{-1} [(s + \varepsilon)^x - s^x]| \leq x \left(\frac{s+1}{2} \right)^{x-1} \leq \sup_{x \geq 1} x \left(\frac{s+1}{2} \right)^{x-1} < \infty.$$

Аналогично доказывается, что при всех $0 < s < 1$ и каждом $n > 1$ существует $G^{(n)}(s)$ и

$$G^{(n)}(s) = E(X)_n s^X.$$

Кроме того, $E(X)_n \leq EX^n$ и $EX^n I(X > 2n) \leq 2^n E(X)_n I(X > 2n)$. Поэтому

$$EX^n < \infty \Leftrightarrow E(X)_n < \infty.$$

Вновь применяя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, предельным переходом получаем соотношения из п. (а) и (б).

(с) Утверждение вытекает из п. (а) с учетом того, что $G(s) = e^{-\lambda(1-s)}$ (см. задачу П.6.43). $\square$

45. Пусть X — случайная величина, принимающая значения $0, 1, \dots, n$, с биномиальными моментами $b_0, b_1, \dots, b_n$, определяемыми по формуле

$$b_k = EC_X^k = \frac{E(X)_k}{k!} \equiv \frac{1}{k!} EX(X-1)\dots(X-k+1).$$

Показать, что производящая функция имеет вид

$$G(s) = Es^X = \sum_{k=0}^n b_k (s-1)^k = \sum_{i=0}^n s^i \sum_{k=i}^n (-1)^{k-i} C_k^i b_k$$

и, следовательно, для каждого $i = 0, 1, \dots, n$ справедливо равенство

$$P(X = i) = p_i = \sum_{k=i}^n (-1)^{k-i} C_k^i b_k.$$

Решение. Поскольку $EC_X^k = EC_X^k I(X \geq k)$, по формуле бинома Ньютона

$$\begin{aligned} ES^X &= E(s-1+1)^X = E \sum_{k=0}^X C_X^k (s-1)^k = \sum_{k=0}^n (s-1)^k EC_X^k I(X \geq k) = \\ &= \sum_{k=0}^n b_k (s-1)^k. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} ES^X &= \sum_{i=0}^n p_i s^i = \sum_{k=0}^n b_k (s-1)^k = \sum_{k=0}^n b_k \sum_{i=0}^k C_k^i s^i (-1)^{k-i} = \\ &= \sum_{i=0}^n s^i \sum_{k=i}^n (-1)^{k-i} C_k^i b_k, \end{aligned}$$

т. е. $p_i = \sum_{k=i}^n (-1)^{k-i} C_k^i b_k$. □

46. Пусть X — дискретная случайная величина с равномерным распределением на $\{0, 1, \dots, n\}$, т. е. $P(X = k) = \frac{1}{n+1}$, где $k = 0, 1, \dots, n$.

Показав, что $G(s) = ES^X = \frac{1}{n+1} \frac{1-s^{n+1}}{1-s}$, и найдя EX и EX^2 , установите известные формулы

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Решение. См. задачу II.6.44. □

47. Пусть $A_1, \dots, A_n$ — произвольные события и $\Sigma_n = I_{A_1} + \dots + I_{A_n}$. Показать, что производящая функция $G_{\Sigma_n}(s) = ES^{\Sigma_n}$ задается следующей формулой:

$$G_{\Sigma_n}(s) = \sum_{m=0}^n S_m (s-1)^m,$$

где

$$S_m = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m}).$$

Вывести отсюда, что вероятность события $B_m = \{\Sigma_n = m\}$ задается формулой

$$P(B_m) = \sum_{k=m}^n (-1)^{k-m} C_k^m S_k.$$

Решение. Представление для G_{Σ_n} вытекает из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} G_{\Sigma_n}(s) &= E \prod_{i=1}^n (1 + I_{A_i}(s-1)) = \\ &= E \left[1 + \sum_{i=1}^m I_{A_i}(s-1) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} I_{A_{i_1}} I_{A_{i_2}} (s-1)^2 + \dots + \prod_{i=1}^n I_{A_i} (s-1)^n \right]. \end{aligned}$$

Формула для вероятности $P(B_m)$ есть следствие того, что S_m являются биномиальными моментами для Σ_n (см. задачу II.6.45). $\square$

48. Пусть $G(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots$ — производящая функция дискретной случайной величины X , $P(X = n) = p_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ (см. задачу II.6.43). Пусть

$$q_n = P(X > n), \quad r_n = P(X \leq n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Показать, что производящие функции последовательностей $q = (q_n)_{n \geq 0}$ и $r = (r_n)_{n \geq 0}$ задаются соответственно формулами

$$G_q(s) = \frac{1-G(s)}{1-s} \quad \text{и} \quad G_r(s) = \frac{G(s)}{1-s}, \quad |s| < 1.$$

Установить также, что

$$\frac{1-G(s)}{1-s} \uparrow EX, \quad s \uparrow 1.$$

Решение. Поскольку $q_n + r_n = 1$ для всех n , при $|s| < 1$ имеем

$$G_q(s) + G_r(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n = \frac{1}{1-s},$$

так что достаточно установить лишь второе равенство:

$$G_r(s) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \sum_{i=0}^n p_i = \sum_{i \geq 0} p_i \sum_{n=i}^{\infty} s^n = \sum_{i \geq 0} p_i \frac{s^i}{1-s} = \frac{G(s)}{1-s}.$$

Соотношение

$$\frac{1-G(s)}{1-s} = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n) s^n \uparrow EX, \quad s \uparrow 1,$$

вытекает из формулы $EX = \sum_{n \geq 0} P(X > n)$. $\square$

49. Наряду с *производящей функцией* $G(s)$ во многих случаях оказывается полезным понятие *производящей функции моментов*:

$$M(s) = \mathbb{E}e^{sX}$$

(в предположении, что s таковы, что $\mathbb{E}e^{sX} < \infty$). Полезно заметить, что если случайная величина X неотрицательна и $\lambda \geq 0$, то функция $\phi(\lambda) = M(-\lambda) = \mathbb{E}e^{-\lambda X}$ есть не что иное, как *преобразование Лапласа* случайной величины X .

(а) Показать, что если производящая функция моментов $M(s)$ определена для всех s из некоторой окрестности нуля $|s| < a$, $a > 0$, то существуют производные $M^{(n)}(s)$ при $|s| < a$ для всех $n = 1, 2, \dots$, причем $M^{(n)}(0) = \mathbb{E}X^n$. Это свойство и оправдывает название для $M(s)$ как производящей функции моментов.

(b) Привести пример случайной величины, для которой $M(s) = \infty$ при всех $s \neq 0$.

(с) Показать, что для пуассоновской случайной величины X с $\lambda > 0$ производящая функция моментов имеет вид $M(s) = e^{-\lambda(1-e^s)}$ для всех $s \in \mathbb{R}$.

(d) Привести пример двух *не* независимых случайных величин X и Y , у которых производящая функция $M_{X+Y}(s) = \mathbb{E}e^{s(X+Y)}$ есть произведение производящих функций $M_X(s) = \mathbb{E}e^{sX}$ и $M_Y(s) = \mathbb{E}e^{sY}$.

Решение. (а) Допустим для определенности, что для некоторого $a > 0$ имеет место соотношение

$$(\mathbb{E}e^{a|X|} \leq) \mathbb{E}e^{aX} + \mathbb{E}e^{-aX} < \infty.$$

Тогда при любом $|s| < a$ и $n = 0, 1, 2, \dots$ имеем

$$\mathbb{E}|X|^n e^{s|X|} \leq \sup_{x>0} x^n e^{-(a-|s|)x} \cdot \mathbb{E}e^{a|X|} < \infty.$$

Следовательно, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости при $|s| < a$ справедливы равенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} [M(s + \varepsilon) - M(s)] = \mathbb{E} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} [e^{(s+\varepsilon)X} - e^{sX}] = \mathbb{E}X e^{sX} = M'(s),$$

так как

$$\mathbb{E} \sup_{|\varepsilon| < (a-|s|)/2} |\varepsilon^{-1} [e^{(s+\varepsilon)X} - e^{sX}]| \leq \mathbb{E}X e^{\frac{|s|+a}{2}X} < \infty.$$

В частности, получаем $M'(0) = \mathbb{E}X$. Аналогично (по индукции) доказывается, что существуют $M^{(n)}(s) = \mathbb{E}X^n e^{sX}$ при $|s| < a$ и $M^{(n)}(0) = \mathbb{E}X^n$.

(b) Если X распределено по закону Коши, то при $s \neq 0$ имеем

$$\mathbb{E}e^{sX} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{sx} dx}{\pi(1+x^2)} = \infty.$$

(c) Имеем

$$\mathbb{E}e^{sX} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{sk} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^s \lambda)^k}{k!} = e^{\lambda e^s - \lambda}.$$

(d) Фиксируем произвольные $p, q, r > 0$, $p + q + r = 1$. Зададим распределение (X, Y) с помощью таблицы:

$X \setminus Y$	0	1	2	
0	p^2	$pq + \varepsilon$	$pr - \varepsilon$	p
1	$qp - \varepsilon$	q^2	$qr + \varepsilon$	q
2	$rp + \varepsilon$	$rq - \varepsilon$	r^2	r
	p	q	r	

Здесь ε — произвольное положительное число, для которого все выражения в таблице неотрицательны. Так заданные X, Y являются *зависимыми* и одинаково распределенными, причем

$$\begin{aligned} M_{X+Y}(s) &= p^2 + 2pqe^s + (2pr + q^2)e^{2s} + 2qre^{3s} + r^2e^{4s} = \\ &= (p + qe^s + re^{2s})^2 = M_X(s)M_Y(s). \quad \square \end{aligned}$$

50. Пусть $M(s) = \mathbb{E}e^{sX}$ — производящая функция моментов неотрицательной случайной величины X . Показать, что для всех $p, s > 0$ выполняется неравенство

$$\mathbb{E}X^p \leq \left(\frac{p}{es}\right)^p M(s).$$

Решение. Утверждение следует из неравенства

$$x^p \leq \left(\frac{p}{es}\right)^p e^{sx}, \quad x > 0. \quad \square$$

51. Пусть ξ — случайная величина с функцией распределения F и $\mathbb{E}|\xi|^{-1} < \infty$. Доказать, что функция F дифференцируема в нуле и $F'(0) = 0$.

Решение. Заметим, что $\mathbb{P}(\xi = 0) = 0$, если $\mathbb{E}|\xi|^{-1} < \infty$. Следовательно, по свойству абсолютной непрерывности интеграла Лебега

$$\frac{F(x) - F(0)}{x} \leq \mathbb{E} \frac{I(|\xi| \leq |x|)}{|x|} \leq \mathbb{E} \frac{I(|\xi| \leq |x|)}{|\xi|} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0. \quad \square$$

52. Показать, что если ξ есть интегрируемая случайная величина, то

$$E\xi = \int_0^{\infty} P(\xi > x) dx - \int_{-\infty}^0 P(\xi < x) dx.$$

Показать также, что для всякого $a > 0$ выполняется равенство

$$E[\xi I(\xi > a)] = \int_a^{\infty} P(\xi > x) dx + aP(\xi > a)$$

и если $\xi \geq 0$, то

$$E[\xi I(\xi \leq a)] = \int_0^a P(x < \xi \leq a) dx.$$

Решение. Все приведенные соотношения вытекают из формулы

$$E\zeta = \int_{\mathbb{R}_+} P(\zeta > x) dx,$$

справедливой для неотрицательных величин ζ . Для вывода первого равенства также используется разложение $E\xi = E\xi^+ - E\xi^-$. $\square$

53. Пусть $F = F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ . Показать, что

$$E|\xi| < \infty \Leftrightarrow \int_{-\infty}^0 F(x) dx < \infty \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty} [1 - F(x)] dx < \infty,$$

$$E\xi^+ < \infty \Leftrightarrow \int_a^{\infty} \ln \frac{1}{F(x)} dx < \infty \quad \text{для некоторого } a > 0.$$

Решение. Первое утверждение вытекает из формул

$$E\xi^- = \int_0^{\infty} P(\xi^- \geq x) dx = \int_0^{\infty} F(-x) dx,$$

$$E\xi^+ = \int_0^{\infty} P(\xi^+ > x) dx = \int_0^{\infty} [1 - F(x)] dx.$$

Кроме того, ввиду асимптотической эквивалентности

$$1 - F(x) \sim \ln \frac{1}{F(x)}, \quad x \rightarrow \infty,$$

интегралы

$$\int_a^{\infty} [1 - F(x)] dx \quad \text{и} \quad \int_a^{\infty} \ln \frac{1}{F(x)} dx$$

сходятся или расходятся одновременно при достаточно больших $a > 0$. Отсюда с учетом упомянутого выше представления $E\xi^+$ следует второе утверждение. $\square$

54. Пусть X — случайная величина, а $p > 0$ — произвольное положительное число.

(а) Показать, что если

$$n^{p-1}P(|X| > n) = \frac{o(1)}{n}, \quad n \rightarrow \infty,$$

то $E|X|^r < \infty$ для всех $r < p$, однако, вообще говоря, при $r = p$ может оказаться, что $E|X|^p = \infty$.

(b) Установить также, что

$$E|X|^p < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-1}P(|X| > n) < \infty$$

и

$$E|X|\ln(|X| \vee 1) < \infty \Leftrightarrow \sum_{m,n=1}^{\infty} P(|X| > mn) < \infty.$$

Решение. При всех $r > 0$ по теореме Фубини

$$E|X|^r = E \int_0^{\infty} r x^{r-1} I(|X| > x) dx = r \int_0^{\infty} x^{r-1} P(|X| > x) dx.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} E|X|\ln(|X| \vee 1) &= E \int_0^{\infty} I(|X| > y) dy \int_1^{\infty} I(|X| > x) \frac{dx}{x} = \\ &= E \int_{\mathbb{R}_+ \times [1, \infty)} I(|X| > x) I(|X| > xu) du dx = \\ &= \int_1^{\infty} P(|X| > x) dx + \int_{[1, \infty)^2} P(|X| > xu) dx du. \end{aligned}$$

Интеграл $\int_0^{\infty} x^{r-1} P(|X| > x) dx$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} P(|X| > n)$ сходятся или расходятся одновременно. Это же верно для

$$\int_{[1, \infty)^2} P(|X| > xu) dx du \quad \text{и} \quad \sum_{m,n=1}^{\infty} P(|X| > mn).$$

Отсюда вытекают равенства, фигурирующие в п. (b) (при $r = p$).

Перейдем к п. (а). При $0 < r < p$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} P(|X| > n)$ сходится, поскольку

$$n^{r-1} P(|X| > n) = \frac{o(1)}{n^{1+p-r}} \quad \text{и} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1+p-r}} < \infty.$$

Если теперь $P(|X| > n) = O((n \ln n)^{-1/p})$, то $E|X|^p = \infty$, однако $n^{p-1} P(|X| > n) = o(n^{-1})$. $\square$

55. Пусть ξ и ζ — интегрируемые случайные величины. Показать, что

$$E\xi - E\zeta = \int_{\mathbb{R}} [P(\zeta < x \leq \xi) - P(\xi < x \leq \zeta)] dx,$$

$$E|\xi - \zeta| = \int_{\mathbb{R}} [P(\xi > x) + P(\zeta > x) - 2P(\xi > x, \zeta > x)] dx.$$

Замечание. Отметим также, что при $p > 1$ имеют место формулы

$$\begin{aligned} E|\xi - \zeta|^p &= p(p-1) \int_{\mathbb{R}^2} P(\xi > x \geq y \geq \zeta) |x - y|^{p-2} dx dy + \\ &+ p(p-1) \int_{\mathbb{R}^2} P(\xi \leq x \leq y < \zeta) |x - y|^{p-2} dx dy. \end{aligned}$$

Решение. Вследствие задачи II.6.52 имеем

$$\begin{aligned} E\xi - E\zeta &= \int_0^{\infty} [P(\xi > x) - P(\zeta > x)] dx - \int_{-\infty}^0 [P(\xi \leq x) - P(\zeta \leq x)] dx = \\ &= \int_0^{\infty} [P(\xi > x \geq \zeta) - P(\zeta > x \geq \xi)] dx - \\ &\quad - \int_{-\infty}^0 [P(\xi \leq x < \zeta) - P(\zeta \leq x < \xi)] dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} [P(\zeta < x \leq \xi) - P(\xi < x \leq \zeta)] dx. \end{aligned}$$

Для установления второго равенства заметим, что $|\xi - \zeta| = \xi \vee \zeta - \xi \wedge \zeta$ и, следовательно, по уже доказанной формуле

$$E|\xi - \zeta| = \int_{\mathbb{R}} P(\xi \wedge \zeta < x \leq \xi \vee \zeta) dx.$$

Осталось заметить, что при всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$P(\xi \wedge \zeta < x \leq \xi \vee \zeta) = P(\xi > x) + P(\zeta > x) - 2P(\xi > x, \zeta > x). \quad \square$$

56. Пусть X и Y — некоторые случайные величины. Когда имеют место равенства

$$|EXY| = (E|X|^p)^{1/p} (E|Y|^q)^{1/q} \quad \begin{array}{l} \text{для некоторого } p > 1 \\ \text{и } q = p/(p-1); \end{array}$$

$$(E|X+Y|^p)^{1/p} = (E|X|^p)^{1/p} + (E|Y|^p)^{1/p} \quad \text{для некоторого } p > 1;$$

$$g(EX) = Eg(X) \quad \begin{array}{l} \text{для некоторой строго выпук-} \\ \text{лой вниз функции } g = g(x)? \end{array}$$

(В каждом случае предполагается, что рассматриваемые математические ожидания существуют.)

Решение. Рассмотрим первое равенство. Поскольку

$$|EXY| \leq E|XY| \leq (E|X|^p)^{1/p} (E|Y|^q)^{1/q},$$

имеем $P(XY \geq 0) = 1$ или $P(XY \leq 0) = 1$, иначе мы бы получили $|EXY| < E|XY|$ (что противоречит условию задачи). Далее, по неравенству Юнга

$$\frac{|X|}{(E|X|^p)^{1/p}} \frac{|Y|}{(E|Y|^q)^{1/q}} \leq \frac{|X|^p}{pE|X|^p} + \frac{|Y|^q}{qE|Y|^q}, \quad (*)$$

причем если с положительной вероятностью имеет место строгое неравенство, то

$$E \frac{|X|}{(E|X|^p)^{1/p}} \frac{|Y|}{(E|Y|^q)^{1/q}} < \frac{E|X|^p}{pE|X|^p} + \frac{E|Y|^q}{qE|Y|^q} = 1,$$

что противоречит условию. Поэтому в неравенстве (*) п. н. стоит равенство. Отметим, что для $x, y \geq 0$ справедливость соотношения

$$xy = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} = \int_0^x u^{p-1} du + \int_0^y v^{1/(p-1)} dv$$

означает, что $y = x^{p-1}$ (или $y^q = x^p$). Таким образом, первое равенство в условии задачи выполнено тогда и только тогда, когда $P(XY \geq 0)$ или $P(XY \leq 0)$ и при этом п. н. $|X|^p/E|X|^p = |Y|^q/E|Y|^q$.

Перейдем ко второму равенству. Поскольку

$$(E|X+Y|^p)^{1/p} \leq (E(|X|+|Y|)^p)^{1/p} \leq (E|X|^p)^{1/p} + (E|Y|^p)^{1/p},$$

имеем $P(XY \geq 0) = 1$ и на самом деле в последнем неравенстве везде стоят равенства. Отсюда также заключаем, что

$$\begin{aligned} E(|X|+|Y|)^p &= E(|X|+|Y|)^{p-1}|X| + E(|X|+|Y|)^{p-1}|Y| = \\ &= (E(|X|+|Y|)^p)^{1-1/p} (E|X|^p)^{1/p} + \\ &\quad + (E(|X|+|Y|)^p)^{1-1/p} (E|Y|^p)^{1/p}. \end{aligned}$$

Тем самым с учетом неравенства Гёльдера с необходимостью получаем

$$\mathbb{E}(|X| + |Y|)^{p-1}|X| = (\mathbb{E}(|X| + |Y|)^p)^{1-1/p}(\mathbb{E}|X|^p)^{1/p},$$

$$\mathbb{E}(|X| + |Y|)^{p-1}|Y| = (\mathbb{E}(|X| + |Y|)^p)^{1-1/p}(\mathbb{E}|Y|^p)^{1/p},$$

и, значит, по доказанному выше с вероятностью единица

$$|X|^p/\mathbb{E}|X|^p = (|X| + |Y|)^p/\mathbb{E}(|X| + |Y|)^p = |Y|^p/\mathbb{E}|Y|^p.$$

Итак, мы установили, что второе равенство выполнено тогда и только тогда, когда п. н. $XY \geq 0$ и $|X|^p/\mathbb{E}|X|^p = |Y|^p/\mathbb{E}|Y|^p$.

Обратимся к третьему равенству. Для любой строго выпуклой функции g всегда найдется такое число $l_a \in \mathbb{R}$, что $g(x) > g(a) + l_a(x - a)$ при $x \neq a$. Полагая $a = \mathbb{E}X$, видим, что равенство $\mathbb{E}g(X) = g(a) + \mathbb{E}l_a(X - a) = g(a)$ возможно только в том случае, когда с вероятностью единица $X = a = \mathbb{E}X$, т. е. величина X постоянна п. н. $\square$

57. Пусть X — невырожденная неотрицательная случайная величина. Показать, что равенство

$$\mathbb{E}X^a \mathbb{E}X^b = \mathbb{E}X^c \mathbb{E}X^d,$$

где $a + b = c + d$ и $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, может иметь место только в том случае, когда множества $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$ совпадают. (Предполагается, что рассматриваемые математические ожидания существуют.)

Решение. Пусть для определенности $a = \min\{a, b, c, d\}$. Тогда рассматриваемое равенство эквивалентно тому, что

$$\mathbb{E}Z^{b-a} = \mathbb{E}Z^{c-a} \mathbb{E}Z^{d-a},$$

где $b - a = c - a + d - a$ и величина Z имеет функцию распределения вида

$$P(Z \leq z) = \frac{\mathbb{E}X^a I(X \leq z)}{\mathbb{E}X^a}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

По неравенству Йенсена

$$\mathbb{E}Z^{c-a} \mathbb{E}Z^{d-a} \leq (\mathbb{E}Z^{b-a})^{\frac{c-a}{b-a}} (\mathbb{E}Z^{b-a})^{\frac{d-a}{b-a}} = \mathbb{E}Z^{b-a},$$

и ввиду задачи II.6.56 равенство здесь возможно (для невырожденной величины Z) только в том случае, когда либо $c - a = 0$, либо $d - a = 0$. Отсюда следует, что $\{a, b\} = \{c, d\}$. $\square$

58. (См. [86].) Пусть X — случайная величина, принимающая конечное число значений $x_1 < \dots < x_n$, $n \geq 2$. Показать, что для всех $a, b \in \mathbb{R}$, выполняется равенство

$$DX = \mathbb{E}(X - a)(X - b) + (\mathbb{E}X - a)(b - \mathbb{E}X),$$

и вывести отсюда, что

$$(EX - x_i)(x_{i+1} - EX) \leq DX \leq (EX - x_1)(x_n - EX),$$

где x_i, x_{i+1} выбраны так, что $x_i \leq EX < x_{i+1}$. В каких случаях достигается равенства?

Решение. Первое равенство устанавливается путем раскрытия скобок. Из него легко вывести указанные неравенства, подставив $(a, b) = (x_1, x_n)$ и $(a, b) = (x_i, x_{i+1})$, а также заметив, что с вероятностью единица

$$(X - x_1)(X - x_n) \leq 0, \quad (X - x_i)(X - x_{i+1}) \geq 0.$$

Равенства реализуются в том и только том случае, если X принимает только лишь два значения (или одно). $\square$

59. Пусть $P(X \in [a, b]) = 1$ для некоторых $-\infty < a < b < \infty$. Найти

$$\sup_X DX, \quad \sup_X Ee^{X-EX}, \quad \sup_X EX \cdot E\frac{1}{X}.$$

В последнем случае считать, что $a > 0$.

Решение. Функция $f(x) = (x - EX)^2$ выпукла, поэтому

$$(X - EX)^2 \leq \frac{X-a}{b-a}(b - EX)^2 + \frac{b-X}{b-a}(a - EX)^2,$$

так что

$$DX \leq \sup_c \left\{ \frac{c-a}{b-a}(b-c)^2 + \frac{b-c}{b-a}(a-c)^2 \right\} = \sup_c (c-a)(b-c) = \frac{(b-a)^2}{4},$$

где верхняя грань берется по всем $c \in [a, b]$. Максимум достигается при

$$P(X = a) = P(X = b) = \frac{1}{2}.$$

Рассуждая аналогично, находим, что

$$e^{X-EX} \leq \frac{X-a}{b-a} e^{b-EX} + \frac{b-X}{b-a} e^{a-EX}$$

и

$$Ee^X \leq \max_c \left\{ \frac{c}{d} e^{d-c} + \frac{d-c}{d} e^{-c} \right\},$$

где $d = b - a$, а $c (= EX - a)$ лежит в $[0, d]$. Прямая проверка показывает, что максимум достигается при

$$c^* = \frac{e^d - 1 - d}{e^d - 1} \quad (\leq d/2)$$

и при

$$P(X \in \{a, b\}) = 1, \quad EX = c^* + a.$$

Обратимся к третьей верхней грани. В силу выпуклости функции $f(x) = 1/x$ (при $x > 0$) имеем

$$\frac{1}{X} \leq \frac{X-a}{b-a} \frac{1}{b} + \frac{b-X}{b-a} \frac{1}{a}$$

и

$$EX \cdot E\frac{1}{X} \leq \sup_c \left\{ \frac{c-a}{b-a} \frac{c}{b} + \frac{b-c}{b-a} \frac{c}{a} \right\} = \frac{(a+b)^2}{4ab},$$

где c лежит в $[a, b]$. Максимум достигается при

$$P(X = a) = P(X = b) = \frac{1}{2}. \quad \square$$

60. (См. [34].) Пусть $P(|X| \leq b) = 1$, $EX = 0$ и $DX = \sigma^2$ для некоторых $\sigma, b > 0$. Каково максимальное возможное значение Ee^X ?

Решение. Покажем, что максимальное возможное значение Ee^X достигается на бернуллиевской величине X_* , одно из значений которой равно b (и, следовательно, второе значение равно $-\sigma^2/b$, так как $EX_* = 0$ и $EX_*^2 = DX_* = \sigma^2$). Иначе говоря,

$$Ee^X \leq Ee^{X_*} = \frac{e^b \sigma^2 + e^{-\sigma^2/b} b^2}{\sigma^2 + b^2}.$$

Парабола $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, совпадающая с e^x в точках $x = -\sigma^2/b$ ($\in [-b, b]$, см. задачу П.6.59) и $x = b$, а также имеющая общую касательную с e^x в точке $x = -\sigma^2/b$, лежит выше e^x на $[-b, b] \setminus \{-\sigma^2/b\}$. Отсюда следует искомая оценка $Ee^X \leq Ef(X) = Ee^{X_*}$. $\square$

61. (См. [71].) Пусть $P(X \in [a, b]) = 1$ для некоторых $a < 0 < b$. Доказать, что

$$Ee^{X-EX} \leq e^{\frac{(b-a)^2}{4}}.$$

Уточните последнее неравенство, показав, что

$$Ee^{X-EX} \leq e^{\frac{(b-a)^2}{8}}.$$

Решение. По неравенству Йенсена

$$Ee^{X-EX} = e^{-EX} Ee^X \leq Ee^{-X} Ee^X.$$

Теперь согласно задаче II.6.59 имеем

$$\sup_x \mathbb{E} e^x \mathbb{E} e^{-x} = \frac{(e^a + e^b)^2}{4e^{a+b}} = \operatorname{ch}^2 \frac{d}{2} \leq e^{d^2/4},$$

где $d = b - a$ и мы также учли, что

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{2^n n!} = e^{x^2/2}.$$

Уточним теперь полученную оценку. Без ограничения общности будем считать, что $\mathbb{E}X = 0$ (иначе сдвинем a и b на $\mathbb{E}X$). Как и при решении предыдущей задачи, имеем

$$\mathbb{E} e^x \leq \frac{be^a - ae^b}{b-a} = [(1-\lambda) + \lambda e^{b-a}] e^{-\lambda(b-a)} = \exp f(b-a),$$

где $\lambda = -a/(b-a) \in [0, 1]$, а

$$f(x) = \ln(1 - \lambda + \lambda e^x) - \lambda x.$$

Имеем $f(0) = 0$ и $f'(0) = 0$, так как

$$f'(x) = \frac{\lambda e^x}{1 - \lambda + \lambda e^x} - \lambda = 1 - \lambda - \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda + \lambda e^x}.$$

К тому же при $x \geq 0$ выполняются соотношения

$$f''(x) = \frac{(1-\lambda) \cdot \lambda e^x}{(1-\lambda + \lambda e^x)^2} \leq \sup_{u,v > 0} \frac{uv}{(u+v)^2} = \frac{1}{4}.$$

Таким образом,

$$f(x) \leq f(0) + f'(0)x + \sup_{z \geq 0} f''(z) \cdot \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^2}{8}. \quad \square$$

62. Пусть ξ — случайная величина, $P(\xi > 0) > 0$ и $\mathbb{E}|\xi|^p < \infty$, а $p > 1$. Показать, что

$$P(\xi > 0) \geq \frac{(\mathbb{E}\xi I(\xi > 0))^q}{\|\xi I(\xi > 0)\|_p^q},$$

где $q = p/(p-1)$. Вывести отсюда, что если $\mathbb{E}\xi \geq 0$, то для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ выполняются неравенства

$$P(\xi > \varepsilon \mathbb{E}\xi) \geq \frac{(1-\varepsilon)^2 (\mathbb{E}\xi)^2}{(1-\varepsilon)^2 (\mathbb{E}\xi)^2 + D\xi} \quad \text{и} \quad P(\xi > \varepsilon \mathbb{E}\xi) \geq (1-\varepsilon)^q \frac{(\mathbb{E}\xi)^q}{\|\xi\|_p^q}$$

в предположении конечности указанных математических ожиданий.

Решение. По неравенству Гёльдера

$$E\xi I(\xi > 0) \leq \| \xi I(\xi > 0) \|_p (P(\xi > 0))^{1/q},$$

что эквивалентно первой оценке. Для вывода оставшихся оценок достаточно заменить ξ на $\xi - \varepsilon E\xi$ и заметить следующее:

$$E(\xi - \varepsilon E\xi)I(\xi > \varepsilon E\xi) \geq E(\xi - \varepsilon E\xi) = (1 - \varepsilon)E\xi \geq 0,$$

$$E(\xi - \varepsilon E\xi)^2 I(\xi > \varepsilon E\xi) \leq E(\xi - \varepsilon E\xi)^2 = (1 - \varepsilon)^2 (E\xi)^2 + D\xi,$$

$$E(\xi - \varepsilon E\xi)^p I(\xi > \varepsilon E\xi) \leq E|\xi|^p I(\xi > \varepsilon E\xi) \leq E|\xi|^p. \quad \square$$

63. Пусть ξ — случайная величина, $E\xi^2 < \infty$. Доказать *неравенство Кантелли*

$$P(\xi - E\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{D\xi + \varepsilon^2}, \quad \varepsilon > 0.$$

Построить примеры, демонстрирующие точность приведенной оценки.

Решение. Можно считать, что $E\xi = 0$. По неравенству Коши—Буняковского

$$\begin{aligned} \varepsilon = E(\varepsilon - \xi) &\leq E(\varepsilon - \xi)I(\xi < \varepsilon) \leq (E(\xi - \varepsilon)^2)^{1/2} P(\xi < \varepsilon)^{1/2} = \\ &= (D\xi + \varepsilon^2)^{1/2} (1 - P(\xi \geq \varepsilon))^{1/2}, \end{aligned}$$

что эквивалентно требуемой верхней оценке $P(\xi \geq \varepsilon)$. Равенство для ξ с $E\xi = 0$ и $D\xi = 1$ достигается при

$$\xi^* = \begin{cases} \varepsilon & \text{с вероятностью } (1 + \varepsilon^2)^{-1}, \\ -\varepsilon^{-1} & \text{с вероятностью } (1 + \varepsilon^2)^{-1} \varepsilon^2. \end{cases} \quad \square$$

64. Предполагая, что $E\xi^2 < \infty$, доказать неравенство

$$P(\xi = 0) \leq \frac{D\xi}{E\xi^2}.$$

Решение. По неравенству Коши—Буняковского

$$(E\xi)^2 = (E\xi I(|\xi| > 0))^2 \leq E\xi^2 P(|\xi| > 0) = E\xi^2 (1 - P(\xi = 0)).$$

Последнее равносильно искомой оценке. $\square$

65. Пусть ξ — неотрицательная случайная величина. Доказать, что если для данного $\varepsilon > 0$ вероятность $P(\xi > \varepsilon)$ не превосходит a для некоторого $a \geq 0$, то

$$E\xi \leq \frac{\varepsilon}{1 - \frac{(a E\xi^2)^{1/2}}{E\xi}}$$

(в предположении, что выражение в знаменателе определено и больше нуля).

Решение. По неравенству Коши—Буняковского

$$E\xi I(\xi > \varepsilon) \leq (P(\xi > \varepsilon) E\xi^2)^{1/2} \leq (a E\xi^2)^{1/2},$$

и, значит,

$$E\xi \leq \frac{\varepsilon}{E\xi I(\xi \leq \varepsilon)} E\xi = \frac{\varepsilon}{1 - \frac{E\xi I(\xi > \varepsilon)}{E\xi}} \leq \frac{\varepsilon}{1 - \frac{(a E\xi^2)^{1/2}}{E\xi}}. \quad \square$$

66. Пусть ξ — неотрицательная случайная величина. Показать, что для всех $p > 1$ выполняется равенство

$$\int_0^\infty \frac{E(\xi^p \wedge x^p)}{x^p} dx = \frac{p}{p-1} E\xi.$$

В частности,

$$\int_0^\infty \frac{E(\xi^2 \wedge x^2)}{x^2} dx = 2E\xi.$$

Решение. По теореме Фубини

$$\int_0^\infty \frac{E(\xi^p \wedge x^p)}{x^p} dx = E \int_0^\xi 1 dx + E \int_\xi^\infty \frac{x^p}{x^p} dx = E\xi + E\xi \cdot \int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{p}{p-1} E\xi. \quad \square$$

67. Пусть случайная величина X такова, что $EX = 0$ и $P(X \leq 1) = 1$. Доказать, что

$$\frac{(E|X|)^2}{2} \leq -E \ln(1 - X).$$

Решение. Для всех $0 < \alpha < 2$ имеем

$$\frac{(E|X|)^2}{2} \leq \frac{E(2 - \alpha X)}{2} E \frac{X^2}{2 - \alpha X} = E \left[X + \frac{X^2}{2 - \alpha X} \right].$$

Таким образом, искомая оценка будет доказана, если мы выберем α таким, что при всех $x \leq 1$ выполняется неравенство

$$x + \frac{x^2}{2 - \alpha x} \leq -\ln(1 - x),$$

или, что эквивалентно,

$$f(x) = (\alpha x - 2) \ln(1 - x) - 2x - (1 - \alpha)x^2 \geq 0.$$

Имеем $f(0) = 0$,

$$f'(x) = \alpha \ln(1-x) + \frac{2-\alpha x}{1-x} - 2 - 2(1-\alpha)x, \quad f'(0) = 0,$$

$$f''(x) = -\frac{\alpha}{1-x} - \frac{\alpha}{1-x} + \frac{2-\alpha x}{(1-x)^2} - 2(1-\alpha).$$

Итак,

$$\begin{aligned} f''(x)(1-x)^2 &= 2(1-\alpha) + \alpha x - 2(1-\alpha) + 4(1-\alpha)x - 2(1-\alpha)x^2 = \\ &= (4-3\alpha)x + (2\alpha-2)x^2, \end{aligned}$$

т. е. $f''(x) \geq 0$ для всех $x \leq 1$ при $\alpha = 4/3$. Другими словами, при данном α функция f выпукла вниз с точкой минимума $x = 0$, где $f(0) = 0$. Тем самым мы получили требуемое неравенство. $\square$

68. Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ — произвольное измеримое пространство. Определим на этом пространстве функцию множеств $\mu = \mu(B)$, $B \in \mathcal{F}$, полагая

$$\mu(B) = \begin{cases} |B|, & \text{если } B \text{ конечно,} \\ \infty & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $|B|$ — мощность множества B . Показать, что так определенная функция множеств μ является неотрицательной σ -аддитивной функцией множеств, т. е. *мерой*. Эта мера называется *считающей* и является σ -конечной в том и только том случае, когда Ω не более чем счетно.

Решение. Очевидно, $\mu(B) \geq 0$ при каждом $B \in \mathcal{F}$. Далее, если $B = \bigcup_n B_n$ для попарно непересекающихся множеств $B_n \in \mathcal{F}$, $n \geq 1$, то

$$\mu(B) = |B| = \sum_n |B_n| = \sum_n \mu(B_n). \quad \square$$

69. (*К теореме Радона—Никодима.*) Рассмотрим на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F}) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$ две меры: лебегову меру λ и считающую меру μ (см. задачу П.6.68). Показать, что $\lambda \ll \mu$, но в то же самое время утверждение теоремы Радона—Никодима о существовании плотности $\frac{d\lambda}{d\mu}$ не выполнено.

Решение. По определению $\mu(B) = 0$ тогда и только тогда, когда $B = \emptyset$ и, значит, $\lambda(B) = 0$. Таким образом, $\lambda \ll \mu$. Предположим, что существует $f = \frac{d\lambda}{d\mu}$. Тогда для любого $\omega \in [0, 1]$ выполняются равенства

$$0 = \lambda(\{\omega\}) = \int_{\{\omega\}} f d\mu = f(\omega),$$

т. е. f тождественно равно нулю и $\lambda(B) = \int_B f d\mu = 0$ для всех $B \in \mathcal{B}([0, 1])$. Получили противоречие. $\square$

70. Пусть λ и μ — две σ -конечные меры на $(\Omega, \mathcal{F})$ и $f = \frac{d\lambda}{d\mu}$. Показать, что если $\mu(f = 0) = 0$, то плотность $\frac{d\mu}{d\lambda}$ существует и в качестве таковой может быть взята функция

$$\varphi = \begin{cases} 1/f & \text{на множестве } \{f \neq 0\}, \\ c & \text{на множестве } \{f = 0\}, \end{cases}$$

где c — произвольно выбранная константа.

Решение. Если $\mu(f = 0) = 0$, то $\lambda(f = 0) = 0$ и, значит, для всех $B \in \mathcal{F}$ выполняются равенства

$$\mu(B) = \int_B d\mu = \int_{B \setminus \{f=0\}} d\mu = \int_{B \setminus \{f=0\}} \varphi f d\mu = \int_{B \setminus \{f=0\}} \varphi d\lambda = \int_B \varphi d\lambda. \quad \square$$

71. Пусть для всякой неотрицательной случайной величины ξ выполняются равенства

$$L_*\xi = \sup_i \sum P(A_i) \inf_{\omega \in A_i} \xi(\omega),$$

$$L^*\xi = \inf_i \sum P(A_i) \sup_{\omega \in A_i} \xi(\omega),$$

где $\sup$ и $\inf$ берутся по всем конечным разбиениям $(A_1, \dots, A_n)$ пространства Ω на множества $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ ($\sum_{i=1}^n A_i = \Omega$), $n \geq 1$.

Доказать, что $L_*\xi \leq L^*\xi$ и если случайная величина ξ ограничена, то $L_*\xi = L^*\xi = E\xi$.

Решение. Неравенство $L_*\xi \leq L^*\xi$ следует из того, что

$$\sum_i P(A_i) \inf_{\omega \in A_i} \xi(\omega) \leq \sum_i P(A_i) \sup_{\omega \in A_i} \xi(\omega)$$

(см. определения $L_*\xi$ и $L^*\xi$).

Пусть теперь величина ξ ограничена (для определенности $\xi(\omega) \leq 1$, $\omega \in \Omega$). Тогда

$$\lim_n \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{n} P\left(\frac{i-1}{n} \leq \xi < \frac{i}{n}\right) = \lim_n \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} P\left(\frac{i-1}{n} \leq \xi < \frac{i}{n}\right) = E\xi,$$

причем для всякого $n \geq 1$ выполняются неравенства

$$\sum_{i=1}^n \frac{i-1}{n} P\left(\frac{i-1}{n} \leq \xi < \frac{i}{n}\right) \leq L_*\xi \leq L^*\xi \leq \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} P\left(\frac{i-1}{n} \leq \xi < \frac{i}{n}\right).$$

Из всего этого следует, что $L_*\xi = L^*\xi = E\xi$. $\square$

72. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ((0, 1], \mathcal{B}((0, 1]), \lambda)$, где λ — мера Лебега, а $\xi: (0, 1] \rightarrow [0, 1]$ — борелевская функция. Рассмотрим *нижние и верхние римановы суммы*

$$R_*\xi = \sup \sum_i \lambda(A_i) \inf_{\omega \in A_i} \xi(\omega),$$

$$R^*\xi = \inf \sum_i \lambda(A_i) \sup_{\omega \in A_i} \xi(\omega),$$

где $\sup$ и $\inf$ берутся по всем конечным разбиениям $(A_1, \dots, A_n)$ пространства $\Omega = (0, 1]$, причем A_i имеют вид $(a_i, b_i]$. (См. также В1.П.6.11.) Доказать эквивалентность следующих условий:

- (1) $R_*\xi = R^*\xi$;
- (2) лебегова мера множества D_ξ точек разрыва величины ξ равна нулю;
- (3) существует такая константа $R(\xi)$, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, для которого

$$|R(\xi) - \sum_i \xi(\omega_i)(b_i - a_i)| < \varepsilon$$

для всякой конечной системы непересекающихся интервалов $(a_i, b_i]$, $\sum(a_i, b_i] = (0, 1]$ и $\max(b_i - a_i) < \delta$ при любых $\omega_i \in (a_i, b_i]$.

Показать, что при выполнении любого из приведенных условий $R(\xi) = R^*\xi = R_*\xi$.

Замечание. Величина $R(\xi)$ есть не что иное, как *интеграл Римана*.

Решение. Докажем, что $(3) \Rightarrow (1)$. Варьируя ω_i в условиях (3), находим, что

$$R(\xi) - \varepsilon \leq \sum_i (b_i - a_i) \inf_{\omega \in (a_i, b_i]} \xi(\omega) \leq \sum_i (b_i - a_i) \sup_{\omega \in (a_i, b_i]} \xi(\omega) \leq R(\xi) + \varepsilon.$$

При этом

$$\sum_i (b_i - a_i) \inf_{\omega \in (a_i, b_i]} \xi(\omega) \leq R_*\xi \leq R^*\xi \leq \sum_i (b_i - a_i) \sup_{\omega \in (a_i, b_i]} \xi(\omega).$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ видим, что $R_*\xi = R^*\xi = R(\xi)$.

Покажем теперь, что $(1) \Rightarrow (2)$. Фиксируем малое $\varepsilon > 0$ и выберем конечные разбиения (A_i) и (B_j) (на полуинтервалы) пространства

$\Omega = (0, 1]$, для которых

$$R_*\xi \leq \sum_i \lambda(A_i) \inf_{\omega \in A_i} \xi(\omega) + \varepsilon,$$

$$R^*\xi \geq \sum_j \lambda(B_j) \sup_{\omega \in B_j} \xi(\omega) - \varepsilon.$$

Тогда, рассматривая новое конечное разбиение (C_k) на полуинтервалы вида $A_i B_j$, находим, что

$$R_*\xi \leq \sum_k \lambda(C_k) \inf_{\omega \in C_k} \xi(\omega) + \varepsilon,$$

$$R^*\xi \geq \sum_k \lambda(C_k) \sup_{\omega \in C_k} \xi(\omega) - \varepsilon.$$

Следовательно, при $R_*\xi = R^*\xi$ имеем

$$\sum_k \lambda(C_k) \left[\sup_{\omega \in C_k} \xi(\omega) - \inf_{\omega \in C_k} \xi(\omega) \right] = \sum_k \lambda(C_k) \sup_{\omega, \omega' \in C_k} |\xi(\omega) - \xi(\omega')| \leq 2\varepsilon.$$

Другими словами, для фиксированного $n \geq 1$ получаем

$$\frac{1}{n} \lambda \left(\bigcap_m D_{nm} \right) \leq \sum_{k: C_k \cap D_n \neq \emptyset} \lambda(C_k) \sup_{\omega, \omega' \in C_k} |\xi(\omega) - \xi(\omega')| \leq 2\varepsilon,$$

где

$$D_{nm} = \{ \omega : \sup_{\omega': |\omega' - \omega| \leq 1/m} |\xi(\omega') - \xi(\omega)| \geq 1/n \}.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем $\lambda \left(\bigcap_m D_{nm} \right) = 0$, и, значит,

$$\lambda(D_\xi) = 0 \quad \left(D_\xi = \bigcup_n \bigcap_m D_{nm} \right).$$

Установим, наконец, что (2) $\Rightarrow$ (3). Пусть $\lambda(D_\xi) = 0$. При каждом $n \geq 1$ множество D_{nm} замкнуто. Используя это, легко проверить, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, для которого

$$\left| \lambda(D_{nm}) - \sum_{i: (a_i, b_i] \cap D_{nm} \neq \emptyset} (b_i - a_i) \right| < \varepsilon$$

для всякой конечной системы непересекающихся интервалов $(a_i, b_i]$, $\sum (a_i, b_i] = (0, 1]$ и $\max(b_i - a_i) < \delta$.

При этом с учетом соотношения $\xi(\Omega) \subseteq [0, 1]$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_i \xi(\omega_i)(b_i - a_i) &= \sum_{i: (a_i, b_i] \cap D_{nm} \neq \emptyset} + \sum_{i: (a_i, b_i] \cap D_{nm} = \emptyset} \leq \\ &\leq \sum_{i: (a_i, b_i] \cap D_{nm} \neq \emptyset} (b_i - a_i) + \sum_{i: (a_i, b_i] \cap D_{nm} = \emptyset} (b_i - a_i) \left[\inf_{\omega \in (a_i, b_i]} \xi(\omega) + \frac{1}{n} \right] \leq \\ &\leq \varepsilon + \lambda(D_{nm}) + \sum_i (b_i - a_i) \inf_{\omega \in (a_i, b_i]} \xi(\omega) + \frac{1}{n} \leq \varepsilon + \lambda(D_{nm}) + R_* \xi + \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

каковы бы ни были $\omega_i \in (a_i, b_i]$. Аналогично проверяется, что

$$\sum_i \xi(\omega_i)(b_i - a_i) \geq R^* \xi - \frac{1}{n}.$$

Выбирая (последовательно) достаточно большое n , большое m , малое ε и малое δ и учитывая неравенство $R_* \xi \leq R^* \xi$, заключаем, что $R_* \xi = R^* \xi$ и имеет место утверждение (3) с $R(\xi) = R_* \xi = R^* \xi$. $\square$

73. (О связи интегрирования по Лебегу и по Риману.) Пусть борелевская функция $f = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, интегрируема по мере Лебега λ ($\int_{\mathbb{R}} |f(x)| d\lambda < \infty$). Доказать, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся

(а) такая *ступенчатая* функция $f_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^n f_i I_{[a_i, b_i)}(x)$ с ограниченными интервалами $[a_i, b_i)$, что $\int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_\varepsilon(x)| d\lambda < \varepsilon$;

(б) такая интегрируемая *непрерывная* функция $g_\varepsilon(x)$ с ограниченным носителем, что $\int_{\mathbb{R}} |f(x) - g_\varepsilon(x)| d\lambda < \varepsilon$.

Решение. (а) Без ограничения общности будем считать, что f принимает неотрицательные значения (в общем случае следует рассмотреть разложение $f = f^+ - f^-$). Фиксируем любое $\varepsilon > 0$ и возьмем такое $n = n_\varepsilon \geq 1$, что

$$\int_{f(x) \geq n\varepsilon} f(x) d\lambda + \int_{|x| > n} f(x) d\lambda < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Положим

$$f_n(x) = I(|x| \leq n) \frac{\varepsilon}{6n} \sum_{k=0}^{n^2-1} k I_{B_k}(x),$$

где $B_k = \{x: k\varepsilon \leq 6nf(x) < (k+1)\varepsilon\}$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| d\lambda \leq \int_{f(x) \geq n\varepsilon} f(x) d\lambda + \int_{|x| > n} f(x) d\lambda + \frac{\varepsilon}{6n} 2n < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Вследствие задачи II.3.7(a) для всех k ($k \leq n^2 - 1$) можно подобрать такие конечные системы непересекающихся полуинтервалов $\{[a_{ik}, b_{ik}), 1 \leq i \leq l_k\}$, содержащихся в $[-n, n]$, что

$$\int_{|x| \leq n} \left| I_{B_k}(x) - \sum_{i=1}^{l_k} I_{[a_{ik}, b_{ik})}(x) \right| d\lambda < \frac{1}{n^3}.$$

Осталось положить (полагая, что n достаточно велико)

$$f_\varepsilon(x) = I(|x| \leq n) \frac{\varepsilon}{6n} \sum_{k=0}^{n^2-1} k \sum_{i=1}^{l_k} I_{[a_{ik}, b_{ik})}(x).$$

(b) Представим функцию $f_{\varepsilon/2} = f_{\varepsilon/2}(x)$, найденную в п. (a), в виде

$$f_{\varepsilon/2}(x) = \sum_{i=1}^n f_i I_{[a_i, a_{i+1})}(x),$$

$-\infty < a_1 < \dots < a_n < \infty$. При $0 < \delta < \max_i |a_{i+1} - a_i|$ построим $g(\cdot, \delta) = g(x, \delta)$ следующим образом. Положим $g(x, \delta) = f_\varepsilon(x)$ вне промежутков $[a_i - \delta, a_i)$ ($1 \leq i \leq n$), на которых продолжим $g(\cdot, \delta)$ линейным образом так, чтобы полученная в результате функция оказалась непрерывной. При достаточно маленьком $\delta > 0$ можно гарантировать, что

$$\int_{\mathbb{R}} |f_{\varepsilon/2}(x) - g(x, \delta)| d\lambda < \frac{\varepsilon}{2},$$

и в качестве g_ε взять $g(\cdot, \delta)$. □

74. (Конструкция Рисса для интеграла Лебега, [14].) Пусть

$$(\Omega, \mathcal{F}) = ((0, 1], \mathcal{B}((0, 1])).$$

Для произвольной ступенчатой функции

$$\xi(\omega) = \sum_i c_i I_{(\omega_i, \omega_{i+1}]}(\omega),$$

где $0 = \omega_0 < \omega_1 < \dots < \omega_n = 1$ и $c_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq n-1$, определим величину

$$\bar{E}\xi = \sum_i c_i (\omega_{i+1} - \omega_i).$$

(a) Обозначим через C^+ класс всех таких функций ξ (со значениями в $\bar{\mathbb{R}}$), что $\xi_n \uparrow \xi$ почти всюду по мере Лебега λ на $((0, 1], \mathcal{B}((0, 1]))$ для некоторых ступенчатых функций ξ_n , $\sup_n \bar{E}\xi_n < \infty$, и положим в этом случае

$$\bar{E}\xi = \lim_n \bar{E}\xi_n.$$

Доказать, что это определение $\bar{E}\xi$ для $\xi \in C^+$ корректно в том смысле, что $\lim_n \bar{E}\xi_n$ всегда существует и если $\xi_n \uparrow \xi$ и $\eta_n \uparrow \xi$ для некоторых ступенчатых величин ξ_n и η_n с конечными $\sup_n \bar{E}\xi_n$ и $\sup_n \bar{E}\eta_n$, то

$$\lim_n \bar{E}\xi_n = \lim_n \bar{E}\eta_n.$$

(b) Доказать, что если функция ξ интегрируема по Риману, то $\xi, -\xi \in C^+$, причем $\bar{E}$ в этом случае совпадает с интегралом Римана.

(c) Назовем функцию ξ *интегрируемой по Риссу*, если $\xi = \xi_+ - \xi_-$ для некоторых $\xi_-, \xi_+ \in C^+$, $\bar{E}\xi_-, \bar{E}\xi_+ < \infty$, и положим в этом случае

$$\bar{E}\xi = \bar{E}\xi_+ - \bar{E}\xi_-.$$

Проверить корректность этого определения $\bar{E}\xi$.

(d) Доказать, что класс интегрируемых по Риссу функций совпадает с классом интегрируемых по Лебегу функций и при этом $\bar{E}\xi$ есть не что иное, как интеграл Лебега $E\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega) \lambda(d\omega)$, где λ — это, как и выше, мера Лебега на $((0, 1], \mathcal{B}((0, 1)))$.

(e) Показать, что класс C^+ не охватывает все неотрицательные ограниченные случайные величины ξ , $E\xi < \infty$ и, вообще говоря, при представлении таких ξ в виде $\xi_+ - \xi_-$, $\xi_-, \xi_+ \in C^+$, неизбежно приходится обращаться к неограниченным величинам ξ_- и ξ_+ .

Замечание. Конструкция Рисса позволяет строить интеграл Лебега на $((0, 1], \mathcal{B}((0, 1)))$, минуя такие вопросы, как продолжение меры. В самом деле, надо лишь знать, что такое множество нулевой лебеговой меры, а также знать меру достаточно простых множеств, с помощью которых определяются ступенчатые функции.

Решение. (a) Из условия $\xi_n(\omega) \leq \xi_{n+1}(\omega)$ для некоторых ступенчатых функций ξ_n и ξ_{n+1} и почти всех (по мере Лебега λ) $\omega \in (0, 1]$ следует, что $\xi_n(\omega) \leq \xi_{n+1}(\omega)$ для всех $\omega \in (0, 1]$. Поэтому последовательность $\bar{E}\xi_n$ не убывает и, значит, имеет предел, когда $\xi_n \uparrow \xi$ (почти всюду). Тем самым существование установлено.

Докажем теперь корректность. Достаточно установить следующую лемму: *если (почти всюду) $\xi_n \uparrow \xi \geq \eta$ для некоторых ступенчатых величин ξ_n и η , то $\lim_n \bar{E}\xi_n \geq \bar{E}\eta$* . В самом деле, из этой леммы тогда будет следовать, что $\lim_n \bar{E}\xi_n \geq \lim_m \bar{E}\eta_m$ (ξ_n и η_m даны в условии п. (a)), и в силу симметрии

$$\lim_n \bar{E}\eta_n \geq \lim_m \bar{E}\xi_m.$$

Установим эту лемму. Пусть $\varepsilon > 0$ и $A_n = \{\xi_n \geq \eta - \varepsilon\}$. Тогда A_n и $\bar{A}_n$ представимы в виде объединения конечного числа непересекающихся полуинтервалов $(a_i, b_i]$, $\lambda(\bar{A}_n) \rightarrow 0$ и

$$\xi_n = \xi_n I_{A_n} + \xi_n I_{\bar{A}_n} \geq \xi_n I_{A_n} \geq (\eta - \varepsilon) I_{A_n},$$

причем все фигурирующие здесь функции являются ступенчатыми. Поэтому

$$\begin{aligned} \bar{E}\xi_n &\geq \bar{E}(\eta - \varepsilon) I_{A_n} = \bar{E}\eta I_{A_n} - \varepsilon \lambda(A_n) = \\ &= \bar{E}\eta - \bar{E}\eta I_{\bar{A}_n} - \varepsilon \lambda(A_n) \geq \bar{E}\eta - \lambda(\bar{A}_n) \max_{\omega} \eta(\omega) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Переходя к пределу сначала при $n \rightarrow \infty$, а затем при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем $\lim_n \bar{E}\xi_n \geq \bar{E}\eta$.

(b) Пусть (в условиях задачи II.6.72) $R_*\xi = R^*\xi$. Выберем такие ступенчатые величины ($n \geq 1$)

$$\xi_n = \sum_i \inf_{\omega \in (\omega_i, \omega_{i+1}]} \xi(\omega) \cdot I_{(\omega_i, \omega_{i+1}]}, \quad \eta_n = \sum_i \sup_{\omega \in (\omega_i, \omega_{i+1}]} \xi(\omega) \cdot I_{(\omega_i, \omega_{i+1}]},$$

что $\xi_n \uparrow$, $\eta_n \downarrow$, $\bar{E}\xi_n \uparrow R_*\xi$ и $\bar{E}\eta_n \downarrow R^*\xi$. Если мы покажем, что $\xi_n \uparrow \xi$ и $\eta_n \downarrow \xi$ почти всюду, то это и будет означать принадлежность ξ , $-\xi \in C^+$.

Пусть $X = \lim_n \xi_n$ и $Y = \lim_n \eta_n$. Тогда $X \leq \xi \leq Y$ всюду, причем $X, -Y, X - Y \in C^+$ и $\bar{E}(X - Y) = 0$. Последнее равенство возможно, только если $X - Y = 0$ почти всюду, что можно доказать непосредственно, но легче сослаться на п. (d) и воспользоваться аналогичным свойством интеграла Лебега. Итак, $X = \xi = Y$ почти всюду, так что $\xi, -\xi \in C^+$.

(c) Если $\xi = \xi_+ - \xi_- = \eta_+ - \eta_-$ для некоторых $\xi_+, \xi_-, \eta_+, \eta_- \in C^+$, то (как нетрудно получить предельным переходом от ступенчатых функций) $\xi_+ + \eta_- = \eta_+ + \xi_- \in C^+$ и

$$\bar{E}\xi_+ + \bar{E}\eta_- = \bar{E}(\xi_+ + \eta_-) = \bar{E}(\eta_+ + \xi_-) = \bar{E}\eta_+ + \bar{E}\xi_-.$$

Отсюда следует требуемая корректность определения $\bar{E}\xi$.

(d) Обозначим через $C^+ - C^+$ класс функций, интегрируемых по Риссу. По построению C^+ видим, что $\bar{E}\xi = E\xi$, когда $\xi \in C^+$, и, значит, класс $C^+ - C^+$ лежит в классе функций, интегрируемых по Лебегу.

Проверим обратное. Заметим вначале, что класс $C^+ - C^+$ замкнут относительно вычитания, а также сложения и умножения на любую константу. Так, например, если $\xi = \xi_1 - \xi_2$ и $\eta = \eta_1 - \eta_2$, $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \in C^+$ и $\bar{E}\xi_1, \bar{E}\xi_2, \bar{E}\eta_1, \bar{E}\eta_2 < \infty$, то

$$\xi - \eta = (\xi_1 + \eta_2) - (\xi_2 + \eta_1) \quad \text{и} \quad \xi_1 + \eta_2, \xi_2 + \eta_1 \in C^+$$

(так как класс C^+ замкнут относительно сложения). Учитывая разложение $\xi = \xi^+ - \xi^-$, в силу сделанного замечания надо лишь показать, что любая борелевская неотрицательная функция ξ , $E\xi < \infty$, интегрируема по Риссу.

Воспользуемся следующим свойством (которое мы проверим несколько позже): класс $C^+ - C^+$ замкнут относительно монотонных пределов $\uparrow$ (почти всюду) величин с ограниченным средними. Для всех неотрицательных борелевских случайных величин ξ имеем

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n^2} (i-1)I(i-1 < n\xi \leq i) \uparrow \xi, \quad n \uparrow \infty,$$

так что достаточно проверить, что $I(i-1 < n\xi \leq i) \in C^+ - C^+$ при каждом i , $1 \leq i \leq n^2$. Поскольку $I(i-1 < n\xi \leq i)$ есть индикатор борелевского множества, надо показать, что $I_B \in C^+ - C^+$ для каждого борелевского множества B . По свойству регулярности меры (см. задачу II.3.32) можно указать такую последовательность возрастающих замкнутых множеств F_n , что $I_{F_n} \uparrow I_B$ (почти всюду) для любого такого B . Следовательно, достаточно проверить принадлежность I_F к $C^+ - C^+$ для каждого замкнутого множества F , или, что эквивалентно, проверить соотношение $I_G = 1 - I_{\mathbb{R} \setminus G} \in C^+ - C^+$ для каждого открытого множества G . Представим G в виде не более чем счетного объединения непересекающихся интервалов (a_j, b_j) , $j \geq 1$. Тогда

$$\sum_{j \leq n} I_{[a_j, b_j)} \uparrow I_G$$

(почти всюду), и, значит, $I_G \in C^+ \subset C^+ - C^+$.

Осталось установить упомянутое свойство о монотонных пределах. Заметим, что в разложении $\xi = \xi_+ - \xi_-$, $\xi_-, \xi_+ \in C^+$, можно всегда переопределить величину ξ_- таким образом, что $\xi_- \geq 0$ (почти всюду) и $\bar{E}\xi_- \leq \varepsilon$ (ε — произвольное положительное число). Действительно, выберем ступенчатую величину ζ , для которой $\zeta \leq \xi_-$ (почти всюду) и $\bar{E}\xi_- - \bar{E}\zeta \leq \varepsilon$ (это можно сделать по построению C^+). Тогда $\xi = (\xi_+ - \zeta) - (\xi_- - \zeta)$, причем $\xi_- - \zeta \geq 0$ и, как нетрудно проверить, $\xi_- - \zeta \in C^+$ в силу ступенчатости ζ .

Итак, пусть $\xi_1, \xi_2, \dots \in C^+ - C^+$ таковы, что $\xi_n \uparrow \xi$ почти всюду для некоторой случайной величины ξ и $\sup_n \bar{E}\xi_n < \infty$. Представим ξ_n

в виде $\gamma_n - \delta_n$, $\gamma_n, \delta_n \in C^+$, $\delta_n \geq 0$ почти всюду и $\bar{E}\delta_n \leq 2^{-n}$. Тогда $\xi_n = \zeta_n - \eta_n$, где $\zeta_n = \eta_{n-1} + \gamma_n$ и $\eta_n = \eta_{n-1} + \delta_n$ при $n > 1$, а также

$(\zeta_1, \eta_1) = (\gamma_1, \delta_1)$. Функции η_n возрастают к некоторой функции η , лежат в классе C^+ и имеют $\sup_n \bar{E}\eta_n \leq 1$. Аналогичное верно для $\zeta_n = \xi_n + \eta_n$ (с $\sup_n \bar{E}\zeta_n \leq \sup_n \bar{E}\xi_n + 1$). Если бы выполнялись условия $\zeta_n \uparrow \zeta \in C^+$ и $\eta_n \uparrow \eta \in C^+$, то мы бы с необходимостью имели $\xi = \zeta - \eta \in C^+ - C^+$.

Таким образом, достаточно установить замкнутость C^+ относительно монотонных пределов, т. е. доказать, что если $\xi_1, \xi_2, \dots \in C^+$ таковы, что $\xi_n \uparrow \xi$ почти всюду для некоторой случайной величины ξ и $\sup_n \bar{E}\xi_n < \infty$, то $\xi \in C^+$. Возьмем ступенчатые величины ξ_{in} , для которых $\xi_{in} \uparrow \xi_i$ (почти всюду) для всякого i . Тогда функции $\rho_n = \xi_{1n} \vee \dots \vee \xi_{nn}$ также будут ступенчатыми, причем $\rho_n \uparrow \xi$ (почти всюду) и $\sup_n \bar{E}\rho_n \leq \sup_n \bar{E}\xi_n < \infty$. Тем самым $\xi \in C^+$.

(е) Для построения примеров нам понадобится такое вспомогательное множество $A \subset (0, 1]$, что

$$\lambda((a, b] \setminus A) > 0 \quad \text{и} \quad \lambda((a, b] \cap A) > 0$$

для любого полуинтервала $(a, b] \subseteq (0, 1]$, $a < b$. Допустим сначала, что A уже имеется. Рассмотрим функцию I_A . Если $I_A \in C^+$, то $\xi_n \uparrow I_A$ почти всюду для некоторых ступенчатых величин ξ_n . Но это невозможно, так как из справедливости неравенства

$$cI_{(a,b]}(\omega) \leq I_A(\omega)$$

для некоторых $0 \leq a < b \leq 1$ и $c \geq 0$ и почти всех $\omega \in (0, 1]$ следует, что $c = 0$. В самом деле, если $c \neq 0$, то с необходимостью $\lambda((a, b] \setminus A) = 0$, что противоречит определению A . Таким образом, $I_A \notin C^+$.

Согласно п. (d) имеем $I_A \in C^+ - C^+$, и, значит, $I_A = \eta - \zeta$ для некоторых $\eta, \zeta \in C^+$. Другими словами, $\eta = I_A + \zeta$. Если хотя бы одна из величин η или ζ ограничена сверху (почти всюду), то ограничена сверху и вторая. Установим от противного, что ни η , ни ζ не могут быть ограничены сверху (почти всюду).

Допустим для определенности, что ограничена величина η , т. е.

$$M = \sup\{z \in \mathbb{R}: \lambda(\eta > z) > 0\} < \infty.$$

Пусть, далее, $\eta_n \uparrow \eta$ и $\zeta_n \uparrow \zeta$ (почти всюду) для некоторых ступенчатых величин η_n, ζ_n , $n \geq 1$. Покажем, что $\zeta_n(\omega) \leq M - 1$ для всех $\omega \in (0, 1]$ и любых $n \geq 1$ (а значит, $\zeta \leq M - 1$ почти всюду на $(0, 1]$). Действительно, если $\zeta_n = c$ на $(a, b]$ ($a < b$), то

$$\lambda(\eta \geq c + 1) = \lambda(\zeta + I_A \geq c + 1) \geq \lambda(\zeta_n + I_A \geq c + 1) \geq \lambda((a, b] \cap A) > 0,$$

т. е. $c + 1 \leq M$.

Поскольку $\eta_n \uparrow \eta$ и $\lambda(\eta > M - 1/4) > 0$ (в силу определения M), найдется такое n , что $\eta_n = c$ на некотором полуинтервале $(a, b]$ ($a < b$) при некотором $c \geq M - 1/2$. Последнее, в частности, означает, что

$$\lambda((a, b] \cap \{\eta \geq M - 1/2\}) = \lambda((a, b]) = b - a.$$

Но

$$\begin{aligned} \lambda((a, b] \cap \{\eta \geq M - 1/2\}) &= \lambda((a, b] \cap \{I_A \geq (M - 1 - \zeta) + 1/2\}) \leq \\ &\leq \lambda((a, b] \cap A) < \lambda((a, b]) = b - a \end{aligned}$$

(по определению A). Полученное противоречие гарантирует неограниченность величин η и ζ .

Итак, осталось указать пример такого множества $A \subset (0, 1]$, что $\lambda((a, b] \setminus A) > 0$ и $\lambda((a, b] \cap A) > 0$ для любого полуинтервала $(a, b] \subseteq (0, 1]$, $a < b$. Множество A можно построить так.

1. По аналогии с решением задачи II.6.77 построить канторово множество на $[0, 1]$ с мерой $1/2$, обозначив его A_1 .

2. Рассмотреть дополнение к A_1 , которое будет открытым и, значит, распадется на объединение счетного числа непересекающихся интервалов.

3. В каждом интервале построить по канторову множеству с мерой, равной $1/2^2$ длины интервала.

4. Взять в качестве A_2 объединение всех этих множеств и A_1 . Множество A_2 будет замкнуто, так как каждое из канторовых множеств будет содержать все свои предельные точки, за исключением границ отвечающего ему интервала, которые уже попадут в A_1 .

5. Повторить аналогичную процедуру с A_2 , получив A_3 , и т. д. до бесконечности.

6. Положить $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$. Такое множество A будет удовлетворять всем необходимым свойствам. $\square$

75. (См. [12].) Интеграл Лебега $E\xi$ не определяется при $E\xi^- = E\xi^+ = \infty$ (см. В1.П.6, определение 2). Допустим, что при всех $a, b > 0$ существует предел

$$\bar{E}\xi = \lim_n (E[\xi^+]_{an} - E[\xi^-]_{bn}),$$

не зависящий от a и b , где $[x]_c = xI(x \leq c) + cI(x > c)$, $x, c \geq 0$. Величину $\bar{E}\xi$ будем называть *обобщенным интегралом Лебега*.

Доказать, что

(а) интеграл $\bar{E}\xi$ существует и конечен тогда и только тогда, когда $nP(|\xi| > n) \rightarrow 0$ и существует предел (называемый *интегралом Лебега в смысле главного значения*)

$$\tilde{E}\xi = \lim_n E\xi I(|\xi| \leq n),$$

при этом $\tilde{E}\xi = \bar{E}\xi$;

(b) если интегралы $\bar{E}\xi$ и $\bar{E}\eta$ существуют, причем

$$(\bar{E}\xi, \bar{E}\eta) \notin \{(\infty, -\infty), (-\infty, \infty)\},$$

то $\bar{E}(\xi + \eta)$ также существует и при этом

$$\bar{E}(\xi + \eta) = \bar{E}\xi + \bar{E}\eta;$$

(с) свойство линейности, вообще говоря, *не* имеет места для интеграла в смысле главного значения $\bar{E}$;

(d) из существования $\bar{E}\xi$, вообще говоря, *не* следует существование $\bar{E}\xi I(\xi \in B)$ (B — борелевское множество).

Решение. (а) Допустим, что существует $\tilde{E}\xi$ и $nP(|\xi| > n) \rightarrow 0$. Для заданных $a, b > 0$ выберем (любое) целое $c > a \vee b$. Тогда

$$\begin{aligned} |E\xi I(|\xi| < cn) - (E[\xi^+]_{an} - E[\xi^-]_{bn})| &\leq anP(|\xi| > an) + bnP(|\xi| > bn) + \\ &+ E|\xi| I(an < |\xi| < cn) + E|\xi| I(bn < |\xi| < cn) \leq \\ &\leq 4cnP(|\xi| > \min\{an, bn\}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Другими словами, существует $\bar{E}\xi$ и $\bar{E}\xi = \tilde{E}\xi$.

Пусть теперь существует $\bar{E}\xi$. Полагая $0 < b < 1$ и $a = 1$ в определении $\bar{E}\xi$, находим, что

$$|(E[\xi^+]_n - E[\xi^-]_{bn}) - (E[\xi^+]_{bn} - E[\xi^-]_{bn})| = |E[\xi^+]_n - E[\xi^+]_{bn}| \rightarrow 0.$$

При этом

$$\begin{aligned} E[\xi^+]_n - E[\xi^+]_{bn} &= (n - bn)P(\xi^+ > n) + E(\xi^+ - bn)I(bn < \xi^+ \leq n) \geq \\ &\geq (1 - b)nP(\xi^+ > n) \end{aligned}$$

и, значит, $nP(\xi^+ > n) \rightarrow 0$. Аналогично получается, что $nP(\xi^- > n) \rightarrow 0$.

Таким образом, $n[P(\xi^+ > n) + P(\xi^- > n)] = nP(|\xi| > n) \rightarrow 0$ и

$$\begin{aligned} \lim_n E\xi I(|\xi| \leq n) &= \\ &= \lim_n (E[\xi^+]_n - E[\xi^-]_n) - \lim_n (nP(\xi^+ > n) - nP(\xi^- > n)) = \bar{E}\xi. \end{aligned}$$

Тем самым доказано, что существует $\tilde{E}\xi$ и $\tilde{E}\xi = \bar{E}\xi$.

(b) Рассмотрим функцию $f_c(x) = [x^+]_c$ ($c > 0$). В силу монотонности f_c имеем

$$f_c(x+y) \leq f_c(x^+ + y^+), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

(поскольку $(x+y)^+ \leq x^+ + y^+$). Функция f_c вогнута на $\mathbb{R}_+$, причем $f_c(0) = 0$, поэтому

$$f_c(x^+ + y^+) \leq f_c(x^+) + f_c(y^+) = f_c(x) + f_c(y).$$

Следовательно, обозначая $f_a^b(x) = [x^+]_a - [x^-]_b$ ($a, b > 0$), видим, что

$$f_a^b(x) = f_{a+b}(x-b) - b$$

и

$$\begin{aligned} f_a^b(x+y) &= f_{a+b}(x+y-b) - b \leq \\ &\leq f_{a+b}(x-b/2) - b/2 + f_{a+b}(y-b/2) - b/2 = f_{a+b/2}^{b/2}(x) + f_{a+b/2}^{b/2}(y). \end{aligned}$$

Далее, поскольку

$$f_a^b(-x) = [(-x)^+]_a - [(-x)^-]_b = [x^-]_a - [x^+]_b = -f_b^a(x),$$

получаем, что

$$\begin{aligned} f_a^b(x+y) &= -f_b^a(-x-y) \geq -f_{a/2+b}^{a/2}(-x) - f_{a/2+b}^{a/2}(-y) = \\ &= f_{a/2}^{a/2+b}(x) + f_{a/2}^{a/2+b}(y). \end{aligned}$$

Итак, при каждом $n \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} f_{an/2}^{an/2+bn}(\xi) + \mathbb{E} f_{an/2}^{an/2+bn}(\eta) &\leq \mathbb{E} f_{an}^{bn}(\xi + \eta) \leq \\ &\leq \mathbb{E} f_{an+bn/2}^{bn/2}(\xi) + \mathbb{E} f_{an+bn/2}^{bn/2}(\eta). \quad (*) \end{aligned}$$

По определению $\mathbb{E} f_{cn}^{dn}(X) \rightarrow \bar{\mathbb{E}}X$ для всех $c, d > 0$ (если $\bar{\mathbb{E}}X$ существует). Тем самым, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в неравенстве (*), получаем, что для любых $a, b > 0$ выполняется равенство

$$\lim_n \mathbb{E} f_{an}^{bn}(\xi + \eta) = \bar{\mathbb{E}}\xi + \bar{\mathbb{E}}\eta.$$

В силу произвольности a и b заключаем, что существует $\bar{\mathbb{E}}(\xi + \eta) = \bar{\mathbb{E}}\xi + \bar{\mathbb{E}}\eta$.

(c) Будем строить пример на вероятностном пространстве

$$([-2, 1], \mathcal{B}([-2, 1]), \lambda)$$

с (нормированной) мерой Лебега λ . Тогда, полагая

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 1/\omega, & \omega \in [-1, 0) \cup (0, 1], \\ 0, & \omega \in [-2, -1) \cup \{0\}, \end{cases}$$

и

$$\eta(\omega) = \begin{cases} 1/\omega, & \omega \in (0, 1], \\ 0, & \omega \in [-1, 0], \\ 1/(1+\omega), & \omega \in [-2, -1), \end{cases}$$

находим, что $\tilde{E}\xi = 0$ и $\tilde{E}\eta = 0$. Однако

$$\xi(\omega) + \eta(\omega) = \begin{cases} 2/\omega, & \omega \in (0, 1], \\ 0, & \omega = 0, \\ 1/\omega, & \omega \in [-1, 0), \\ 1/(1+\omega), & \omega \in [-2, -1), \end{cases}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} E(\xi + \eta)I(|\xi + \eta| \leq n) &= -\frac{2}{3} \int_{1/n}^1 \frac{dx}{x} + \frac{1}{3} \int_{2/n}^1 \frac{2dx}{x} = \\ &= -\frac{2 \ln n}{3} + \frac{2 \ln(n/2)}{3} = -\frac{2 \ln 2}{3}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\tilde{E}(\xi + \eta) = -\frac{2 \ln 2}{3} \neq 0 = \tilde{E}\xi + \tilde{E}\eta.$$

(d) Будем строить пример на вероятностном пространстве

$$([-1/2, 1/2], \mathcal{B}([-1/2, 1/2]), \lambda)$$

с (нормированной) мерой Лебега λ . Возьмем

$$\xi(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\omega |\ln |\omega||}, & \omega \in [-1/2, 1/2] \setminus \{0\}, \\ 0, & \omega = 0. \end{cases}$$

Тогда $\tilde{E}\xi = 0$. Выберем далее промежутки $[a_n, a_{n-1})$, $n \geq 1$, таким образом, что $a_n \downarrow 0$, $\xi(a_n) \in \mathbb{N}$ (при всех $n \geq 1$) и

$$100 \int_{a_n}^{a_{n-1}} \xi d\lambda \leq \int_{a_{n+1}}^{a_n} \xi d\lambda.$$

Тогда, полагая $B = \bigcup_{n \geq 1} [a_{2n}, a_{2n-1}) \cup \bigcup_{n \geq 1} (-a_{2n}, -a_{2n+1}]$ и $\eta = \xi I_B$, получаем

$$\lim_n E\eta I(|\eta| \leq \xi(a_{2n})) = \infty, \quad \lim_n E\eta I(|\eta| \leq \xi(a_{2n+1})) = -\infty.$$

Другими словами, $\tilde{E}\xi I_B$ не существует, и, значит, $\bar{E}\xi I_B$ тоже не существует. $\square$

76. Показать, что заданная на $[0, \infty)$ функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ \frac{\sin x}{x}, & x > 0, \end{cases}$$

является интегрируемой по Риману и интеграл от нее есть *интеграл Дирихле*

$$(R) \int_0^\infty f(x) dx = \frac{\pi}{2}.$$

Установить, однако, что функция $f(x)$ не интегрируема по Лебегу.

Решение. Интегрируя по частям, находим, что при $0 < a < b$ выполняется равенство

$$(R) \int_a^b \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1 - \cos b}{b} - \frac{1 - \cos a}{a} + (R) \int_a^b \frac{1 - \cos x}{x^2} dx.$$

Поэтому при таких a и b имеем

$$\left| (R) \int_a^b \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \frac{8}{a}.$$

Отсюда следует существование предела

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (R) \int_0^a f(x) dx = (R) \int_0^\infty f(x) dx = I,$$

что по определению означает существование интеграла Римана $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$.

Как и выше, интегрируя по частям, получаем другое представление интеграла Дирихле:

$$I = (R) \int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = (R) \int_0^\infty (R) \int_0^\infty (1 - \cos x) te^{-tx} dt dx.$$

Используя теперь теорему Фубини (заключение которой в данном случае справедливо в силу неотрицательности подынтегральных функций),

получаем

$$I = (R) \int_0^{\infty} g(t) dt,$$

где

$$\begin{aligned} g(t) &= (R) \int_0^{\infty} (1 - \cos x) t e^{-tx} dx = \\ &= -(1 - \cos x) e^{-tx} \Big|_0^{\infty} + (R) \int_0^{\infty} \sin x e^{-tx} dx = \\ &= -\sin x \frac{e^{-tx}}{t} \Big|_0^{\infty} + (R) \int_0^{\infty} \cos x \frac{e^{-tx}}{t} dx = \frac{1}{t^2} - \frac{g(t)}{t^2} = \frac{1}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$I = (R) \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctgt} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

С другой стороны, интеграл Лебега не существует, поскольку

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^+ dx = \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^- dx = \infty.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^+ dx &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{2\pi n + \frac{\pi}{4}}^{2\pi n + \frac{3\pi}{4}} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^+ dx \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi/2}{\sqrt{2} 2\pi n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4\sqrt{2}n} = \infty. \end{aligned}$$

Аналогично устанавливается, что

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^- dx = \infty,$$

так что интеграл Лебега $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$ не существует. $\square$

77. Привести пример функции $f = f(x)$ на $[0, 1]$, являющейся ограниченной и интегрируемой по Лебегу, но такой, что для нее нельзя найти функцию $g = g(x)$, интегрируемую по Риману и совпадающую с $f = f(x)$ п. н. по лебеговой мере на $[0, 1]$.

Решение. В качестве f можно взять индикатор *нигде не плотного* множества $\mathcal{C}$ с положительной мерой Лебега. Тогда множество точек разрыва функции f есть в точности $\mathcal{C}$, и по критерию интегрируемости функции по Риману (см. задачу II.6.72) f таковой не является. С другой стороны, мера множества точек разрыва любой функции g , совпадающей с f п. н. по мере Лебега, положительна, и, значит, g также не является интегрируемой по Риману.

Указанное множество $\mathcal{C}$ можно построить аналогично канторову. А именно, можно взять отрезок $[0, 1]$ и выбросить «серединный» интервал, т. е. тот, середина которого совпадает с серединой начального отрезка, а длина в 4 раза меньше. В результате получится объединение двух отрезков $[0, 3/8]$ и $[5/8, 1]$, из которых следует также выбросить по «серединному» интервалу общей длиной $1/8$. Повторяя указанную процедуру счетное число раз, получим *нигде не плотное* множество $\mathcal{C}$, лебегова мера которого равна единице минус общая длина выкинутых интервалов

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{2}.$$

Другими словами, мера множества $\mathcal{C}$ равна $1/2$. □

Замечание. Построенное множество $\mathcal{C}$ принято называть *множеством Смита—Вольтерра—Кантора*.

78. Ньютон употреблял понятие интеграла как операции, обратной к дифференцированию. Другими словами, функция $f = f(x)$ на $[a, b]$, $a < b$, считалась интегрируемой, если существовала первообразная $F = F(x)$, для которой $F'(x) = f(x)$ на $[a, b]$ (в конечных точках a и b берутся односторонние производные). При этом полагалось, что

$$(N) \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Попробуйте построить пример функции f , для которой *интеграл Ньютона*

$$(N) \int_0^1 f(x) dx$$

определен, однако интеграл Лебега не существует.

Решение. В качестве $f(x)$ следует взять $F'(x)$, где

$$F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}.$$

□

Замечание. В этой связи приведем конструкцию *обобщенного интеграла Римана*, включающего в себя, как можно показать,

интегралы Лебега, Римана и Ньютона (см. [44]). А именно, число $I = (GR) \int_a^b f(x) dx$ есть *обобщенный интеграл Римана*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $\delta = \delta(x)$ на $[a, b]$, что

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\omega_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| \leq \varepsilon,$$

когда $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $\omega_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и $|x_i - x_{i-1}| \leq \delta(\omega_i)$.

79. При определении интеграла Римана функции $f = f(x)$ не предполагается, что эта функция является измеримой по Борелю. Привести пример *не измеримой* по Борелю функции $f(x)$, интегрируемой по Риману на отрезке $[0, 1]$.

Решение. Множество борелевских подмножеств отрезка $[0, 1]$ имеет мощность континуума $\mathfrak{c}$, а мощность лебеговых подмножеств равна $2^{\mathfrak{c}}$ (см. задачу II.2.28). Отсюда вытекает, что если $\mathcal{C}$ — канторово множество на $[0, 1]$, то найдется подмножество $C \subseteq \mathcal{C}$, которое не является борелевским и имеет лебегову меру нуль. Согласно критерию интегрируемости функции по Риману (см. задачу II.6.72) функция $f(x) = I_C(x)$, не будучи борелевской, интегрируема по Риману, причем $\int_0^1 f(x) dx = 0$. □

80. Привести пример такой ограниченной борелевской функции $f = f(x, y)$ на $\mathbb{R}^2$, что (для $y \in \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}$ соответственно)

$$\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy = 0,$$

однако эта функция не интегрируема по лебеговой мере на $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$.

Решение. Возьмем любую ограниченную нечетную борелевскую функцию $g = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$,

$$0 < \int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx < \infty,$$

и определим $f(x, y) = g(x - y)$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx = \int_{\mathbb{R}} g(x - y) dx = \int_{\mathbb{R}} g(x) dx = 0,$$

Аналогично устанавливается, что $\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy = 0$. С другой стороны, по теореме Фубини (с учетом неотрицательности подынтегральных функ-

ций)

$$\int_{\mathbb{R}^2} |g(x-y)| dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} |g(x)| dx dy = \int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx \int_{\mathbb{R}} 1 dy = \infty.$$

Тем самым функция f не является интегрируемой по Лебегу на $\mathbb{R}^2$. $\square$

81. (К теореме Фубини.) Показать, что теорема Фубини остается справедливой, если конечность мер μ_1 и μ_2 , участвующих в ее формулировке, заменить на их σ -конечность.

Следующий пример показывает, что без предположения σ -конечности утверждения теоремы Фубини могут не выполняться.

Пусть $\lambda = \lambda(dx)$ — лебегова мера, $\mu = \mu(dy)$ — считающая мера на $[0, 1]$. Обозначим через D диагональ в $[0, 1]^2$. Тогда

$$\int_0^1 \mu(dy) \int_0^1 I_D(x, y) \lambda(dx) = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^1 \lambda(dx) \int_0^1 I_D(x, y) \mu(dy) = 1.$$

Решение. Требуемое утверждение можно вывести предельным переходом из теоремы Фубини для конечных мер (которые становятся вероятностными после подходящей нормировки). $\square$

82. Пусть известно, что для случайной величины ξ ее математическое ожидание $E\xi$ отрицательно и $Ee^{\theta\xi} = 1$ для некоторого $\theta \neq 0$. Показать, что тогда $\theta > 0$.

Решение. По неравенству Йенсена $e^{\theta E\xi} \leq Ee^{\theta\xi} = 1$, что при $E\xi < 0$ возможно только тогда, когда $\theta > 0$. $\square$

83. Пусть $h = h(t, x)$ — функция, определенная на множестве $[a, b] \times \mathbb{R}$, где $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$.

(а) Предположим, что

- 1) для каждого $x \in \mathbb{R}$ функция $h(t, x)$, $t \in [a, b]$, является непрерывной;
- 2) для каждого $t \in [a, b]$ функция $h(t, x)$, $x \in \mathbb{R}$, является $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -измеримой (т. е. борелевской).

Показать, что тогда функция $h = h(t, x)$, $t \in [a, b]$, $x \in \mathbb{R}$, является $\mathcal{B}([a, b]) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -измеримой.

(b) Пусть теперь ξ — случайная величина, заданная на некотором вероятностном пространстве. Показать, что при выполнении условий 1 и 2 и условия

3) семейство величин $\{h(t, \xi), t \in [a, b]\}$ равномерно интегрируемо имеют место следующие свойства:

- (i) математическое ожидание $f(t) = Eh(t, \xi)$ является непрерывной функцией по $t \in [a, b]$;

- (ii) если $H(t, x) = \int_a^t h(s, x) ds$, то производная $\frac{d}{dt} EH(t, \xi)$ существует для всех $t \in (a, b)$ и равна $EH(t, \xi)$, т. е.

$$\frac{d}{dt} E \int_a^t h(s, \xi) ds = EH(t, \xi).$$

Решение. (а) Функции

$$\begin{aligned} h_n(t, x) &= \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} h\left(a + (b-a)\frac{i}{n}, x\right) I_{\left[a+(b-a)\frac{i}{n}, a+(b-a)\frac{i+1}{n}\right)}(t) + h(b, x) I_{\{b\}}(t) \end{aligned}$$

являются $\mathcal{B}([a, b]) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -измеримыми и сходятся к $h(t, x)$ всюду при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, функция $h(t, x)$ также $\mathcal{B}([a, b]) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -измерима.

(b) В силу условия 2 имеем

$$h(s, \xi) \rightarrow h(t, \xi), \quad s \rightarrow t,$$

всюду при любом $t \in [a, b]$. Отсюда с учетом условия 3 и теоремы 4 (b) из В1.П.6 вытекает свойство (i). Для доказательства свойства (b) достаточно проверить равномерную интегрируемость семейства

$$\{g(s, t, \xi) : s, t \in [a, b], s \neq t\},$$

где

$$g(s, t, \xi) = \frac{H(t, \xi) - H(s, \xi)}{t - s} = \frac{1}{t - s} \int_s^t h(u, \xi) du.$$

Имеем

$$\begin{aligned} g(s, t, \xi) &= \\ &= \frac{1}{t - s} \int_s^t h(u, \xi) I(|h(u, \xi)| > c) du + \frac{1}{t - s} \int_s^t h(u, \xi) I(|h(u, \xi)| \leq c) du, \end{aligned}$$

причем

$$\left| \frac{1}{t - s} \int_s^t h(u, \xi) I(|h(u, \xi)| \leq c) du \right| \leq c.$$

Следовательно,

$$|g(s, t, \xi)| \leq c + \frac{1}{t - s} \int_s^t |h(u, \xi)| I(|h(u, \xi)| > c) du,$$

так что по теореме Фубини

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}|g(s, t, \xi)|I(|g(s, t, \xi)| > 2c) \leq \\
 & \leq c \mathbb{P}\left(\frac{1}{t-s} \int_s^t |h(u, \xi)| I(|h(u, \xi)| > c) du > c\right) + \\
 & + \mathbb{E} \frac{1}{t-s} \int_s^t |h(u, \xi)| I(|h(u, \xi)| > c) du \leq \\
 & \leq \frac{2}{t-s} \int_s^t \mathbb{E}|h(u, \xi)| I(|h(u, \xi)| > c) du \leq \\
 & \leq 2 \sup_{u \in [a, b]} \mathbb{E}|h(u, \xi)| I(|h(u, \xi)| > c).
 \end{aligned}$$

Последняя оценка гарантирует равномерную интегрируемость семейства

$$\{g(s, t, \xi): s, t \in [a, b], s \neq t\}.$$

□

84. (а) Рассмотрим уравнение

$$Z_t = B_t + \int_0^t Z_s - dA_s,$$

где A_t и B_t — непрерывные справа (при $t \geq 0$) и имеющие пределы слева (при $t > 0$) функции (локально) ограниченной вариации.

Показать, что в классе локально ограниченных функций данное уравнение имеет и притом единственное решение $\mathcal{E}_t(A, B) + B_0 \mathcal{E}_t(A)$, где

$$\mathcal{E}_t(A, B) = \mathcal{E}_t(A) \int_0^t \frac{dB_s}{\mathcal{E}_s(A)},$$

а стохастическая экспонента $\mathcal{E}_t(A)$ определяется по формуле

$$\mathcal{E}_t(A) = e^{A_t - A_0} \prod_{0 < s \leq t} (1 + \Delta A_s) e^{-\Delta A_s}$$

при $\Delta A_t = A_t - A_{t-}$, $t > 0$, и $\Delta A_0 = 0$.

Замечание. Если A_t есть функция локально ограниченной вариации, то A_t может быть разрывной в не более чем счетном числе точек и при этом $\sum_{0 < s \leq t} |\Delta A_s| < \infty$ для всех $t > 0$. Следовательно, функции

$$\prod_{0 < s \leq t} (1 + \Delta A_s) \quad \text{и} \quad e^{-\sum_{0 < s \leq t} \Delta A_s}$$

корректно определены на $\mathbb{R}_+$ и также имеют (локально) ограниченную вариацию.

(b) Пусть при всех $t \geq 0$ выполняются неравенства

$$X_t \leq B_t + \int_0^t X_{s-} dA_s,$$

где $X = X_t$ — локально ограниченная функция, а функции $A = A_t$ и $B = B_t$ такие же, как и в п. (a). Предполагая, что A_t не убывает по t , установить *неравенство Гронуолла—Беллмана*

$$X_t \leq \mathcal{E}_t(A, B) + B_0 \mathcal{E}_t(A), \quad t \geq 0.$$

Решение. (a) Пусть $C_t = A_t - \sum_{0 < s \leq t} \Delta A_s$ — непрерывная компонента функции A_t . Тогда

$$\mathcal{E}_t(A) = e^{C_t - C_0} \prod_{0 < s \leq t} (1 + \Delta A_s),$$

а при $F_t = e^{C_t - C_0}$, $G_t = \prod_{0 < s \leq t} (1 + \Delta A_s)$, $t > 0$, и $G_0 = 1$ по формуле интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_t(A) &= F_t G_t = 1 + \int_0^t F_s dG_s + \int_0^t G_{s-} dF_s = \\ &= 1 + \sum_{0 < s \leq t} F_s G_{s-} \Delta A_s + \int_0^t G_{s-} F_s dC_s = 1 + \int_0^t \mathcal{E}_{s-}(A) dA_s. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что $B_0 \mathcal{E}_t(A)$ есть решение уравнения $Z_t = B_0 + \int_0^t Z_{s-} dA_s$. Вновь применяя формулу интегрирования по частям, при

$$\begin{aligned} H_t &= \int_0^t dB_s / \mathcal{E}_{s-}(A) \text{ получаем} \\ \mathcal{E}_t(A) H_t &= \int_0^t H_{s-} d\mathcal{E}_s(A) + \int_0^t \mathcal{E}_{s-}(A) dH_s = \\ &= \int_0^t H_{s-} F_s dG_s + \int_0^t H_{s-} G_{s-} dF_s + \int_0^t dB_s = \\ &= \sum_{0 < s \leq t} H_{s-} F_s G_{s-} \Delta A_s + \int_0^t H_{s-} F_s G_{s-} dC_s + B_t - B_0 = \\ &= B_t - B_0 + \int_0^t \mathcal{E}_{s-}(A) H_{s-} dA_s. \end{aligned}$$

Комбинируя полученные соотношения, видим, что функция

$$Z_t = \mathcal{E}_t(A, B) + B_0 \mathcal{E}_t(A)$$

является (локально ограниченным) решением уравнения

$$Z_t = B_0 + \int_0^t Z_s - dA_s, \quad t \geq 0.$$

Единственность решения данного уравнения можно установить как непосредственно, так и применяя *неравенство Гронуолла—Беллмана* из п. (b). В последнем случае надо лишь заметить, что для всех пар решений $(Z', Z'') = (Z'_t, Z''_t)$ выполняется неравенство

$$|Z'_t - Z''_t| \leq \int_0^t |Z'_{s-} - Z''_{s-}| d(A'_s + A''_s),$$

где неубывающие *обобщенные* функции распределения A'_t и A''_t таковы, что $A_t = A'_t - A''_t$, $t \geq 0$ (такое представление всегда можно построить для функций локально ограниченной вариации).

(b) Согласно п. (a) функция $Z = Z_t = \mathcal{E}_t(A, B) + B_0 \mathcal{E}_t(A)$ есть локально ограниченное решение уравнения $Z_t = B_t + \int_0^t Z_s - dA_s$. Положим $Y_s = X_s - Z_s$, $s \geq 0$, и фиксируем произвольное $t \geq 0$. Тогда, во-первых, $|Y_s| \leq M$ для некоторой константы $M > 0$ при всех $0 \leq s \leq t$ и, во-вторых,

$$\begin{aligned} Y_t &\leq \int_{[0,t]} Y_{t_1} - dA_{t_1} \leq \int_{[0,t]} dA_{t_1} \int_{[0,t_1]} Y_{t_2} - dA_{t_2} \leq \dots \\ &\dots \leq M \int_{[0,t]} dA_{t_1} \int_{[0,t_1]} dA_{t_2} \dots \int_{[0,t_{n-1}]} dA_{t_n}. \end{aligned}$$

Рассмотрим н. о. р. случайные величины $(\xi_i)_{i=1}^n$, принимающие значения в отрезке $[0, t]$, имеющие функцию распределения

$$F(s) = \frac{A_s - A_0}{A_t - A_0}, \quad 0 \leq s \leq t,$$

и заданные на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{[0,t]} dA_{t_1} \int_{[0,t_1]} dA_{t_2} \dots \int_{[0,t_{n-1}]} dA_{t_n} &= (A_t - A_0)^n P(\xi_1 > \xi_2 > \dots > \xi_n) = \\ &= \frac{(A_t - A_0)^n}{n!} \cdot P(\text{все } \xi_i \text{ различны, } 1 \leq i \leq n) \leq \frac{(A_t - A_0)^n}{n!} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Тем самым $Y_t \leq 0$ и, значит, $X_t \leq Z_t$ для каждого $t \geq 0$. $\square$

85. Пусть $f = f(x)$ — выпуклая функция, заданная на $\mathbb{R}$.

(а) Преобразование Лежандра функции f называется функция

$$g(y) = \sup_x [xy - f(x)].$$

Установить, что $g = g(y)$ есть выпуклая на $\mathbb{R}$ функция, преобразование Лежандра $\sup_y [xy - g(y)]$ которой есть не что иное, как $f = f(x)$.

Замечание. По определению функции $g = g(y)$ имеет место *неравенство Юнга*

$$xy \leq f(x) + g(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

(б) Доказать, что любая такая выпуклая функция f , что $f(-\infty) = 0$, представима в виде

$$f(x) = \int_{-\infty}^x h(u) du, \quad x \in \mathbb{R},$$

для некоторой неубывающей неотрицательной функции $h = h(u)$. Используя этот факт, найти явное выражение для $g(y) = \sup_x [xy - f(x)]$. В частности, установить, что если $f(x) = (x^+)^p/p$, $x \in \mathbb{R}$, для некоторого $p \geq 1$, то $g(y) = y^q/q$, $y \geq 0$, при $q = p/(p-1)$.

(с) Пусть X — случайная величина, $EX^- < \infty$ и $f(x) = E(x - X)^+$. Найти $g(y)$.

Решение. (а) Выпуклость функции g устанавливается прямой проверкой.

Как легко вывести из выпуклости функции f , в любой точке $x \in \mathbb{R}$ у f имеются правая $h_+(x)$ и левая $h_-(x)$ производные, причем $h_-(x)$ и $h_+(x)$ не убывают по x и $h_-(x) \leq h_+(x) \leq h_-(x+)$ для всех x . Следовательно, в точке $x_* = x_*(y)$ достигается максимум функции $xy - f(x)$ (y фиксировано) тогда и только тогда, когда $h_-(x_*) \leq y \leq h_+(x_*)$, причем $g(y) = \sup_x [xy - f(x)] = \infty$ при $y > h_+(\infty)$ или $y < h_-(-\infty)$.

Установим теперь, что $f(x) = \sup_y [xy - g(y)]$. Имеем

$$\sup_y [xy - g(y)] = f(x) + \sup_y [xy - f(x) - g(y)].$$

По определению $xy - f(x) - g(y) \leq 0$ при всех y . Выбирая далее в качестве y любое число из промежутка $[h_-(x), h_+(x)]$, получаем $xy - f(x) - g(y) = 0$ и, значит,

$$\sup_y [xy - f(x) - g(y)] = 0.$$

Тем самым мы доказали, что f есть преобразование Лежандра функции g .

(b) Докажем вспомогательную лемму.

Пусть функция $F = F(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, имеет правую производную $F'_+(x)$, неотрицательную на $[a, b]$. Тогда $F(a) \leq F(b)$.

Допустим, что $F(b) - F(a) < 0$ и, значит, $F(b) - F(a) < -\varepsilon(b - a)$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Рассмотрим непрерывную функцию $G(x) = F(x) - F(a) + \varepsilon(x - a)$. Имеем $G(a) = 0$, $G'_+(a) > 0$ и $G(b) < 0$. Следовательно, $G(x) > 0$ в малой правой окрестности точки $x = a$ и, тем самым, найдется такое $c \in (a, b)$, что $G(x) < 0$ на (c, b) и $G(c) = 0$. Но тогда с необходимостью $G'_+(c) = F'_+(c) + \varepsilon \leq 0$, что противоречит условию $F'_+(c) \geq 0$. Мы доказали, что $F(a) \leq F(b)$.

Если теперь взять в качестве h правую производную h_+ функции f , то (с учетом соотношения $h_+(u+) = h_+(u)$, $u \geq 0$) нетрудно установить, что правая производная по x функций

$$f(x) - \int_a^x h_+(u) du \quad \text{и} \quad \int_a^x h_+(u) du - f(x)$$

равна нулю для всех $x \geq a$ (a — фиксированное число) и, значит, с необходимостью имеет место тождество

$$f(x) - \int_a^x h_+(u) du \equiv f(a), \quad x \geq a.$$

Из условия $f(-\infty) = 0$ следует монотонность функции f и неотрицательность функции h_+ , так что интеграл Лебега $\int_{-\infty}^x h_+(u) du$ корректно определен. Для получения искомого представления функции f осталось перейти к пределу при $a \rightarrow -\infty$.

Перейдем к нахождению $g(y)$. Из п. (a) вытекает, что в тех точках x_0 и y_0 , в которых имеется производная функций $f(x)$ и $g(y)$, с необходимостью имеют место соотношения $f'(x_0) = y_0$ и $g'(y_0) = x_0$. Последнее по сути означает, что f' и g' должны быть взаимно обратными функциями. Из дополнительного условия $f(-\infty) = 0$ вытекает, что $f'(-\infty) = 0$, и, следовательно, $g(y) = \infty$ при $y < 0$. Прямой проверкой также получаем, что $g(0) = 0$.

Таким образом, естественным кандидатом на роль $g(y)$ при $y \geq 0$, когда $f(x) = \int_{-\infty}^x h(u) du$ для некоторой неубывающей функции h , является $\int_0^y h^{-1}(v) dv$, где h^{-1} — некоторый вариант обратной функции,

например $h^{-1}(v) = \inf\{u: h(u) \geq v\}$. Оптимизируя по x (с учетом соотношений $f'_-(u) = h(u-)$ и $f'_+ = h(u+)$), нетрудно видеть, что

$$\sup_x [xy - f(x)] = h^{-1}(y)y - \int_{-\infty}^{h^{-1}(y)} h(u) du.$$

Проверим, что

$$\int_0^y h^{-1}(v) dv = h^{-1}(y)y - \int_{-\infty}^{h^{-1}(y)} h(u) du.$$

По формуле интегрирования по частям имеем

$$h^{-1}(y)y = \int_0^y h^{-1}(v-) dv + \int_0^y v dh^{-1}(v).$$

Осталось заметить, что

$$\int_0^y h^{-1}(v-) dv = \int_0^y h^{-1}(v) dv \quad \text{и} \quad \int_0^y v dh^{-1}(v) = \int_{-\infty}^{h^{-1}(y)} h(u) du.$$

Если теперь $f(x) = \int_{-\infty}^x (u^+)^{p-1} du = (x^+)^p/p$, то согласно полученным формулам

$$g(y) = \int_0^y v^{1/(p-1)} dv = y^q/q, \quad y \geq 0.$$

(с) По теореме Фубини

$$E(x - X)^+ = E \int_{-\infty}^x I(X \leq u) du = \int_{-\infty}^x F(u) du,$$

где $F(u) = P(X \leq u)$, $u \in \mathbb{R}$. Тогда ввиду результата п. (b) имеем

$$g(y) = \int_0^y F^{-1}(z) dz = F^{-1}(y)y - E(F^{-1}(y) - X)^+. \quad \square$$

86. Пусть $f(x) = \sup_{\alpha} (a_{\alpha}^{\top} x + b_{\alpha})$ — конечная функция в выпуклой области $x \in C \subset \mathbb{R}^d$ для некоторых $a_{\alpha} \in \mathbb{R}^d$, $b_{\alpha} \in \mathbb{R}$, где α пробегает произвольное множество индексов.

(а) Доказать, что, каковы бы ни были $x, y \in C$, при всех λ , $0 < \lambda < 1$, выполняется неравенство

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Другими словами, функция f является выпуклой.

(b) Установить обратное к (b) утверждение, что любая выпуклая функция f на *открытой* выпуклой области C представима в виде $\sup_{\alpha}(a_{\alpha}^{\top}x + b_{\alpha})$.

(c) Показать, что всегда найдется такая не более чем счетная подсистема $\{(a_n, b_n)\}$ в $\{(a_{\alpha}, b_{\alpha})\}$, что

$$f(x) = \sup_n (a_n^{\top}x + b_n).$$

В частности, f есть борелевская функция.

(d) Пусть случайный вектор X лежит в замыкании C п. н. Убедиться, что если EX существует, то EX также лежит в замыкании области C и при этом имеет место *многомерное неравенство Йенсена*

$$f(EX) \leq Ef(X).$$

Замечание. С помощью п. (d) можно, например, дать иное доказательство неравенства Минковского, заметив, что функция $f(x, y) = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$ выпукла в области $C = \mathbb{R}^2$, когда $p \geq 1$.

Решение. (a) Утверждение устанавливается элементарной проверкой.

(b) Покажем, что, каковы бы ни были выпуклая функция $f = f(x)$ и точка $x_0 \in C$, найдется гиперплоскость вида $y = a^{\top}x + b$, проходящая через x_0 и такая, что

$$f(x) \geq a^{\top}x + b, \quad x \in C.$$

Это, конечно, обеспечит справедливость искомого представления. Пусть для простоты $(x_0, f(x_0))$ есть нулевой вектор. Из выпуклости функции f следует выпуклость *надграфика* $\Gamma = \{(x, y): y \geq f(x)\}$. Из выпуклости надграфика Γ уже вытекает выпуклость наименьшего *конуса* K , содержащего Γ , где

$$K = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda \Gamma = \bigcup_{\lambda \geq 0} \{(\lambda x, \lambda y): (x, y) \in \Gamma\}.$$

Рассмотрим какую-нибудь точку $A_0 = (x_0, y_0)$, $y_0 < f(x_0)$, которая, очевидно, в K не содержится. Конус K есть замкнутое множество, поэтому найдется точка $A_{\min}$ из K , ближайшая к A_0 среди всех точек множества K . Покажем, что гиперплоскость H , проходящая через $A_{\min}$ и перпендикулярная отрезку $A_0A_{\min}$, и есть искомая.

1. Имеем $(x_0, f(x_0)) \in H$. В самом деле, если это не так, то на луче, идущем от $(x_0, f(x_0))$ к $A_{\min}$ (этот луч целиком лежит в K и пересекает H в одной точке $A_{\min}$), в окрестности точки $A_{\min}$ можно будет выделить

точку, более близкую к A_0 по сравнению с $A_{\min}$. Последнее противоречит определению $A_{\min}$.

2. Все точки конуса K лежат по одну сторону от H . Действительно, в противном случае найдется точка A_1 из K , лежащая по ту же сторону от H , что и A_0 . Но тогда на отрезке $A_1A_{\min}$ (лежащем в K) в окрестности $A_{\min}$ опять можно будет выделить точку, более близкую к A_0 по сравнению с $A_{\min}$.

3. Гиперплоскость H задается уравнением вида $y - a^\top x - b = 0$, и при этом $f(x) - a^\top x - b \geq 0$, $x \in C$. В самом деле, H не может содержать ось значений функции f и поэтому с необходимостью имеет вид $y - a^\top x - b = 0$. Далее, конус K содержит график функции f и все точки (x, y) с достаточно большим y , откуда следует указанное неравенство.

(с) Пространство $\mathbb{R}^{d+1}$ сепарабельно, и, значит, то же верно для любого его подмножества. Поэтому из $\{(a_\alpha, b_\alpha)\}$ можно выделить счетную подсистему $\{(a_n, b_n)\}$, всюду плотную в $\{(a_\alpha, b_\alpha)\}$. Если теперь $(a_{n_k}, b_{n_k}) \rightarrow (a_\alpha, b_\alpha)$ для данного α и некоторых (n_k) , то для всех $x \in C$ по непрерывности имеем

$$a_\alpha^\top x + b_\alpha \leq \sup_k (a_{n_k}^\top x + b_{n_k}) \leq \sup_n (a_n^\top x + b_n) \leq f(x).$$

Осталось взять $\sup$ по α .

(d) Пусть $Z = X I(X \in C) + a I(X \notin C)$, где a — какой-нибудь элемент области C . Пусть $Z_1, Z_2, \dots$ — независимые копии Z . Тогда величины

$$\frac{Z_1 + Z_2}{2}, \quad \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{3} = \frac{2 \frac{Z_1 + Z_2}{2} + Z_3}{3},$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n Z_i}{n} = \frac{(n-1) \frac{\sum_{i=1}^{n-1} Z_i}{n-1} + Z_n}{n}$$

всегда лежат в C . Используя теперь усиленный закон больших чисел, замечаем, что п. н.

$$\frac{\sum_{i=1}^n Z_i}{n} \rightarrow EZ$$

и, значит, $n^{-1} \sum_{i=1}^n Z_i(\omega) \rightarrow EZ$ для некоторого $\omega \in \Omega$, т. е. EZ лежит в замыкании C . (Можно, конечно, обойтись только обычным законом

больших чисел.) Неравенство Йенсена следует из того, что

$$\begin{aligned} f(\mathbf{E}X) &= \sup_n (a_n^\top \mathbf{E}X + b_n) = \sup_n \mathbf{E}(a_n^\top X + b_n) \leq \\ &\leq \mathbf{E} \sup_n (a_n^\top X + b_n) = \mathbf{E}f(X). \quad \square \end{aligned}$$

87. Показать, что для $a, b \in \mathbb{R}$ и $r \geq 0$ имеют место так называемые c_r -неравенства:

$$|a + b|^r \leq c_r(|a|^r + |b|^r),$$

где $c_r = 1$ при $r < 1$ и $c_r = 2^{r-1}$ при $r \geq 1$.

Решение. При $r \geq 1$ указанное неравенство следует из свойства выпуклости функции $f(x) = |x|^r$, $x \in \mathbb{R}$:

$$\left| \frac{a+b}{2} \right|^r = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} = \frac{|a|^r + |b|^r}{2}.$$

При $0 \leq r < 1$ функция $g(x) = x^r$, $x \geq 0$, вогнута, возрастает и обращается в нуль при $x = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} |a + b|^r - |a|^r &= g(|a + b|) - g(|a|) \leq g(|a| + |b|) - g(|a|) \leq \\ &\leq g(|b|) - g(0) = |b|^r. \quad \square \end{aligned}$$

88. (Принцип неопределенности Вейля.) Пусть случайная величина ξ имеет гладкую плотность $f = f(x)$, причем

$$xf(x) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Доказать, что

$$\mathbf{E}\xi^2 \cdot \mathbf{E} \left| \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} \right|^2 \geq 1.$$

Решение. Утверждение следует из неравенства Коши—Буняковского:

$$1 = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} x f'(x) dx = -\mathbf{E}\xi \cdot \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} \leq \sqrt{\mathbf{E}\xi^2} \cdot \sqrt{\mathbf{E} \left| \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} \right|^2}. \quad \square$$

89. Пусть неотрицательные случайные величины ξ, η таковы, что

$$\mathbf{E}\xi^p \leq \mathbf{E}\xi^q \eta \quad \text{для некоторых } p > q > 1.$$

Доказать, что

$$\mathbf{E}\xi^p \leq \mathbf{E}\eta^{\frac{p}{p-q}}.$$

Решение. Утверждение следует из неравенства Гёльдера. $\square$

90. Пусть ξ и ζ — такие неотрицательные случайные величины, что для всякого $x > 0$ выполнено неравенство

$$P(\xi \geq x) \leq x^{-1} E\zeta I(\xi \geq x).$$

Показать, что тогда для всякого $p > 1$ выполнено неравенство

$$E\xi^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E\zeta^p.$$

Решение. По теореме Фубини

$$\begin{aligned} E\xi^p &= \int_{\mathbb{R}_+} px^{p-1} P(\xi > x) dx \leq \int_{\mathbb{R}_+} px^{p-2} E\zeta I(\xi \geq x) dx = \\ &= E\zeta \int_0^\xi px^{p-2} dx = \frac{p \cdot E\zeta \xi^{p-1}}{p-1}. \end{aligned}$$

Осталось воспользоваться оценкой из задачи II.6.89 с $\eta = \frac{p\zeta}{p-1}$. $\square$

91. Пусть X и Y — неотрицательные случайные величины, для которых найдутся такие $\alpha > 1$ и $\beta > 0$, что для всех $x > 0$ выполнено неравенство

$$P(X > \alpha x, Y \leq x) \leq \beta P(X > x).$$

Пусть также f — неотрицательная возрастающая функция, $f(0) = 0$ и

$$L_f(\alpha) := \sup_{x>0} \frac{f(\alpha x)}{f(x)} < \frac{1}{\beta}.$$

Доказать, что

$$Ef(X) \leq \frac{L_f(\alpha)}{1 - \beta L_f(\alpha)} \cdot Ef(Y),$$

в случае конечности $Ef(X)$ и $Ef(Y)$.

Решение. Поскольку $Ef(X) < \infty$, получаем, что

$$\begin{aligned} \beta Ef(X) &= \beta \int_{\mathbb{R}_+} P(X > x) df(x) \geq \int_{\mathbb{R}_+} P(X > \alpha x, Y \leq x) df(x) = \\ &= E \int_{\mathbb{R}_+} I(X > \alpha x, Y \leq x) df(x) \geq E \int_{\mathbb{R}_+} I(X > \alpha x) df(x) - \\ &\quad - E \int_{\mathbb{R}_+} I(Y > y) df(y) = Ef(\alpha^{-1}X) - Ef(Y) \geq \frac{Ef(X)}{L_f(\alpha)} - Ef(Y). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает искомая оценка. $\square$

92. Пусть X — случайная величина с функцией распределения $F = F(x)$, удовлетворяющей условию Липшица:

$$|F(x) - F(y)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

для некоторой константы $L > 0$. Показать, что X обладает плотностью $f = f(x)$ и для почти всех $x \in \mathbb{R}$ (по мере Лебега) выполняется неравенство $f(x) \leq L$.

Решение. Обозначим через P_X распределение случайной величины X , являющееся вероятностной мерой на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Покажем, что эта мера абсолютно непрерывна относительно меры Лебега λ , заданной на борелевских множествах.

В силу *регулярности* меры Лебега на $\mathbb{R}$ (см. задачу П.3.32) для любого такого множества $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, что $\lambda(B) = 0$, и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое открытое множество $B \subset G$, что $\lambda(G) \leq \varepsilon$. Любое открытое множество в $\mathbb{R}$ представимо в виде счетного объединения непересекающихся интервалов (a_n, b_n) , $n \geq 1$, поэтому

$$\begin{aligned} P_X(B) &\leq P_X\left(\bigcup_{n \geq 1} (a_n, b_n)\right) \leq \sum_{n \geq 1} [F(b_n) - F(a_n)] \leq \\ &\leq L \sum_{n \geq 1} [b_n - a_n] = L\lambda(G) \leq L\varepsilon. \end{aligned}$$

В силу произвольности ε заключаем, что $P_X(B) = 0$. Таким образом, $P_X \ll \lambda$, и по теореме Радона—Никодима X обладает плотностью $f = \frac{dP_X}{d\lambda}$.

Далее, используя регулярность меры P_X и упомянутое представление открытых множеств на $\mathbb{R}$, находим, что для любого $B \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \int_B f(x) d\lambda &= \inf\{P_X(G) : G \text{ открыто}, B \subset G\} \leq \\ &\leq \inf\{L\lambda(G) : G \text{ открыто}, B \subset G\} = L \int_B 1 d\lambda. \end{aligned}$$

Из этого следует ограниченность плотности f константой L . $\square$

93. (См. [100].) Пусть случайная величина ξ имеет унимодальную плотность распределения с максимумом в точке $m = 0$, которая не убывает слева и не возрастает справа от m . Такую точку максимума называют модой или вершиной распределения.

(а) Пусть g — четная возрастающая на $\mathbb{R}_+$ функция, и пусть $g(0) = 0$. Показать, что для всякого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$P(|\xi| > \varepsilon) \leq \left(\inf_{x > \varepsilon} \frac{1}{x - \varepsilon} \int_0^x g(z) dz \right)^{-1} E g(\xi). \quad (*)$$

В частности, при $g(x) = x^2$ верно *неравенство Гаусса*

$$P(|\xi| > \varepsilon) \leq \frac{4}{9} \frac{E\xi^2}{\varepsilon^2}.$$

(b) Пусть теперь m отлично от нуля. Показать, что неравенство (*) остается верным для всех достаточно больших $\varepsilon > 0$.

Решение. (a) Функция распределения F величины $|\xi|$ вогнута (так как плотность f этой величины убывает на $\mathbb{R}_+$), поэтому $F(x) \leq F(\varepsilon) + f(\varepsilon)(x - \varepsilon)$ при всех $x \geq 0$. Последнее означает, что $|\xi| \succcurlyeq \zeta\eta$, т. е.

$$P(|\xi| > x) \geq P(|\zeta\eta| > x), \quad x > 0,$$

где η, ζ таковы, что $P(\zeta = 0) = F(\varepsilon) - f(\varepsilon)\varepsilon$, $\zeta \in \{0, 1\}$, а η не зависит от ζ и имеет равномерное распределение на $[0, x^*]$, причем

$$1 = F(\varepsilon) + f(\varepsilon)(x^* - \varepsilon) \quad \text{или} \quad f(\varepsilon)x^* = P(\zeta = 1).$$

При этом мы считаем, что $f(\varepsilon)$ не равно нулю (иначе $P(|\xi| > \varepsilon) = 0$).

Из ограничений на g , формулы $E|X| = \int_{\mathbb{R}_+} P(|X| > x) dx$, а также условия $|\xi| \succcurlyeq \zeta\eta$ следует, что $g(\xi) \succcurlyeq g(\zeta\eta)$ и $Eg(\xi) \geq Eg(\zeta\eta)$. Доказательство завершает следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned} Eg(\zeta\eta) &= \frac{P(\zeta = 1)}{x^*} \int_0^{x^*} g(t) dt = \frac{1 - F(\varepsilon)}{x^* - \varepsilon} \int_0^{x^*} g(t) dt \geq \\ &\geq \inf_{x > \varepsilon} \frac{P(|\xi| > x)}{x - \varepsilon} \int_0^x g(z) dz. \end{aligned}$$

Для вывода неравенства Гаусса достаточно посчитать приведенную нижнюю грань при $g(x) = x^2$.

(b) Пусть $\varepsilon > m > 0$. Обозначим через F и f функцию распределения и плотность величины ξ соответственно. Тогда случайная величина ξ_0 с функцией распределения

$$F_0(x) = \begin{cases} F(x) \vee [F(\varepsilon) + f(\varepsilon)(x - \varepsilon)], & x \in [0, \varepsilon], \\ F(x) & \text{иначе} \end{cases}$$

является унимодальной с модой в нуле при $F(0) < F(\varepsilon) - f(\varepsilon)\varepsilon$, причем

$$\xi_0 \succcurlyeq \xi, \quad P(|\xi_0| > \varepsilon) = P(|\xi| > \varepsilon).$$

Отсюда и из п. (a) вытекает искомое утверждение. $\square$

94. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — н. о. р. случайные величины, $P(\xi_1 > 0) = 1$ и $D \ln \xi_1 = \sigma^2$. Показать, что для $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$P(\xi_1 \cdots \xi_n \leq (E\xi_1)^n e^{n\varepsilon}) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Решение. Утверждение вытекает из неравенства Чебышёва

$$P(|S_n - ES_n| \leq n\varepsilon) \geq 1 - \frac{DS_n}{n^2\varepsilon^2}$$

применительно к $S_n = \sum_{i=1}^n \ln \xi_i$, а также неравенства Йенсена $\ln E\xi_1 \geq E \ln \xi_1$. $\square$

95. Пусть P и Q — две вероятностные меры на $(\Omega, \mathcal{F})$. Установить эквивалентность следующих свойств:

(1) мера Q абсолютно непрерывна относительно P , и для некоторой константы $L \geq 1$ выполняется неравенство

$$\frac{dQ}{dP} \leq L \quad P\text{-п. н.};$$

(2) для некоторого $\alpha \in (0, 1]$ и вероятностной меры R имеет место представление

$$P = \alpha Q + (1 - \alpha)R.$$

Решение. В случае, когда $L = 1$ или $\alpha = 1$, меры P и Q совпадают и, значит, эквивалентность свойств (1) и (2) очевидна. Пусть, далее $L > 1$, и $\alpha \in (0, 1)$. Для установления импликации (1) $\Rightarrow$ (2) достаточно взять $\alpha = 1/L$ и положить

$$R(A) = \frac{1}{1-\alpha} \int_A \left(1 - \alpha \frac{dQ}{dP}\right) dP, \quad A \in \mathcal{F}.$$

Пусть теперь выполнено свойство (2). Проверим, что имеет место свойство (1). Поскольку $\alpha \in (0, 1)$, меры Q и R абсолютно непрерывны относительно P . При этом

$$\int_A dP = \int_A \left[\alpha \frac{dQ}{dP} + (1 - \alpha) \frac{dR}{dP} \right] dP$$

для всех $A \in \mathcal{F}$. Следовательно, P -п. н.

$$\alpha \frac{dQ}{dP} + (1 - \alpha) \frac{dR}{dP} = 1$$

и

$$1 - \alpha \frac{dQ}{dP} = (1 - \alpha) \frac{dR}{dP} \geq 0.$$

Иными словами, с необходимостью выполнено свойство (1) с константой $L = 1/\alpha$. $\square$

96. Пусть ξ и ζ — независимые случайные величины, причем $E\xi = 0$. Показать, что

$$E|\zeta| \leq E|\xi + \zeta|.$$

Обобщить это свойство, установив, что

$$E \max_{1 \leq i \leq n} |\zeta_i| \leq E \max_{1 \leq i \leq n} |\xi_i + \zeta_i|,$$

если $E\xi_i = 0$, $1 \leq i \leq n$, и семейства $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ и $\{\zeta_i\}_{i=1}^n$ независимы между собой.

Решение. Если $E|\zeta| = \infty$, то $E|\xi + \zeta| \geq E|\zeta| - E|\xi| = \infty$ (конечность $E|\xi|$ предполагается по условию). Допустим теперь, что $E|\zeta| < \infty$. Тогда $E|\xi + \zeta|$ также конечно. Из независимости ξ и η по теореме Фубини следует, что

$$E|\xi + \zeta| = EE|\xi + y|_{y=\zeta} \geq E|E\xi + y|_{y=\zeta} = E|\zeta|.$$

Аналогично выводится второе неравенство. $\square$

97. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — н. о. р. ограниченные случайные величины, $EX_1 = 0$, а

$$S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad n \geq 1.$$

Доказать, что для всякого $p > 0$ выполняется равенство

$$E|S_n|^p = O(n^{p/2}).$$

Решение. Поскольку

$$\sqrt[p]{E|S_n|^p} \leq \sqrt[p]{ES_n^{2m}}$$

для всякого целого $m \geq p$, достаточно доказать, что

$$ES_n^{2m} = O(n^m).$$

Допустим вначале, что $X_1 \stackrel{d}{=} -X_1$. Тогда $EX_i^l = 0$ для нечетного (целого) числа $l \geq 1$ и, значит, для всякого целого $m \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} ES_n^{2m} &= \sum_{m_1 + \dots + m_n = m} \frac{(2m)!}{(2m_1)! \dots (2m_n)!} EX_1^{2m_1} \dots EX_n^{2m_n} \leq \\ &\leq \frac{(2m)!}{m! 2^m} \sum_{m_1 + \dots + m_n = m} \frac{m!}{m_1! \dots m_n!} \prod_{i=1}^n EX_i^{2m_i} = \\ &= \frac{(2m)!}{m! 2^m} E(X_1^2 + \dots + X_n^2)^m = O(n^m), \end{aligned}$$

где мы также учли, что $m_i! 2^{m_i} \leq (2m_i)!$.

Если распределение X_1 не симметрично, то равенство $\mathbf{E}S_n^{2m} = O(n^m)$ проверяется по индукции. А именно, $\mathbf{E}S_n^2 = n\mathbf{E}X_1^2 = O(n)$ при $m = 1$. Далее, если указанное соотношение выполнено при всех $m < M$, то $\mathbf{E}S_n^{2m-1} = O(n^{m-1/2})$ для тех же m . В самом деле,

$$|\mathbf{E}S_n^{2m-1}| \leq |\mathbf{E}S_n^{2m}|^{(2m-1)/(2m)} = O(n^{m-1/2}).$$

Пусть теперь $(Y_n)_{n \geq 1}$ — независимая копия $(X_n)_{n \geq 1}$ и $T_n = Y_1 + \dots + Y_n$. Тогда

$$\mathbf{E}(S_n - T_n)^{2M} = 2\mathbf{E}S_n^{2M} - 4M\mathbf{E}S_n \mathbf{E}S_n^{2M-1} + R_M^{(n)},$$

где остаток $R_M^{(n)}$ есть $O(n^M)$ по предположению индукции,

$$\mathbf{E}(S_n - T_n)^{2M} = O(n^M)$$

в силу симметричности величин $X_i - Y_i$ и равенства $\mathbf{E}S_n \mathbf{E}S_n^{2M-1} = 0$. Таким образом, мы доказали, что $\mathbf{E}S_n^{2M} = O(n^M)$, тем самым проверив шаг индукции. $\square$

98. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — н. о. р. случайные величины. Положим $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Определим рекуррентным образом следующие *лестничные индексы* (называемые также *лестничными моментами*):

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_k = \inf\{n > \tau_{k-1} : S_n - S_{\tau_{k-1}} > 0\}, \quad k \geq 1,$$

полагая, как всегда, $\inf \emptyset = \infty$. Ясно, что для всех $n \geq 1$ выполняется равенство

$$\mathbf{P}(\tau_1 = n) = \mathbf{P}(S_1 \leq 0, \dots, S_{n-1} \leq 0, S_n > 0).$$

Показать, что производящая функция $G(s) = \sum_{n \geq 1} \mathbf{P}(\tau_1 = n) s^n$ случайной величины τ_1 задается формулой

$$G(s) = 1 - \exp \left\{ - \sum_{n \geq 1} \frac{\mathbf{P}(S_n > 0)}{n} s^n \right\}, \quad |s| < 1.$$

(См. задачу II.12.9.)

Решение. Утверждение вытекает из задачи II.12.9. $\square$

Замечание. С помощью лестничных индексов можно задать величину

$$M = \sup\{0, S_1, S_2, \dots\}.$$

А именно, $M = \sup\{S_{\tau_i} : \tau_i < \infty\}$. В силу задачи II.5.9 величины $S_{\tau_1}, S_{\tau_2} - S_{\tau_1}, \dots, S_{\tau_n} - S_{\tau_{n-1}}$ ($n \geq 1$) независимы и одинаково распределены при условии $\tau_n < \infty$, а их условное распределение п. н. совпадает с $\text{Law}(S_{\tau_1} | \tau_1 < \infty)$; здесь и далее рассматривается случай

$0 < P(\tau_1 < \infty) < 1$ (в частности, в этом случае $\sup\{i : \tau_i < \infty\} = \infty$ п. н.). Пусть $(Z_n)_{n \geq 1}$ — н. о. р. положительные случайные величины,

$$\text{Law}(Z_1) = \text{Law}(S_{\tau_1} | \tau_1 < \infty).$$

Тогда для всех $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$\begin{aligned} P(M \leq x) &= P(\tau_1 = \infty)I(0 \leq x) + \sum_{n \geq 1} P(S_{\tau_n} \leq x, \tau_n < \infty, \tau_{n+1} = \infty) = \\ &= P(\tau_1 = \infty) \left[I(0 \leq x) + \sum_{n \geq 1} P\left(\sum_{i=1}^n Z_i \leq x\right) [P(\tau_1 < \infty)]^n \right], \end{aligned}$$

где мы также учли, что (в силу задачи II.5.9)

$$\begin{aligned} P(\tau_n < \infty, \tau_{n+1} = \infty) &= \\ &= P(\{\tau_i - \tau_{i-1} < \infty, 1 \leq i \leq n\} \cap \{\tau_{n+1} - \tau_n = \infty\}) = \\ &= P(\tau_{n+1} - \tau_n = \infty) \prod_{i=1}^n P(\tau_i - \tau_{i-1} < \infty) = \\ &= P(\tau_1 = \infty) [P(\tau_1 < \infty)]^n. \end{aligned}$$

В частности, при $p > 0$ имеем

$$EM^p = P(\tau_1 = \infty) \sum_{n \geq 1} E\left(\sum_{i=1}^n Z_i\right)^p [P(\tau_1 < \infty)]^n,$$

Поскольку

$$E\left|\sum_{i=1}^n Z_i\right|^p \leq n^p E \max_{i \leq n} Z_i^p \leq n^{p+1} EZ_1^p \quad \text{при } EZ_1^p = E(S_{\tau_1}^p | \tau_1 < \infty) < \infty,$$

получаем, что

$$EM^p < \infty \Leftrightarrow ES_{\tau_1}^p I(\tau_1 < \infty) < \infty$$

при условии, что $0 < P(\tau_1 < \infty) < 1$.

99. Положим (в обозначениях и условиях предыдущей задачи)

$$A = \sum_{n \geq 1} \frac{P(S_n \leq 0)}{n}, \quad B = \sum_{n \geq 1} \frac{P(S_n > 0)}{n}.$$

Показать, что

$$P(\tau_1 < \infty) = \begin{cases} 1, & \text{если } B = \infty, \\ 1 - e^{-B}, & \text{если } B < \infty. \end{cases}$$

Доказать также, что

$$E\tau_1 = \begin{cases} e^A, & \text{если } A < \infty, \\ \infty, & \text{если } A = \infty. \end{cases}$$

Решение. Согласно задаче II.6.98 имеем $P(\tau_1 < \infty) = G(1) = 1 - e^{-B}$. Далее, в силу задачи II.6.48 справедливо соотношение

$$\frac{1 - G(s)}{1 - s} \uparrow E\tau_1, \quad s \uparrow 1.$$

Явным подсчетом получаем (используя формулу из задачи II.6.98), что

$$\begin{aligned} \ln \frac{1 - G(s)}{1 - s} &= \ln[1 - G(s)] - \ln(1 - s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} [1 - P(S_n > 0)] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} P(S_n \leq 0), \end{aligned}$$

где последняя величина, очевидно, возрастает до A при $s \uparrow 1$. $\square$

100. В условиях задачи II.6.98 показать, что $E\tau_1 < \infty$, если $EX_1 > 0$.

Решение. С учетом предыдущей задачи видим, что $E\tau_1 < \infty$, когда ряд $\sum_{n \geq 1} n^{-1} P(S_n \leq 0)$ сходится. Докажем эту сходимост. При $n \geq 1$ положим

$$Y_n = X_n - EX_n \quad \text{и} \quad T_n = \sum_{k=1}^n Y_k I(|Y_k| < n).$$

Тогда

$$P(S_n \leq 0) \leq P(|S_n - ES_n| \geq nEX_1) \leq P(|T_n| \geq nEX_1) + P\left(\bigcup_{k=1}^n \{|Y_k| \geq n\}\right).$$

Далее, в силу одинаковой распределенности величин Y_k имеем

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} P\left(\bigcup_{k=1}^n \{|Y_k| \geq n\}\right) \leq \sum_{n \geq 1} P(|Y_1| \geq n) \leq E|Y_1|.$$

Поскольку $ET_n = -nEY_1 I(|Y_1| \geq n)$ (так как $EY_k = 0$), получаем, что

$$P(|T_n| \geq nEX_1) \leq P(|T_n - ET_n| \geq nEX_1/2) + P(|EY_1 I(|Y_1| \geq n)| \geq EX_1/2),$$

где второе слагаемое, очевидно, равно нулю при больших n . Доказательство завершает следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned}
 (EX_1)^2 \sum_{n \geq 1} \frac{P(|T_n - ET_n| \geq nEX_1/2)}{n} &\leq 4 \sum_{n \geq 1} \frac{D(Y_1 I(|Y_1| < n))}{n^2} \leq \\
 &\leq 4 \sum_{n \geq 1} \frac{EY_1^2 I(|Y_1| < n)}{n^2} = 4 \sum_{k \geq 1} EY_1^2 I(k-1 \leq |Y_1| < k) \sum_{n \geq k} \frac{1}{n^2} \leq \\
 &\leq 8 \sum_{k \geq 1} E|Y_1| I(k-1 \leq |Y_1| < k) = 8E|Y_1|. \quad \square
 \end{aligned}$$

101. Пусть $X, X_1, X_2, \dots$ — н. о. р. случайные величины. Положим $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $M_n = \max\{0, S_1, \dots, S_n\}$, $M = \sup\{0, S_1, S_2, \dots\}$.

(а) Показать, что $M_n \stackrel{d}{=} (M_{n-1} + X)^+$, $n \geq 1$, и

$$EM_n = \sum_{k=1}^n \frac{ES_k^+}{k}.$$

Замечание. Приведенное соотношение можно получить дифференцированием по t более общего *тождества Спичера*:

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n Ee^{itM_n} = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} Ee^{itS_n^+} \right\}$$

для всякого $0 < s < 1$.

(b) Показать, что если $S_n \rightarrow -\infty$ п. н., то $M \stackrel{d}{=} (M + X)^+$.

(с) Показать, что если $-\infty < EX < 0$ и $EX^2 < \infty$, то

$$EX = -E(M + X)^- \quad \text{и} \quad EM = \frac{EX^2 - E[(M + X)^-]^2}{-2EX}.$$

Решение. (а) В силу того что

$$(X_2, \dots, X_n, X_1) \stackrel{d}{=} (X_1, \dots, X_{n-1}, X),$$

имеем

$$M_n = 0 \vee [X_1 + \max\{0, X_2, X_2 + X_3, \dots, X_2 + \dots + X_n\}] \stackrel{d}{=} 0 \vee [X + M_{n-1}].$$

Далее, пользуясь тем, что

$$\begin{aligned}
 M_n &= I(S_n > 0)M_n + \mathbf{1}(S_n \leq 0)M_{n-1}, \\
 E I(S_n > 0)M_n &= E I(S_n > 0) \max\{S_1, \dots, S_n\} = \\
 &= E I(S_n > 0)X_1 + E I(S_n > 0)M_{n-1}
 \end{aligned}$$

и $E/(S_n > 0)X_1 = n^{-1}ES_n^+$, последовательно находим, что

$$\begin{aligned} EM_n &= \frac{ES_n^+}{n} + EM_{n-1} = \frac{ES_n^+}{n} + \left[\frac{ES_{n-1}^+}{n-1} + EM_{n-2} \right] = \dots \\ &\dots = \sum_{k=2}^n \frac{ES_k^+}{k} + EM_1 = \sum_{k=1}^n \frac{ES_k^+}{k}. \end{aligned}$$

(b) Поскольку $S_n \rightarrow -\infty$ п. н., получаем, что $M_n \uparrow M < \infty$ п. н. Переходя к пределу по n в равенстве $M_n \stackrel{d}{=} (M_{n-1} + X)^+$ (с учетом того, что из сходимости п. н. следует сходимость по распределению), получаем $M \stackrel{d}{=} (M + X)^+$.

(c) Если $EM < \infty$, то ввиду п. (b) получаем

$$EM = E[(M + X) + (M + X)^-] = EM + EX + E(M + X)^-$$

или

$$EX = -E(M + X)^-.$$

Кроме того, при $EM^2 < \infty$ имеем

$$\begin{aligned} EM^2 &= E[(M + X) + (M + X)^-]^2 = \\ &= EM^2 + 2EMX + EX^2 + 2E(M + X)(M + X)^- + E[(M + X)^-]^2 = \\ &= EM^2 + 2EM \cdot EX + EX^2 - E[(M + X)^-]^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует соотношение

$$-2EM \cdot EX = EX^2 - E[(M + X)^-]^2,$$

которое эквивалентно искомому равенству.

Пусть теперь $EM^2 = \infty$. Рассмотрим н. о. р. величины

$$X_n^{ab} = X_n I(-a \leq X_n \leq b), \quad a, b > 0, \quad n \geq 1.$$

Положим также

$$S_n^{ab} = \sum_{i=1}^n X_i^{ab} \quad \text{и} \quad M^{ab} = \sup\{0, S_1^{ab}, S_2^{ab}, \dots\}.$$

При достаточно больших $a, b > 0$ среднее EX_n^{ab} отрицательно. Если окажется, что $E(M^{ab})^2 < \infty$ при достаточно больших $a, b > 0$, то, как и выше, получим

$$EM^{ab} = \frac{E(X^{ab})^2 - E[(M^{ab} + X^{ab})^-]^2}{-2EX^{ab}}.$$

Но тогда при $a \rightarrow \infty$ имеем

$$M^{ab} \downarrow M^b \quad \text{и} \quad EM^b = \frac{E(X^b)^2 - E[(M^b + X^b)^-]^2}{-2EX^b},$$

где по аналогии $X_n^b = X_n I(X_n \leq b)$, а правая часть равенства сходится по теореме Лебега о мажорируемой сходимости (так как $(X^{ab})^2 \leq X^2$, $[(M^{ab} + X^{ab})^-]^2 \leq X^2$ и $EX^2 < \infty$). Далее, переходя к пределу при $b \rightarrow \infty$, найдем, что

$$M^b \uparrow M \quad \text{и} \quad EM = \frac{EX^2 - E[(M + X)^-]^2}{-2EX} (< \infty).$$

Итак, достаточно доказать, что $EM^2 < \infty$ для таких ограниченных величин X , что $EX < 0$. Как и в решении задачи II.6.100, из неравенства $EX < 0$ следует, что

$$\sum_{n \geq 1} \frac{P(S_n > 0)}{n} < \infty,$$

и, значит, $P(\tau_1 < \infty) < 1$ при $\tau_1 = \inf\{n \geq 1 : S_n > 0\}$, где мы полагаем $\inf \emptyset = \infty$ (см. задачу II.6.99). Тем самым (вследствие замечания к задаче II.6.98) $EM^2 < \infty$, когда $ES_{\tau_1}^2 I(\tau_1 < \infty) < \infty$. Далее имеем

$$ES_{\tau_1}^2 I(\tau_1 < \infty) = \sum_{n \geq 1} ES_n^2 I(\tau_1 = n) \leq \sum_{n \geq 1} ES_n^2 I(S_n > 0).$$

Иначе говоря, $ES_{\tau_1}^2 I(\tau_1 < \infty) < \infty$, если

$$\sum_{n \geq 1} ES_n^2 I(S_n > 0) < \infty.$$

Имеем

$$\begin{aligned} ES_n^2 I(S_n > 0) &\leq \sqrt{ES_n^4} \sqrt{P(S_n - nEX > n|EX|)} \leq \\ &\leq \sqrt{ES_n^4} \sqrt{\frac{E(S_n - nEX)^{20}}{n^{20}|EX|^{20}}} = O(n^2) \sqrt{O(n^{-10})} = O(n^{-3}), \end{aligned}$$

где мы также учли, что $E(S_n - nEX)^{20} = O(n^{10})$ (см. задачу II.6.97). Отсюда следует, что ряд $\sum_{n \geq 1} n ES_n^2 I(S_n > 0)$ сходится и, таким образом, $EM^2 < \infty$. $\square$

102. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность независимых равномерных распределенных на $[0, 1]$ случайных величин. Положим

$$\nu = \inf\{n \geq 2 : \xi_n > \xi_{n-1}\}, \quad \mu(x) = \inf\{n \geq 1 : \xi_1 + \dots + \xi_n > x\},$$

где $0 < x \leq 1$. Показать, что

$$(a) P(\mu(x) > n) = x^n/n!, \quad n \geq 1;$$

$$(b) \nu \stackrel{d}{=} \mu(1);$$

$$(c) E\nu = E\mu(1) = e.$$

Решение. (a) При $x \in (0, 1]$ вероятность $P(\mu(x) > n) = P(\xi_1 + \dots + \xi_n \leq x)$ равна объему n -мерного симплекса $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n : x_1 + \dots + x_n < x\}$, т. е. $x^n/n!$ (считается данный объем тем же способом, что и в задаче II.8.82).

(b) Вследствие симметрии величин $\xi_1, \dots, \xi_n$, а также условия $P(\xi_1 = x) = 0, x \in \mathbb{R}$, вероятность $P(\xi_1 > \xi_2 > \dots > \xi_n)$ равна $1/n!$. Отсюда с учетом п. (a) получаем

$$P(\nu > n) = P(\xi_1 > \xi_2 > \dots > \xi_n) = P(\mu(1) > n).$$

$$(c) \text{ Имеем } E\mu(1) = E\nu = \sum_{n \geq 0} P(\nu > n) = \sum_{n \geq 0} 1/n! = e. \quad \square$$

103. Показать, что при любом $\lambda > 0$ преобразование Буля

$$x \rightarrow x - \frac{\lambda}{x} \quad (x \neq 0)$$

сохраняет меру Лебега на $\mathbb{R}$, т. е. для любой интегрируемой на $\mathbb{R}$ функции f выполняется равенство

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f\left(x - \frac{\lambda}{x}\right) dx.$$

Решение. Пусть вначале $\lambda = 1$. Тогда искомого соотношения вытекает из следующих равенств, верных для любой функции f , интегрируемой на $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx &= \int_{-\infty}^0 f\left(y - \frac{1}{y}\right) \frac{dy}{y^2}, \\ \int_{\mathbb{R}} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx &= \int_{-\infty}^0 f\left(y - \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{y^2}\right) dy = \int_{\mathbb{R}} f(z) dz. \end{aligned}$$

Пусть теперь λ — произвольное положительное число. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f\left(x - \frac{\lambda}{x}\right) dx &= \int_{\mathbb{R}} f\left(\sqrt{\lambda}x - \frac{\sqrt{\lambda}}{x}\right) \sqrt{\lambda} dx = \int_{\mathbb{R}} f(\sqrt{\lambda}x) \sqrt{\lambda} dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) dx. \quad \square \end{aligned}$$

104. Пусть $f = f(x)$ — выпуклая неубывающая функция, $f(-\infty) = 0$. Пользуясь тем фактом, что любая выпуклая функция f почти всюду

имеет неубывающую производную f' , показать, что

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} (x-u)^+ df'(u),$$

где $x^+ = x \vee 0$, а интеграл по df' — это интеграл Лебега—Стилтьеса (производную f' можно выбрать непрерывной справа).

Решение. При $c > 0$ имеем

$$\int_{-c}^{\infty} (x-u)^+ df'(u) = \int_{-c}^x (x-u) df'(u) = \int_{-c}^x f'(u) du - (x+c)f'(-c).$$

Из неотрицательности левой части последнего равенства вытекает, что для $x > -c$ выполняются неравенства

$$0 \leq (x+c)f'(-c) \leq \int_{-c}^x f'(u) du = f(x) - f(-c) \leq f(x),$$

где мы также применили теорему Лебега, гарантирующую для непрерывной монотонной функции f справедливость равенства

$$\int_a^b f'(u) du = f(b) - f(a).$$

Отсюда следует, что $f'(-c) = o(1)$, $cf'(-c) = o(1)$ при $c \rightarrow \infty$. Теперь легко установить искомое соотношение. $\square$

105. Пусть $E|\xi| < \infty$. Показать, что

$$E\xi^2 I(|\xi| \leq n) = o(n), \quad n \rightarrow \infty.$$

Решение. Имеем

$$E\xi^2 I(|\xi| \leq n) \leq 2 \int_0^n xP(|\xi| > x) dx = o(n), \quad n \rightarrow \infty,$$

так как $xP(|\xi| > x) \leq E|\xi| I(|\xi| > x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$. $\square$

106. (См. [50].) Пусть ξ — случайная величина. Пусть также функция $f = f(x)$ не убывает на $\mathbb{R}$, причем выражение $x - f(x) + Ef(\xi) - E\xi$ меняет свой знак единственный раз с «−» на «+», когда x пробегает от $-\infty$ до ∞ . Доказать, что для любой непрерывной выпуклой на $\mathbb{R}$ функции g справедливы неравенства

$$\begin{aligned} Eg(f(\xi) - Ef(\xi)) &\leq Eg(\xi - E\xi), \\ g(E\xi) &\leq Eg(f(\xi) - Ef(\xi) + E\xi) \leq Eg(\xi). \end{aligned}$$

Предполагается, что все приведенные математические ожидания существуют.

Решение. Обозначим $h(x) = f(x) - Ef(\xi) + E\xi$. Из выпуклости функции g следует, что

$$g(x) - g(h(x)) \geq g'(h(x)) (x - h(x)),$$

где g' — правая производная функции g . По условию существует x_0 , для которого

$$x - h(x) \leq 0, \quad x < x_0, \quad x - h(x) \geq 0, \quad x \geq x_0.$$

Поскольку g' и h не убывают, имеем

$$g'(h(x)) \leq g'(h(x_0)), \quad x < x_0, \quad g'(h(x)) \geq g'(h(x_0)), \quad x \geq x_0.$$

Отсюда следует, что $g(x) - g(h(x)) \geq g'(h(x_0)) (x - h(x))$ и

$$Eg(\xi) - Eg(h(\xi)) \geq g'(h(x_0)) (E\xi - Eh(\xi)) = 0.$$

Кроме того, по неравенству Йенсена $Eg(h(\xi)) \geq g(Eh(\xi)) = g(E\xi)$. $\square$

107. Пусть f — произвольная функция, для которой

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

(а) Доказать, что для любой такой случайной величины ξ , что $E\xi^2 < \infty$, выполняется неравенство

$$Df(\xi) \vee |E\xi f(\xi) - E\xi \cdot Ef(\xi)| \leq D\xi.$$

(б) Вывести из задачи II.6.106, что для неубывающей функции f и такой случайной величины ξ , что $E|\xi|^p < \infty$, $p \geq 1$, выполняется неравенство

$$E|f(\xi) - Ef(\xi)|^p \leq E|\xi - E\xi|^p.$$

Решение. (а) Пусть ζ — независимая копия величины ξ . Тогда, как легко проверить,

$$D\xi = E \frac{(\xi - \zeta)^2}{2}, \quad E\xi f(\xi) - E\xi \cdot Ef(\xi) = E(\xi - \zeta) \frac{f(\xi) - f(\zeta)}{2}.$$

Поэтому

$$Df(\xi) = E \frac{|f(\xi) - f(\zeta)|^2}{2} \leq E \frac{(\xi - \zeta)^2}{2} = D\xi,$$

$$|E\xi f(\xi) - E\xi \cdot Ef(\xi)| \leq E|\xi - \zeta| \frac{|f(\xi) - f(\zeta)|}{2} \leq E \frac{(\xi - \zeta)^2}{2} = D\xi.$$

(б) В задаче II.6.106 следует взять $g(x) = |x|^p$. $\square$

§ 7. Условные вероятности и математические ожидания относительно σ -алгебр

1. Пусть случайная величина X и σ -алгебра $\mathcal{G}$ не зависят (в совокупности) от σ -алгебры $\mathcal{E}$, причем $E|X| < \infty$. Показать, что п. н.

$$E(X|\mathcal{G} \vee \mathcal{E}) = E(X|\mathcal{G}).$$

Убедиться на примере, что одной независимости X от $\mathcal{E}$ *недостаточно* для выполнения последнего равенства.

Решение. Поскольку $E(X|\mathcal{G})$ есть $\mathcal{G} \vee \mathcal{E}$ -измеримая случайная величина, а σ -алгебра $\mathcal{G} \vee \mathcal{E}$ порождается множествами вида $D = BC$, где $B \in \mathcal{G}$ и $C \in \mathcal{E}$, достаточно (для всех таких D) установить равенство $E|_D X = E|_D E(X|\mathcal{G})$. Последнее вытекает из независимости $\sigma(X) \vee \mathcal{G}$ и $\mathcal{E}$:

$$E|_{BC} X = E|_B X E|_C = E|_B E(X|\mathcal{G}) E|_C = E|_{BC} E(X|\mathcal{G}).$$

Пусть теперь события A, B, C, D равновероятны ($P(A) = 1/4$) и образуют разбиение множества Ω . Тогда $X = I_{A \cup D}$ не зависит от $Y = I_{A \cup B}$, а также от $Z = I_{A \cup C}$. В частности,

$$E(X|Y) = EX = \frac{1}{2}.$$

Однако $X = Y \vee Z + (1 - Y) \vee (1 - Z)$ и $E(X|Y, Z) = X$ п. н. □

2. Будем говорить, что σ -алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ условно независимы относительно σ -алгебры $\mathcal{C}$, если $P(AB|\mathcal{C}) = P(A|\mathcal{C})P(B|\mathcal{C})$ для всех $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{B}$.

Показать, что условная независимость $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ относительно $\mathcal{C}$ равносильна выполнению (Р-п. н.) любого из следующих условий:

(1) $P(A|\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) = P(A|\mathcal{C})$ для всех $A \in \mathcal{A}$ (здесь и далее $\mathcal{B} \vee \mathcal{C} = \sigma(\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$);

(2) $E(X|\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) = E(X|\mathcal{C})$ для любой $\mathcal{A}$ -измеримой величины X , $E|X| < \infty$;

(3) $P(A|\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) = P(A|\mathcal{C})$ для любого множества A из системы $\mathcal{P}_a$ подмножеств, образующих π -систему и таких, что $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{P}_a)$;

(4) $P(AB|\mathcal{C}) = P(A|\mathcal{C})P(B|\mathcal{C})$ для любых множеств A и B из π -систем $\mathcal{P}_a$ и $\mathcal{P}_b$ соответственно, удовлетворяющих условиям $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{P}_a)$ и $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{P}_b)$.

Решение. Очевидно, (2) $\Rightarrow$ (1) (следует взять $X = I_A$) и (1) $\Rightarrow$ (3). Для проверки импликации (3) $\Rightarrow$ (1) надо воспользоваться *принципом подходящих множеств* (применяя теорему о π - λ -системах, см. теоре-

му 2 в В1.П.2). Точно так же устанавливается эквивалентность условия (4) и условной независимости $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ относительно $\mathcal{C}$.

Далее, для доказательства импликации (1) $\Rightarrow$ (2) достаточно проверить условие (2) для простых величин X и перейти к пределу (воспользовавшись теоремой Лебега о мажорируемой сходимости для условных математических ожиданий). Таким образом получается, что (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) и (4) $\Leftrightarrow$ (условная независимость $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$).

Из условия (1) следует условная независимость $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ относительно $\mathcal{C}$. Действительно, для всех $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{B}$ имеем

$$\begin{aligned} P(AB|\mathcal{C}) &= E(I_A I_B | \mathcal{C}) = E(E[I_A I_B | \mathcal{B} \vee \mathcal{C}] | \mathcal{C}) = \\ &= E(I_B E[I_A | \mathcal{B} \vee \mathcal{C}] | \mathcal{C}) = E(I_B E[I_A | \mathcal{C}] | \mathcal{C}) = P(A|\mathcal{C}) P(B|\mathcal{C}). \end{aligned}$$

Обратно: условная независимость $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ относительно $\mathcal{C}$ гарантирует, что

$$\begin{aligned} E_{BC} I_A &= E_C E[I_{AB} | \mathcal{C}] = E_C E[I_A | \mathcal{C}] E[I_B | \mathcal{C}] = \\ &= E E_{BC} E[I_A | \mathcal{C}] | \mathcal{C}) = E_{BC} P(A|\mathcal{C}) \quad (*) \end{aligned}$$

для всех $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$, $C \in \mathcal{C}$. Система множеств

$$\mathcal{P}_{bc} = \{BC : B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}\}$$

образует π -систему, порождающую $\mathcal{B} \vee \mathcal{C}$. Применяя принцип подходящих множеств и упомянутую теорему о π - λ -системах, нетрудно показать, что из соотношения (*) следует справедливость равенства

$$E_{D} I_A = E_{D} P(A|\mathcal{C})$$

для всех $D \in \mathcal{B} \vee \mathcal{C}$ (и $A \in \mathcal{A}$), откуда уже вытекает, что $P(A|\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) = P(A|\mathcal{C})$ п. н. $\square$

3. Пусть $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^n$ — независимые случайные векторы (в $\mathbb{R}^2$). Доказать, что условно на $\mathcal{G}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ величины $X_1, \dots, X_n$ также являются независимыми, причем $\text{Law}(X_i | \mathcal{G}_n) = \text{Law}(X_i | Y_i)$ п. н. при всех $1 \leq i \leq n$.

Решение. Требуется установить, что для любых борелевских множеств B_i , $1 \leq i \leq n$, с вероятностью единица выполняются равенства

$$P\left(\bigcap_i \{X_i \in B_i\} | \mathcal{G}_n\right) = \prod_i P(X_i \in B_i | \mathcal{G}_n) = \prod_i P(X_i \in B_i | Y_i). \quad (*)$$

Последнее равенство следует из задачи П.7.1, того факта, что $\mathcal{G}_n = \sigma(Y_i) \vee \sigma(Y_j, j \neq i)$, а также независимости $I(X_i \in B_i)$ и $\sigma(Y_j, j \neq i)$.

Далее, поскольку $\mathcal{G}_n$ порождается событиями вида $D = \bigcap_i \{Y_i \in C_i\}$ с борелевскими множествами C_i , $1 \leq i \leq n$, для доказательства первого равенства в формуле (*) достаточно для всех таких D показать, что

$$E I_D \prod_i I_{B_i}(X_i) = E I_D \prod_i P(X_i \in B_i | \mathcal{G}_n).$$

С учетом равенства $I_D = \prod_i I_{C_i}(Y_i)$ (см. также задачу II.7.1) имеем

$$\begin{aligned} E \prod_i I_{B_i}(X_i) I_{C_i}(Y_i) &= \prod_i E I_{B_i}(X_i) I_{C_i}(Y_i) = \prod_i E I_{C_i}(Y_i) P(X_i \in B_i | Y_i) = \\ &= E \prod_i I_{C_i}(Y_i) P(X_i \in B_i | Y_i) = E I_D \prod_i P(X_i \in B_i | \mathcal{G}_n). \quad \square \end{aligned}$$

4. Пусть $X^n = \{X_i\}_{i=1}^n$ — случайная выборка, т. е. семейство н. о. р. случайных величин. Предположим, что

1) $\tau^n = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ — случайный вектор, компоненты которого независимы и имеют равномерное распределение на $\{1, \dots, n\}$;

2) $\sigma^n = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ — случайный вектор с равномерным распределением на всех перестановках чисел $1, \dots, n$.

Допустим далее, что τ^n и σ^n не зависят от X^n . Показать, что

(а) величины $X_{\tau_1}, \dots, X_{\tau_n}$, вообще говоря, зависимы, однако условно на X^n образуют случайную выборку (являются н. о. р.);

(б) величины $X_{\sigma_1}, \dots, X_{\sigma_n}$ зависимы условно на X^n , однако

$$(X_{\sigma_1}, \dots, X_{\sigma_n}) \stackrel{d}{=} (X_1, \dots, X_n).$$

Замечание. Семейство $\{X_{\tau_i}\}_{i=1}^n$ называют бутстреповской выборкой (от *bootstrap*).

Решение. Обозначим $f(X^n, i) = X_i$, $1 \leq i \leq n$. Тогда величины $X_{\tau_i} = f(X^n, \tau_i)$ образуют случайную выборку условно на X^n , поскольку вследствие независимости τ^n и X^n (см. замечание к задаче II.7.14) с вероятностью единица выполняется равенство

$$\text{Law}((f(X_n, \tau_1), \dots, f(X_n, \tau_n)) | X^n) = \text{Law}((f(x, \tau_1), \dots, f(x, \tau_n))) \Big|_{x=X^n}.$$

Это же рассуждение показывает, что $X_{\sigma_1}, \dots, X_{\sigma_n}$ зависимы условно на X^n , когда все X_i различны с вероятностью единица, т. е. $f(X^n, \cdot)$ — биекция. Действительно, σ_1 и σ_2 зависимы (условно на X^n), так что $X_{\sigma_1} = f(X^n, \sigma_1)$ и $X_{\sigma_2} = f(X^n, \sigma_2)$ тоже будут зависимы.

Далее для всех борелевских множеств $B_1, \dots, B_n$ имеем

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_i \{X_{\sigma_i} \in B_i\}\right) &= \sum_{\pi^n} P\left(\sigma^n = \pi^n, \bigcap_i \{X_{\sigma_i} \in B_i\}\right) = \\ &= \sum_{\pi^n} P(\sigma^n = \pi^n) \prod_i P(X_{\pi_i} \in B_i) = \prod_i P(X_1 \in B_i) \sum_{\pi^n} P(\sigma^n = \pi^n) = \\ &= \prod_i P(X_1 \in B_i) = P\left(\bigcap_i \{X_i \in B_i\}\right), \end{aligned}$$

где суммирование ведется по всем перестановкам $\pi^n = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ чисел $1, \dots, n$. Аналогично устанавливается, что

$$P(X_{\tau_i} \in B_i) = P(X_1 \in B_i), \quad i = 1, 2,$$

и

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^2 \{X_{\tau_i} \in B_i\}\right) &= \\ &= \prod_{i=1}^2 P(X_i \in B_i) + \left[P(X_1 \in B_1 B_2) - \prod_{i=1}^2 P(X_i \in B_i) \right] P(\tau_1 = \tau_2), \end{aligned}$$

где $P(\tau_1 = \tau_2) = 1/n \neq 0$.

Таким образом, $(X_{\sigma_1}, \dots, X_{\sigma_n}) \stackrel{d}{=} (X_1, \dots, X_n)$, а случайные величины X_{τ_1} и X_{τ_2} , вообще говоря, зависимы (безусловно). $\square$

5. Пусть $f = f(x)$ — выпуклая функция. Показать, что для любой интегрируемой величины ξ , любой σ -подалгебры $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ и всех $c > 0$ выполняется неравенство

$$E f(\zeta) I(f(\zeta) > c) \leq E 2f(\xi) I(2f(\xi) > c),$$

где $\zeta = E(\xi | \mathcal{G})$.

Решение. Функция $g(x) = (f(x) - c)^+$ выпукла для любого фиксированного $c > 0$, так что по неравенству Йенсена для условных математических ожиданий (см. задачу II.7.10)

$$E(g(\zeta) | \mathcal{G}) \leq E(g(\xi) | \mathcal{G}) \quad \text{п. н.}, \quad E g(\zeta) \leq E g(\xi).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} E f(\zeta) \cdot I(f(\zeta) > c) &\leq E \left(f(\zeta) - \frac{c}{2} \right)^+ + \frac{c}{2} P(f(\zeta) > c) \leq \\ &\leq E \left(f(\xi) - \frac{c}{2} \right)^+ + \frac{c}{2} P(f(\xi) > c). \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} E\left(f(\xi) - \frac{c}{2}\right)^+ &\leq E f(\xi) I\left(f(\xi) > \frac{c}{2}\right), \\ P\left(f(\zeta) > c\right) &= P\left(\left(f(\zeta) - \frac{c}{2}\right)^+ > \frac{c}{2}\right) \leq \frac{2}{c} E\left(f(\zeta) - \frac{c}{2}\right)^+ \leq \\ &\leq \frac{2}{c} E\left(f(\xi) - \frac{c}{2}\right)^+. \end{aligned}$$

Комбинируя полученные оценки, приходим к искомому неравенству. $\square$

6. Пусть $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — равномерно интегрируемое семейство. Показать, что семейство

$$\{E(\xi_\alpha | \mathcal{G}) : \mathcal{G} - \sigma\text{-подалгебра } \mathcal{F}, \alpha \in A\}$$

также является равномерно интегрируемым.

Решение. Утверждение следует из задачи II.7.5. $\square$

7. Пусть ξ и ζ — независимые случайные величины.

(а) Предполагая существование математического ожидания $E\xi$, показать, что если случайные величины ξ, ζ одинаково распределены, то п. н.

$$E(\xi | \xi + \zeta) = E(\zeta | \xi + \zeta) = \frac{\xi + \zeta}{2}.$$

(б) Предполагая конечность $E\xi^2$ и $E\zeta^2$, показать, что если $\xi \stackrel{d}{=} -\xi$, то п. н.

$$E((\xi + \zeta)^2 | \xi^2 + \zeta^2) = \xi^2 + \zeta^2.$$

Решение. (а) Заметим, что $(\xi, \zeta) \stackrel{d}{=} (\zeta, \xi)$. Поэтому $(\xi, \xi + \zeta) \stackrel{d}{=} (\zeta, \xi + \zeta)$ и $\xi \mathbf{1}_A \stackrel{d}{=} \zeta \mathbf{1}_A$ для любого $A \in \sigma(\xi + \zeta)$. Следовательно, $E\xi \mathbf{1}_A = E\zeta \mathbf{1}_A$ и

$$E(\xi | \xi + \zeta) = E(\zeta | \xi + \zeta) = E\left(\frac{\xi + \zeta}{2} \middle| \xi + \zeta\right) = \frac{\xi + \zeta}{2} \quad \text{п. н.}$$

(б) Легко проверить, что из независимости ξ, ζ и равенства $\xi \stackrel{d}{=} -\xi$ следует соотношение $(\xi, \zeta) \stackrel{d}{=} (-\xi, \zeta)$. Таким образом,

$$(\xi\zeta, \xi^2 + \zeta^2) \stackrel{d}{=} (-\xi\zeta, \xi^2 + \zeta^2),$$

поэтому

$$E(\xi\zeta | \xi^2 + \zeta^2) = E(-\xi\zeta | \xi^2 + \zeta^2) = 0 \quad \text{п. н.}$$

Отсюда с учетом свойства линейности условного математического ожидания следует искомое равенство. $\square$

8. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — н. о. р. случайные величины, $E|\xi_1| < \infty$. Показать, что п. н.

$$E(\xi_1 | S_n, S_{n+1}, \dots) = n^{-1} S_n,$$

где $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$.

Решение. Как и в задаче П.7.7(а), следует воспользоваться тем, что $E\xi_i \mathbf{1}_A = E\xi_j \mathbf{1}_A$ для любого $A \in \sigma(S_n, S_{n+1}, \dots)$ и $i, j \leq n$. $\square$

9. (См. [92].) Пусть ξ — случайная величина с такой функцией распределения $F = F(x)$, что $F(b) - F(a) > 0$ для всех $a, b, -\infty < a < b < \infty$. Выразить $E(\xi | a < \xi \leq b)$ через F .

Установить, что $f(a, b) = E(\xi | a < \xi \leq b)$ есть возрастающая функция по a, b (на множестве $\{(a, b) : a < b\}$).

Решение. Согласно определению условного математического ожидания

$$E(\xi | a < \xi \leq b) = \frac{E[\xi I(a < \xi \leq b)]}{E[I(a < \xi \leq b)]} = \frac{\int_a^b x dF(x)}{F(b) - F(a)}.$$

Далее, для всех $x \in (a, b)$ имеем

$$E(\xi | a < \xi \leq b) = \lambda E(\xi | a < \xi \leq x) + (1 - \lambda) E(\xi | x < \xi \leq b),$$

где

$$\lambda = \lambda(a, b, x) = \frac{F(x) - F(a)}{F(b) - F(a)} \in (0, 1).$$

При этом

$$E(\xi | a < \xi \leq x) \leq x < E(\xi | x < \xi \leq b).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} E(\xi | a < \xi \leq b) &> \lambda E(\xi | a < \xi \leq x) + (1 - \lambda) E(\xi | a < \xi \leq x) = \\ &= E(\xi | a < \xi \leq x). \end{aligned}$$

Аналогично получаем $E(\xi | a < \xi \leq b) < E(\xi | x < \xi \leq b)$. $\square$

10. Пусть $g = g(x)$ — выпуклая вниз борелевская функция, определенная на $\mathbb{R}$ и такая, что $E|g(\xi)| < \infty$. Показать, что для *условных математических ожиданий* п. н. справедливо *неравенство Йенсена*

$$g(E[\xi | \mathcal{G}]) \leq E[g(\xi) | \mathcal{G}]$$

и, тем самым,

$$g(E\xi) \leq E g(E[\xi | \mathcal{G}]) \leq E g(\xi).$$

Замечание. Для строго выпуклой функции g имеем

$$\begin{aligned} g(E\xi) = E g(E[\xi|\mathcal{G}]) &\Leftrightarrow E\xi = E[\xi|\mathcal{G}] \text{ п. н.}, \\ E g(E[\xi|\mathcal{G}]) = E g(\xi) &\Leftrightarrow \xi = E[\xi|\mathcal{G}] \text{ п. н.} \end{aligned}$$

Если при этом σ -алгебра $\mathcal{G}$ пополнена всеми множествами меры нуль, то

$$E g(E[\xi|\mathcal{G}]) = E g(\xi) \Leftrightarrow \xi - \mathcal{G}\text{-измеримая величина}$$

Решение. Вследствие выпуклости функции g найдется такая бо-релевская функция $l = l(x)$ (в качестве $l(x)$ можно взять левую производную функции g в точке x), что

$$g(y) \geq g(x) + l(x)(y - x), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

(для строго выпуклой функции g неравенство также строгое при $x \neq y$). Поэтому при $\zeta = E[\xi|\mathcal{G}]$ имеем

$$g(\xi) \geq g(\zeta) + l(\zeta)(\xi - \zeta)$$

и, значит, п. н.

$$E[g(\xi)|\mathcal{G}] \geq g(\zeta) + E[l(\zeta)(\xi - \zeta)|\mathcal{G}] = g(\zeta) + l(\zeta)E[\xi - \zeta|\mathcal{G}] = g(\zeta).$$

Отсюда с учетом неравенства Йенсена

$$g(E\xi) = g(E\zeta) \leq E g(\zeta) \leq E E[g(\xi)|\mathcal{G}] = E g(\xi). \quad \square$$

11. Пусть ξ — случайная величина, $E|\xi| < \infty$. Убедиться, что если $\xi \leq E[\xi|\mathcal{G}]$ п. н. для некоторой σ -алгебры $\mathcal{G}$, то $\xi = E[\xi|\mathcal{G}]$ п. н.

Решение. Возьмем произвольную строго выпуклую вниз возрастающую функцию g , для которой

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x/2} = 1.$$

Тогда $E g(\xi) \leq E g(E[\xi|\mathcal{G}])$. С учетом неравенства Йенсена $E g(\xi) = E g(E[\xi|\mathcal{G}])$. Последнее возможно (см. замечание после задачи П.7.10), только когда $\xi = E[\xi|\mathcal{G}]$ п. н. $\square$

12. Пусть ξ и ζ — случайные величины, $E|\xi|, E|\zeta| < \infty$, $E[\xi|\mathcal{E}] \geq \zeta$ и $E[\zeta|\mathcal{G}] \geq \xi$ п. н. для некоторых (пополненных) σ -алгебр $\mathcal{E}$ и $\mathcal{G}$. Показать, что $\xi - \mathcal{E} \cap \mathcal{G}$ -измеримая случайная величина и $P(\xi = \zeta) = 1$.

Решение. Пусть функция g такая же, как при решении задачи П.7.11. Тогда

$$E g(E[\xi|\mathcal{E}]) \geq E g(\zeta), \quad E g(E[\zeta|\mathcal{G}]) \geq E g(\xi).$$

Используя неравенство Йенсена, получаем

$$Eg(E[\xi|\mathcal{E}]) = Eg(\zeta) = Eg(E[\zeta|\mathcal{G}]) = Eg(\xi).$$

Согласно замечанию после задачи II.7.10 это возможно, только когда ξ есть $\mathcal{E}$ -измеримая величина, а ζ — $\mathcal{G}$ -измеримая величина. Но тогда по условию задачи п. н.

$$\xi = E[\xi|\mathcal{E}] \geq \zeta = E[\zeta|\mathcal{G}] \geq \xi,$$

т. е. $P(\xi = \zeta) = 1$. □

13. Пусть X, Y — случайные величины, $E|X|, E|Y| < \infty$ и $E(Y|X) = 0$ п. н. Показать, что из условия $E(Y|X + Y) = 0$ п. н. следует, что $Y = 0$ с вероятностью единица.

Решение. Пусть $f(x) = |x| - \operatorname{arctg} |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Функция $f = f(x)$ возрастает на $\mathbb{R}_+$ и является четной строго выпуклой на $\mathbb{R}$, причем $0 \leq f(x) \leq |x|$ для всех $x \in \mathbb{R}$. По неравенству Йенсена для условных математических ожиданий имеем

$$\begin{aligned} Ef(X + Y) &= Ef(E[X + Y|X + Y]) = Ef(E[X|X + Y]) \leq Ef(X), \\ Ef(X) &= Ef(E[X + Y|X]) \leq Ef(X + Y), \end{aligned}$$

т. е. $Ef(X + Y) = Ef(E[X + Y|X])$. Последнее (ввиду замечания к задаче II.7.10) возможно, только если $E(X + Y|X) = X + Y$ п. н., что равносильно равенству $Y = E(Y|X) = 0$ п. н. □

14. Пусть случайная величина ξ не зависит от σ -алгебры $\mathcal{G}$. Пусть также $E|f(\xi, \zeta)| < \infty$ для некоторой борелевской функции $f = f(x, y)$ и $\mathcal{G}$ -измеримой величины ζ . Доказать, что $E[f(\xi, \zeta)|\mathcal{G}] = g(\zeta)$ п. н., где $g(x) = Ef(\xi, x)$.

Замечание. Утверждение задачи сохраняет свою силу, если в качестве ξ и ζ брать случайные элементы со значениями в произвольных измеримых пространствах.

Решение. Достаточно доказать, что для любого $A \in \mathcal{G}$ выполняются условия

$$Ef(\xi, \zeta)I_A = Eg(\zeta)I_A \quad \text{и} \quad EI_A|g(\zeta)| < \infty.$$

Величина ξ не зависит от (ζ, I_A) . При этом $E|f(\xi, \zeta)|I_A < \infty$ и

$$Ef(\xi, \zeta)I_A = \int_{\mathbb{R} \times \{0,1\}} yf(u, x) P_\xi(du) \otimes P_{(\zeta, I_A)}(dx, dy),$$

$$u, x \in \mathbb{R}, \quad y \in \{0, 1\},$$

где P_ξ и $P_{(\zeta, I_A)}$ — распределения ξ и (ζ, I_A) соответственно. По теореме Фубини

$$\begin{aligned} \mathbb{E}f(\xi, \zeta)I_A &= \int_{\mathbb{R} \times \{0,1\}} y P_{(\zeta, I_A)}(dx, dy) \int_{\mathbb{R}} f(u, x) P_\xi(du) = \\ &= \int_{\mathbb{R} \times \{0,1\}} y g(x) P_{(\zeta, I_A)}(dx, dy) = \mathbb{E}g(\zeta)I_A \end{aligned}$$

и к тому же

$$\mathbb{E}|g(\zeta)|I_A \leq \mathbb{E}|f(\xi, \zeta)|I_A < \infty. \quad \square$$

15. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — последовательность независимых случайных величин, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Показать, что $(S_1, \dots, S_{n-1})$ и $(S_{n+1}, S_{n+2}, \dots)$ условно независимы относительно σ -алгебры $\sigma(S_n)$.

Решение. Поскольку

$$\xi_n = (S_1, \dots, S_n) \quad \text{и} \quad \zeta_n = (X_{n+1}, X_{n+1} + X_{n+2}, \dots) \quad \text{независимы,}$$

ввиду замечания после задачи II.7.14 имеем

$$\mathbb{E}[I_B(\zeta_n + S_n)|\xi_n] = \mathbb{E}[I_B(\zeta_n + S_n)|S_n] = g(S_n), \quad g(x) = \mathbb{P}(\zeta_n + x \in B),$$

п. н. для любого фиксированного борелевского множества B в $\mathbb{R}^\infty$. Тогда с вероятностью единица для всех $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I_C(\xi_{n-1})I_B(\zeta_n + S_n)|S_n] &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}[I_C(\xi_{n-1})I_B(\zeta_n + S_n)|\xi_n] | S_n\} = \\ &= \mathbb{E}\{I_C(\xi_{n-1})\mathbb{E}[I_B(\zeta_n + S_n)|\xi_n] | S_n\} = \mathbb{E}\{I_C(\xi_{n-1})g(S_n) | S_n\} = \\ &= \mathbb{E}[I_C(\xi_{n-1})|S_n]g(S_n) = \mathbb{E}[I_C(\xi_{n-1})|S_n]\mathbb{E}[I_B(\zeta_n + S_n)|S_n]. \end{aligned}$$

В силу произвольности B и C мы получили требуемое утверждение. $\square$

16. (См. [97].) Пусть ξ — бернуллиевская случайная величина, принимающая значения 0 и 1, а X — некоторая другая случайная величина. Показать, что следующие условия эквивалентны:

(1) величины X и ξ условно на $g(X)$ являются независимыми (здесь $g = g(x)$ — борелевская функция), т. е. с вероятностью единица

$$\mathbb{P}(X \in B, \xi = b | g(X)) = \mathbb{P}(X \in B | g(X)) \cdot \mathbb{P}(\xi = b | g(X))$$

для каждого $b \in \{0, 1\}$ и всех борелевских множеств B ;

(2) $\mathbb{P}(\xi = 1|X) = \mathbb{P}(\xi = 1|g(X))$ п. н.

В частности, X и ξ независимы условно на $p(X) = \mathbb{P}(\xi = 1|X)$, поскольку п. н.

$$\mathbb{P}(\xi = 1|p(X)) = \mathbb{E}[\mathbb{P}(\xi = 1|X)|p(X)] = \mathbb{E}[p(X)|p(X)] = p(X).$$

Решение. Пусть вначале выполнено условие (1). Для доказательства справедливости условия (2) достаточно установить, что $D(p(X)|g(X)) = E[p(X)^2|g(X)] - |E[p(X)|g(X)]|^2 = 0$. Последнее равенство вытекает из соотношений

$$E[\xi|g(X)] = E[E[\xi|X]|g(X)] = E[p(X)|g(X)]$$

и

$$\begin{aligned} E[p(X)^2|g(X)] &= E[E[p(X)\xi|X]|g(X)] = E[p(X)\xi|g(X)] = \\ &= E[p(X)|g(X)] E[\xi|g(X)]. \end{aligned}$$

Покажем теперь, что (2) $\Rightarrow$ (1). Для этого установим чуть более сильное утверждение, называемое в английской литературе *the propensity score theorem* и имеющее далеко идущие следствия в задаче о выявлении причинно-следственных связей в данных:

если случайные величины Y и ξ независимы условно на X , то они будут независимы условно на $g(X)$, где борелевская функция $g = g(x)$ такова, что $P(\xi = 1|X) = P(\xi = 1|g(X))$ п. н.

Для каждого $b \in \{0, 1\}$ и всех борелевских множеств B имеем

$$P(Y \in B, \xi = b|X) = P(Y \in B|X) \cdot P(\xi = b|X).$$

Тогда

$$E[P(Y \in B, \xi = b|X)|g(X)] = P(Y \in B, \xi = b|g(X))$$

и

$$\begin{aligned} E[P(Y \in B|X) \cdot P(\xi = b|X)|g(X)] &= \\ &= P(Y \in B|g(X)) \cdot E[P(Y \in B|X)|g(X)] = \\ &= P(\xi = b|g(X)) \cdot P(Y \in B|g(X)) \end{aligned}$$

(мы учли, что $P(\xi = b|X) = P(\xi = b|g(X))$ п. н.). Иначе говоря, величины Y и ξ независимы условно на $g(X)$. Для установления импликации (2) $\Rightarrow$ (1) осталось взять $Y = X$. $\square$

17. Показать, что случайная величина ξ и σ -алгебра $\mathcal{G}$ независимы, т. е. для любого $A \in \mathcal{G}$ величины ξ и I_A независимы тогда и только тогда, когда $E[g(\xi)|\mathcal{G}] = E g(\xi)$ для каждой такой борелевской функции $g = g(x)$, что $E|g(\xi)| < \infty$.

Решение. Если $A \in \mathcal{G}$ и $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, то из предположения независимости ξ и $\mathcal{G}$ имеем $P(A \cap \{g(\xi) \in B\}) = P(A)P(g(\xi) \in B)$ и, значит,

$E[g(\xi)|\mathcal{G}] = E g(\xi)$. Обратно, если это равенство выполнено, то, в частности, можно взять $g(\xi) = I(\xi \in B)$. Тогда получим

$$P(A \cap \{\xi \in B\}) = P(A)P(\xi \in B),$$

что в силу произвольности $A \in \mathcal{G}$ и $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ означает независимость ξ и $\mathcal{G}$. $\square$

18. Пусть ξ — неотрицательная случайная величина и $\mathcal{G}$ — σ -подалгебра σ -алгебры $\mathcal{F}$. Показать, что $E[\xi|\mathcal{G}] < \infty$ п. н. тогда и только тогда, когда мера Q , определенная на множествах $A \in \mathcal{G}$ равенством $Q(A) = \int_A \xi dP$, является σ -конечной.

Решение. Для доказательства *необходимости* положим $A_n = \{E[\xi|\mathcal{G}] \leq n\}$. Тогда $Q(A_n) = \int_{A_n} \xi dP = \int_{A_n} E[\xi|\mathcal{G}] dP \leq n$, откуда заключаем, что мера Q является σ -конечной, так как $\bigcup_n A_n = \Omega$.

Достаточность. Если $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{G}$ таковы, что $\bigcup_n A_n = \Omega$ и $Q(A_n) < \infty$, $n \geq 1$, то

$$Q\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \int_{\bigcup_{i=1}^n A_i} E[\xi|\mathcal{G}] dP < \infty, \quad n \geq 1.$$

Следовательно,

$$0 = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \cap \{E[\xi|\mathcal{G}] = \infty\}\right) \uparrow P(E[\xi|\mathcal{G}] = \infty) = 0. \quad \square$$

19. Показать, что условные вероятности $P(A|B)$ *непрерывны* в том смысле, что если $\lim_n A_n = A$, $\lim_n B_n = B$, $P(B_n) > 0$, $P(B) > 0$, то $\lim_n P(A_n|B_n) = P(A|B)$.

Решение. Легко доказать, что при данных условиях $\lim_n A_n B_n = AB$ (см. задачу II.1.8). Поэтому согласно задаче II.1.16 имеем $P(A_n B_n) \rightarrow P(AB)$, $P(B_n) \rightarrow P(B)$, откуда вытекает требуемая сходимость. $\square$

20. Доказать следующую версию *леммы Фату* для *условных математических ожиданий*.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство и $(\xi_n)_{n \geq 1}$ — такая последовательность случайных величин, что *определены* математические ожидания $E\xi_n$, $n \geq 1$, и $E \liminf \xi_n$ (которые могут принимать и значения $\pm\infty$).

Предположим, что $\mathcal{G}$ есть σ -подалгебра событий из $\mathcal{F}$ и

$$\overline{\lim}_n E(\xi_n^- I(\xi_n^- \geq k) | \mathcal{G}) \rightarrow 0 \quad \text{п. н.}, \quad k \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$E(\underline{\lim} \xi_n | \mathcal{G}) \leq \underline{\lim} E(\xi_n | \mathcal{G}) \quad \text{п. н.}$$

Решение. Пусть $\xi_n^k = \xi_n^+ - \xi_n^- I(\xi_n^- < k)$, $k \geq 1$. Тогда $\xi_n^k \geq \xi_n$,

$$\underline{\lim}_n E(\xi_n | \mathcal{G}) \leq \underline{\lim}_n E(\xi_n^k | \mathcal{G}) \quad \text{и} \quad E(\underline{\lim} \xi_n | \mathcal{G}) \leq E(\underline{\lim}_n \xi_n^k | \mathcal{G}) \quad \text{п. н.}$$

Кроме того, согласно п. d) теоремы 2 в В1.П.7 имеем

$$E(\underline{\lim}_n \xi_n^k | \mathcal{G}) \leq \underline{\lim}_n E(\xi_n^k | \mathcal{G}).$$

Таким образом, достаточно показать, что

$$\underline{\lim}_n E(\xi_n^k | \mathcal{G}) \rightarrow \underline{\lim}_n E(\xi_n | \mathcal{G}), \quad k \rightarrow \infty.$$

Последнее вытекает из условия задачи:

$$\left| \underline{\lim}_n E(\xi_n^k | \mathcal{G}) - \underline{\lim}_n E(\xi_n | \mathcal{G}) \right| \leq \overline{\lim}_n E(\xi_n^- I(\xi_n^- \geq k) | \mathcal{G}) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad \square$$

21. Пусть, как и в задаче П.7.20, $(\xi_n)_{n \geq 1}$ — последовательность случайных величин, для которых определены математические ожидания $E\xi_n$, $n \geq 1$, и $\mathcal{G}$ — такая σ -подалгебра событий из $\mathcal{F}$, что

$$\overline{\lim}_n E(|\xi_n| I(|\xi_n| \geq k) | \mathcal{G}) = 0 \quad \text{п. н.}, \quad k \rightarrow \infty. \quad (*)$$

Тогда если $\xi_n \rightarrow \xi$ п. н. и математическое ожидание $E\xi$ определено, то

$$E(\xi_n | \mathcal{G}) \rightarrow E(\xi | \mathcal{G}) \quad \text{п. н.} \quad (**)$$

Решение. Поскольку $\xi_n^+, \xi_n^- \leq |\xi_n|$ и функция $f(x) = xI(x \geq a)$, $a > 0$, монотонна, из условия (*) следует, что (п. н.)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_n E(\xi_n^* I(\xi_n^* \geq k) | \mathcal{G}) = 0,$$

где $*$ = + или $-$. Тем самым в силу задачи П.7.20 с вероятностью единица

$$E(\xi | \mathcal{G}) = E(\underline{\lim} \xi_n | \mathcal{G}) \leq \underline{\lim} E(\xi_n | \mathcal{G})$$

и

$$E(\xi | \mathcal{G}) = E(\overline{\lim} \xi_n | \mathcal{G}) \geq \overline{\lim} E(\xi_n | \mathcal{G})$$

(чтобы получить неравенство с $\overline{\lim}$, надо вместо $(\xi_n)_{n \geq 1}$ рассмотреть $(-\xi_n)_{n \geq 1}$). Иными словами, будет выполнено условие (**). $\square$

22. Пусть в условиях задачи II.7.21 вместо (*) выполнено условие

$$\sup_n E(|\xi_n|^p | \mathcal{G}) < \infty$$

п. н. для некоторого $p > 1$. Показать, что сходимость (**) будет также иметь место.

Решение. С вероятностью единица для всех $k, n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$E(|\xi_n| I(|\xi_n| \geq k) | \mathcal{G}) \leq \frac{E(|\xi_n|^p | \mathcal{G})}{k^{1-p}}.$$

Число всевозможных k и n счетно, поэтому это неравенство выполнено п. н. *одновременно* для всех k и n . Поэтому п. н.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_n E(|\xi_n| I(|\xi_n| \geq k) | \mathcal{G}) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sup_n E(|\xi_n|^p | \mathcal{G})}{k^{1-p}} = 0.$$

Осталось воспользоваться результатом задачи II.7.21. $\square$

23. Если семейство случайных величин $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ равномерно интегрируемо и $\xi_n \rightarrow \xi$ п. н., то $E\xi_n \rightarrow E\xi$. В то же время сходимость п. н. условных математических ожиданий $E(\xi_n | \mathcal{G}) \rightarrow E(\xi | \mathcal{G})$, $n \rightarrow \infty$, доказывалась в предположении, что $|\xi_n| \leq \eta$, $E\eta < \infty$, $n \geq 1$, и $\xi_n \rightarrow \xi$ п. н.

Привести пример, показывающий, что если условие « $|\xi_n| \leq \eta$, $E\eta < \infty$, $n \geq 1$ » заменить на условие «семейство $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ равномерно интегрируемо», то сходимости $E(\xi_n | \mathcal{G}) \rightarrow E(\xi | \mathcal{G})$ п. н., $n \rightarrow \infty$, уже может и не быть. Аналогичное относится и к переносу леммы Фату для равномерно интегрируемых случайных величин на случай условных математических ожиданий.

Решение. Пусть U, V — две независимые случайные величины с равномерным распределением на $[0, 1]$. Положим $\mathcal{G} = \sigma(V)$ и

$$X_{kn} = nI(nU \leq 1)I(k-1 < nV \leq k), \quad 1 \leq k \leq n.$$

Тогда п. н.

$$E(X_{kn} | \mathcal{G}) = I(k-1 < nV \leq k) E nI(nU \leq 1) = I(k-1 < nV \leq k).$$

Пусть, далее,

$$(\xi_1, \xi_2, \dots) = (X_{11}, X_{12}, X_{22}, X_{13}, X_{23}, X_{33}, \dots).$$

Тогда $\xi_n \rightarrow 0$ п. н. и в L^1 (а значит, семейство $(\xi_n)_{n \geq 1}$ равномерно интегрируемо). Однако (п. н.)

$$\lim_n \mathbb{E}(\xi_n | \mathcal{G}) = 1 \neq 0 = \mathbb{E}(\xi | \mathcal{G}). \quad \square$$

24. Пусть $\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi$ для некоторого $p \geq 1$. Показать, что тогда

$$\mathbb{E}(\xi_n | \mathcal{G}) \xrightarrow{L^p} \mathbb{E}(\xi | \mathcal{G})$$

для всякой σ -подалгебры $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.

Решение. По определению сходимости в пространстве L^p с учетом неравенства Йенсена получаем

$$\mathbb{E}|\mathbb{E}(\xi_n | \mathcal{G}) - \mathbb{E}(\xi | \mathcal{G})|^p \leq \mathbb{E}(|\xi_n - \xi|^p | \mathcal{G}) = \mathbb{E}|\xi_n - \xi|^p \rightarrow 0. \quad \square$$

25. Показать, что $(X, Y) \stackrel{d}{=} (Z, Y)$, если и только если

$$\mathbb{P}(X \in A | Y) = \mathbb{P}(Z \in A | Y)$$

п. н. для каждого $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Решение. *Необходимость.* Пусть $(X, Y) \stackrel{d}{=} (Z, Y)$. Для каждого $C \in \sigma(Y)$ найдется такое борелевское множество $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, что $C = \{Y \in B\}$ и

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\mathbb{P}(X \in A | Y)I_C &= \mathbb{E}I(X \in A, Y \in B) = \mathbb{E}I(Z \in A, Y \in B) = \\ &= \mathbb{E}\mathbb{P}(Z \in A | Y)I_C. \end{aligned}$$

Последнее для $\mathcal{B}(\mathbb{R})/\sigma(Y)$ -измеримых величин $\mathbb{P}(X \in A | Y)$ и $\mathbb{P}(Z \in A | Y)$ возможно только при их равенстве с вероятностью единица.

Достаточность. Для всех $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((X, Y) \in A \times B) &= \mathbb{E}\mathbb{P}(X \in A | Y)I_B(Y) = \mathbb{E}\mathbb{P}(Z \in A | Y)I_B(Y) = \\ &= \mathbb{P}((Z, Y) \in A \times B) \end{aligned}$$

по закону повторных математических ожиданий. Осталось отметить, что двумерное распределение на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ однозначно восстанавливается (в силу теоремы Каратеодори) по своему ограничению на класс множеств вида $\{A \times B : A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. $\square$

26. Дать пример таких независимых случайных величин X и Y и σ -алгебры $\mathcal{G}$, что на множестве положительной меры для некоторых множеств A и B выполняется неравенство

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B | \mathcal{G}) \neq \mathbb{P}(X \in A | \mathcal{G}) \mathbb{P}(Y \in B | \mathcal{G}).$$

Иначе говоря, из независимости автоматически не следует условная независимость.

Решение. Положим $X = \xi + \eta$, $Y = \xi - \eta$, где ξ, η — независимые случайные величины с распределением $\mathcal{N}(0, 1)$. Тогда X, Y являются независимыми гауссовскими величинами (так как $\text{cov}(X, Y) = 0$). Зададим $\mathcal{G} = \sigma(\eta)$. Имеем

$$\begin{aligned} P(X \leq 0, Y \leq 0 | \eta) &= P(\xi \leq -|\eta| | \eta) = \Phi(-|\eta|) > \Phi(\eta)\Phi(-\eta) = \\ &= P(X \leq 0 | \eta)P(Y \leq 0 | \eta), \end{aligned}$$

где Φ — функция распределения закона $\mathcal{N}(0, 1)$, а все равенства — это равенства п. н. $\square$

27. Рассмотрим в качестве вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ пространство $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$, где λ — мера Лебега. Привести пример σ -подалгебры $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}([0, 1])$, для которой у условного математического ожидания $E(1 | \mathcal{G})(\omega)$ существует *версия*, задаваемая *функцией Дирихле*

$$d(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \text{ иррационально,} \\ 0, & \omega \text{ рационально.} \end{cases}$$

Тем самым вполне может случиться, что *некоторая* версия условного математического ожидания $E(\xi | \mathcal{G})(\omega)$ «гладкой» функции $\xi = \xi(\omega)$, такой как, например, $\xi(\omega) \equiv 1$, может быть как функция от ω крайне «негладкой».

Решение. В качестве $\mathcal{G}$ можно взять σ -подалгебру, содержащую все B из $\mathcal{B}([0, 1])$, для которых $\lambda(B) = 0$ или 1. $\square$

28. При определении условной вероятности $P(B | \mathcal{G})(\omega)$ события $B \in \mathcal{F}$ относительно σ -алгебры $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ обычно не предполагается, что $P(\cdot | \mathcal{G})(\omega)$ с вероятностью единица является *мерой* на $(\Omega, \mathcal{F})$. Привести пример, показывающий, что $P(\cdot | \mathcal{G})(\omega)$ может быть с вероятностью единица *не мерой*.

Решение. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$, где λ — мера Лебега, а

$$\mathcal{G} = \{B \in \mathcal{F} : \lambda(B) = 0 \text{ или } 1\}.$$

Положим, далее, $P(B | \mathcal{G})(\omega) \equiv \lambda(B)$, когда $B \in \mathcal{F}$ не представляется в виде $[0, b]$, и $P([0, b] | \mathcal{G})(\omega) = bI(\omega \neq b)$ ($0 \leq b \leq 1$). Поскольку $P(B | \mathcal{G})$ есть постоянные величины, равные $\lambda(B) = P(B)$ (с точностью до множеств меры нуль), они являются $\mathcal{G}$ -измеримыми и действительно задают условные вероятности. При этом для каждого $\omega \in [0, 1]$ функция множеств $P(\cdot | \mathcal{G})(\omega)$ не есть мера. $\square$

29. Если математическое ожидание $E\xi$ случайной величины ξ определено, то имеет место свойство $EE(\xi|\eta) = E\xi$ (η — некоторая случайная величина). Привести пример случайных величин ξ и η , для которых математическое ожидание $EE(\xi|\eta)$ определено, однако $E\xi$ не существует.

Решение. Возьмем произвольную случайную величину η , для которой $P(\eta > 0) = 1$ и $E\eta = \infty$, и положим $\xi = X\eta$, где X — случайная величина, не зависящая от η и имеющая бернуллиевское распределение $P(X = 1) = P(X = -1) = 1/2$. Тогда $\xi^+ = I(X = 1)\eta$, $\xi^- = I(X = -1)\eta$ и $E\xi^+ = E\xi^- = \infty$ (т. е. $E\xi = \infty - \infty$ не определено). Однако $E(\xi^+|\eta) = P(X = 1)\eta = \eta/2$ и $E(\xi^-|\eta) = P(X = -1)\eta = \eta/2$, так что $E(\xi|\eta) = 0$ и $EE(\xi|\eta) (= 0)$ определено. $\square$

30. Пусть $\eta - \mathcal{G}$ -измеримая случайная величина, $\xi - \mathcal{F}$ -измеримая случайная величина и $E|\eta|^q < \infty$, $E|\xi|^p < \infty$, где $p > 1$, $1/p + 1/q = 1$. Показать, что тогда $E(\xi\eta|\mathcal{G}) = \eta E(\xi|\mathcal{G})$ п. н.

Решение. Пусть $\eta^c = \eta I(|\eta| \leq c)$, $c > 0$. Тогда $\eta^c - \mathcal{G}$ -измеримая величина и $E(\xi\eta^c|\mathcal{G}) = \eta^c E(\xi|\mathcal{G})$ п. н. (по аналогичному свойству для ограниченных величин). Переходя к пределу при $c \rightarrow \infty$, видим, что $\eta^c E(\xi|\mathcal{G}) \rightarrow \eta E(\xi|\mathcal{G})$ п. н. С другой стороны, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости для условных математических ожиданий

$$E(\xi\eta^c|\mathcal{G}) \rightarrow E(\xi\eta|\mathcal{G}) \quad \text{п. н.}$$

(так как $|\xi\eta^c| \leq |\xi\eta|$ при всех $c > 0$ и $E|\xi\eta| \leq (E|\xi|^p)^{1/p} (E|\eta|^q)^{1/q} < \infty$). Таким образом, $E(\xi\eta|\mathcal{G}) = \eta E(\xi|\mathcal{G})$ п. н. $\square$

31. Пусть $\Omega = \mathbb{Z}_+$ и

$$P_\lambda(\omega = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \geq 0,$$

есть пуассоновское распределение на Ω с параметром $\lambda > 0$. Показать, что для параметра $1/\lambda$ не существует несмещенной оценки $T = T(\omega)$, т. е. такой, что для всех $\lambda > 0$ выполняются условия

$$E_\lambda|T| < \infty, \quad E_\lambda T = \frac{1}{\lambda}.$$

Решение. Пусть T — несмещенная оценка параметра $1/\lambda$. Тогда

$$e^\lambda \lambda E_\lambda T = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T(k-1)}{(k-1)!} \lambda^k = e^\lambda.$$

Получили противоречие. Действительно, поскольку

$$E_1|T| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|T(k-1)|}{(k-1)!} < \infty,$$

получаем, что

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T(k-1)}{(k-1)!} \lambda^k = 0 \neq 1 = \lim_{\lambda \downarrow 0} e^\lambda. \quad \square$$

32. (а) Пусть $\mathcal{P} = \{P\}$ — доминируемое семейство вероятностных мер на $(\Omega, \mathcal{F})$, т. е. $P \ll \nu$ для некоторой вероятностной меры ν и всех $P \in \mathcal{P}$. Показать, что тогда найдутся такие $P_1, P_2, \dots \in \mathcal{P}$, что для любого $P \in \mathcal{P}$ выполняется оценка

$$P \ll \sum_{n \geq 1} 2^{-n} P_n = Q.$$

(См. задачу II.4.2.)

Замечание. Утверждение задачи сохраняет свою силу для произвольных σ -конечных мер ν , т. е. таких, что $\nu(A_n) < \infty$ для некоторых $A_n \in \mathcal{F}$, $n \geq 1$, $\bigcup_{n \geq 1} A_n = \Omega$. Действительно, любая такая мера ν эквивалентна вероятностной мере μ , заданной формулой

$$\mu(A) = \left[\sum_{n \geq 1: \nu(A_n) > 0} \frac{1}{2^n} \right]^{-1} \sum_{n \geq 1: \nu(A_n) > 0} \frac{1}{2^n} \frac{\nu(A_n A)}{\nu(A_n)}, \quad A \in \mathcal{F}.$$

(b) Используя обобщенную формулу Байеса

$$E_P(X|\mathcal{G}) = \frac{E_Q\left(X \frac{dP}{dQ} \middle| \mathcal{G}\right)}{E_Q\left(\frac{dP}{dQ} \middle| \mathcal{G}\right)} \quad P\text{-п. н.},$$

справедливую для всех σ -подалгебр $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, Q из п. (а) и любых неотрицательных случайных величин X , $E_P|X| < \infty$, установить, что $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ является достаточной σ -алгеброй для (доминируемого!) семейства $\mathcal{P}$ в том и только том случае, когда

$$\frac{dP}{dQ} - \bar{\mathcal{G}}\text{-измеримая случайная величина для всех } P \in \mathcal{P},$$

где $\bar{\mathcal{G}}$ — σ -алгебра $\mathcal{G}$, пополненная множествами Q -нулевой меры.

Напомним, что $\mathcal{G}$ является достаточной σ -подалгеброй $\mathcal{F}$ для семейства $\mathcal{P}$, если для любой ограниченной неотрицательной случайной величины X существует такая неотрицательная $\mathcal{G}$ -измеримая величина Y , что P -п. н. $E_P(X|\mathcal{G}) = Y$ для каждого $P \in \mathcal{P}$.

(с) Из утверждения п. (b), в частности, вытекает, что если σ -алгебры $\mathcal{E}, \mathcal{G}$ таковы, что $\mathcal{E} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, причем $\mathcal{E}$ является достаточной для $\mathcal{P}$, то это же свойство справедливо для $\mathcal{G}$.

Установить, что для *не* доминируемых (никакой σ -конечной мерой ν) семейств $\mathcal{P}$ указанное свойство, вообще говоря, не имеет места. С этой целью полезным будет, следуя [46], рассмотреть семейство

$$\mathcal{P} = \left\{ \frac{\delta\omega + \delta_{-\omega}}{2}, \omega \in \mathbb{R} \right\}$$

вероятностных мер на $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, а также σ -алгебры

$$\mathcal{E} = \{E \in \mathcal{F} : E = -E\}, \quad \mathcal{G} = \{E \cup B : B \subset D, B \in \mathcal{F}, E \in \mathcal{E}\},$$

где D — любое неборелевское множество, $0 \in D$, $D = -D$.

Решение. (а) В качестве P_n надо взять те элементы класса $\mathcal{P}$, для которых

$$\operatorname{ess\,sup}_{P \in \mathcal{P}} \frac{dP}{d\nu} = \sup_n \frac{dP_n}{d\nu}$$

с точностью до множества ν -меры нуль (определение $\operatorname{ess\,sup}$ дано в задаче II.4.2).

(b) Фиксируем ограниченную неотрицательную величину X . С учетом определения Q получаем, что справедливость соотношения $E_P(X|\mathcal{G}) = Y$ P -п. н. для некоторой $\mathcal{G}$ -измеримой величины Y и каждого $P \in \mathcal{P}$ равносильна тому, что $E_P(X|\mathcal{G}) = E_Q(X|\mathcal{G})$ P -п. н. Последнее равенство по формуле Байеса (знаменатель в правой части которой не обращается в нуль P -п. н.) переписывается в виде

$$E_Q(X\Delta_{P,Q}|\mathcal{G}) = 0 \quad P\text{-п. н. для всех } P \in \mathcal{P}, \quad (*)$$

где

$$\Delta_{P,Q} = \frac{dP}{dQ} - E_Q\left(\frac{dP}{dQ}|\mathcal{G}\right).$$

В свою очередь, условие $(*)$ равносильно тому, что

$$E_Q(X\Delta_{P,Q}|\mathcal{G}) = 0 \quad Q\text{-п. н.}$$

Таким образом, если $\mathcal{G}$ — достаточная σ -алгебра для $\mathcal{P}$, то, выбирая

$$X = I(\Delta_{P,Q} > 0) - I(\Delta_{P,Q} < 0),$$

находим, что $E_Q(|\Delta_{P,Q}||\mathcal{G}) = 0$ Q -п. н. и, значит, $E_Q|\Delta_{P,Q}| = 0$, т. е. $Q(\Delta_{P,Q} = 0) = 1$. Это и означает, что $dP/dQ - \mathcal{G}$ -измеримая величина. Тем самым доказана *необходимость*.

Достаточность есть элементарное следствие формулы Байеса.

(с) Очевидно, что $\mathcal{E}$ есть σ -подалгебра $\mathcal{F}$. Для всех ограниченных случайных величин X , $E \in \mathcal{E}$ и $P \in \mathcal{P}$ имеем

$$\int_E X(\omega) dP = \int_E \frac{X(\omega) + X(-\omega)}{2} dP,$$

т. е. $E(X|\mathcal{E})(\omega) = [X(\omega) + X(-\omega)]/2$ $\mathbb{P}$ -п. н. Другими словами, σ -алгебра $\mathcal{E}$ является достаточной для $\mathcal{P}$. Далее, прямой проверкой устанавливается, что $\mathcal{G}$ есть σ -подалгебра $\mathcal{F}$, причем $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}$.

Допустим теперь, что σ -алгебра $\mathcal{G}$ является достаточной. Тогда для любой случайной величины X найдется $\mathcal{G}$ -измеримая случайная величина Y со свойством

$$\int_G X d\mathbb{P} = \int_G Y d\mathbb{P}, \quad G \in \mathcal{G}, \quad \mathbb{P} \in \mathcal{P}. \quad (*)$$

Полагая $G = \{\omega\} \subset D$ и $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}(\{-\omega\}) = 1/2$, находим, что $Y(\omega) = X(\omega)$ при $\omega \in D$. Если же $\omega \notin D$, то $\{\omega\}, \{-\omega\} \notin \mathcal{G}$, однако $\{-\omega, \omega\} \in \mathcal{E} \subset \mathcal{G}$. Отсюда следует, что $Y(-\omega) = Y(\omega)$. Действительно, множество $Y^{-1}(Y(\omega)) = B \cup E \in \mathcal{G}$ с необходимостью содержит $-\omega$, так как $\omega \notin B \subset D$ и, значит, $\omega \in E = -E$. Пусть, далее, $G = \{-\omega, \omega\}$, $\omega \notin D$ и $\mathbb{P}$ определено так же, как выше. Тогда

$$Y(\omega) = [Y(\omega) + Y(-\omega)]/2 = [X(\omega) + X(-\omega)]/2 \quad \text{при } \omega \notin D.$$

Возьмем $X = I_{[0, \infty)} - I_{(-\infty, 0)}$. Тогда

$$Y = I_{[0, \infty) \cap D} - I_{(-\infty, 0) \cap D},$$

следовательно, $Y^{-1}(\{-1, 1\}) = D \subset \mathcal{F}$ — противоречие (так как множество D неборелевское). $\square$

33. Пусть $(E, \mathcal{E})$ — борелевское пространство, т. е. измеримое пространство, для которого найдется такое инъективное отображение $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$, что $\varphi(E) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ и $\{\varphi(E) \cap B: B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} = \{\varphi(C): C \in \mathcal{E}\}$. Показать, что существует такая *счетно*-порожденная алгебра $\mathcal{A}$, что $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{E}$.

Решение. Поскольку φ — инъекция, имеем $\varphi^{-1}(\mathcal{G}) = \mathcal{E}$, где

$$\mathcal{G} = \{\varphi(E) \cap B: B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Тем самым достаточно показать, что $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{A})$ для некоторой *счетно*-порожденной алгебры $\mathcal{A}$. В качестве порождающей системы для $\mathcal{A}$ можно взять

$$\{(a, b] \cap \varphi(E): a < b, \quad a, b \in \mathbb{Q}\}. \quad \square$$

34. Доказать, что

всякое польское пространство (S, ρ) с метрикой ρ определяет борелевское пространство $(S, \mathcal{B}(S))$, где $\mathcal{B}(S)$ — борелевская σ -алгебра, порожденная открытыми множествами.

В частности, пространства $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, $1 \leq n \leq \infty$, являются борелевскими.

Замечание. Данное утверждение есть частный случай общей теоремы Куратовского (см., например, гл. 13 в книге [53]):

два сепарабельных метрических пространства (S, ρ) и (T, d) , являющиеся борелевскими подмножествами в своем пополнении, борелевски изоморфны тогда и только тогда, когда мощности множеств S и T равны.

Напомним, что пространства (S, ρ) и (T, d) борелевски изоморфны, если существует такая биекция $\varphi: S \rightarrow T$, что φ и φ^{-1} — борелевские отображения.

Решение. Доказательство разобьем на несколько шагов.

1. Покажем, что (S, ρ) гомеоморфно некоторому борелевскому подмножеству пространства $[0, 1]^\infty$ с метрикой

$$d((a_i)_{i \geq 1}, (b_i)_{i \geq 1}) = \sum_{i \geq 1} \frac{|a_i - b_i|}{2^i}.$$

Без ограничения общности будем считать, что $\sup\{\rho(x, y): x, y \in S\} \leq 1$. Иначе заменим метрику $\rho(x, y)$ на эквивалентную метрику

$$\rho_1(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}.$$

Пусть $(s_i)_{i \geq 1}$ — счетная всюду плотная система точек в S (далее считаем, что S бесконечно, так как в противном случае утверждение становится тривиальным). Зададим отображение $f: S \rightarrow [0, 1]^\infty$ формулой

$$x \xrightarrow{f} (\rho(x, s_i))_{i \geq 1}.$$

Для доказательства того, что отображение f будет гомеоморфизмом на свой образ $f(S)$, достаточно проверить, что

$$\rho(x_n, x) \rightarrow 0 \Leftrightarrow d((\rho(x_n, s_i))_{i \geq 1}, (\rho(x, s_i))_{i \geq 1}) \rightarrow 0$$

(это условие, в частности, означает, что f — инъекция). Импликация $\Rightarrow$ следует из неравенства вида

$$\sup_i |\rho(x_n, s_i) - \rho(x, s_i)| \leq \rho(x_n, x).$$

Импликацию $\Leftarrow$ можно доказать так. Построить такую последовательность (i_n) , что

$$\rho(x, s_{i_n}) \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \rho(x_n, s_{i_n}) - \rho(x, s_{i_n}) \rightarrow 0$$

(в последовательности (i_n) может быть много совпадающих элементов, например $(7, 7, 7, 7, 21, 21, 21, \dots)$), а далее применить неравенство треугольника $\rho(x_n, x) \leq \rho(x_n, s_{i_n}) + \rho(x, s_{i_n})$.

Итак, f — гомеоморфизм на $B = f(S)$. Если при этом множество B окажется борелевским, то f^{-1} будет борелевским отображением, поскольку образы $f(F)$ всех замкнутых множеств F в S будут пересечением множества B и замыкания множества $f(F)$ в $[0, 1]^\infty$, т. е. будут борелевскими.

Итак, осталось показать, что B борелевское. С этой целью рассмотрим в $[0, 1]^\infty$ множества вида

$$U_m^n = \left\{ a: \sup_{b, c \in B \cap B_m(a)} \rho(f^{-1}(b), f^{-1}(c)) < \frac{1}{n} \right\},$$

где $B_m(a)$ — открытый шар в $[0, 1]^\infty$ радиуса $1/m$ с центром в точке a , $\sup \emptyset = 0$ и $m, n \geq 1$. Если теперь $a \in U_m^n$, то $B_{2m}(a) \subseteq U_{2m}^n$ (и, в частности, $U_m^n \subseteq U_{2m}^n$). Иначе говоря, множества $U^n = U_1^n \cup U_2^n \cup \dots$ открыты. Пусть, далее, $a \in B^c \cap U^1 \cap U^2 \dots$ (где B^c — замыкание B в метрике d). Тогда

$$a \in B^c \cap U_{m_1}^1 \cap U_{m_2}^2 \dots \text{ для некоторых } m_n \uparrow \infty.$$

Выберем $b_n \in B$ такими, что $b_n \rightarrow a$ и $b_n \in B_{m_n}(a)$. Поскольку по построению $\rho(f^{-1}(b_n), f^{-1}(b_k)) < 1/n$ при $k > n > 1$, в силу полноты пространства (S, ρ) имеем $f^{-1}(b_n) \rightarrow s = f^{-1}(b)$ для некоторого $s \in S$ и $b = f(s) \in B$. Но тогда $b_n \rightarrow b$ в $[0, 1]^\infty$ (f — гомеоморфизм) и, значит, с необходимостью $a = b$. Тем самым мы доказали, что $B \supseteq B^c \cap U^1 \cap U^2 \dots$. Обратное включение очевидно, если учесть, что $B \subseteq U^n$ (это вытекает из того, что функция f^{-1} непрерывна на B). Поэтому B есть пересечение счетного числа открытых множеств в $[0, 1]^\infty$ и одного замкнутого множества B^c , т. е. является борелевским множеством.

2. Покажем, что $([0, 1]^\infty, d)$ борелевски изоморфно некоторому борелевскому подмножеству канторова множества в отрезке $[0, 1]$ (с евклидовой «длиной»). Если это так, то композиция $g(f(\cdot))$ указанного борелевского изоморфизма $g: [0, 1]^\infty \rightarrow [0, 1]$ с отображением $f: S \rightarrow [0, 1]^\infty$ из п. 1 и будет задавать искомым борелевский изоморфизм между (S, ρ) и борелевским множеством $g(f(S))$ в отрезке $[0, 1]$ (а значит, и в $\mathbb{R}$).

Будем, как всегда, отождествлять канторово множество и пространство $\{0, 1\}^\infty$ последовательностей из нулей и единиц (см. II.3.20). Каждое число $a \in [0, 1]$ можно однозначно записать в виде $0, \alpha_1 \alpha_2 \dots$ в двоичной системе с $\alpha_i = 0$ или 1 таким образом, что либо все α_i равны 1, либо бесконечное число α_i равно 0. Используя указанную дво-

ичную запись, зададим инъективное отображение $g: [0, 1]^\infty \rightarrow \{0, 1\}^\infty$:

$$(0, \alpha_{1j} \alpha_{2j} \dots)_{j \geq 1} \xrightarrow{g} (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{12}, \alpha_{31}, \alpha_{22}, \alpha_{13}, \dots).$$

Тогда $g([0, 1]^\infty)$ есть борелевское множество в $\{0, 1\}^\infty$. В самом деле, поскольку количество последовательностей из $\{0, 1\}^\infty$, состоящих из конечного числа нулей, счетно, дополнение к $g([0, 1]^\infty) \subset \{0, 1\}^\infty$ представляется в виде

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{(\alpha_i)_{i \geq 1} : (\alpha_{i_{1n}}, \alpha_{i_{2n}}, \dots) = (\beta_{jn})_{j \geq 1}\}$$

для некоторых $(\beta_{jn})_{j \geq 1} \in \{0, 1\}^\infty$ и $1 \leq i_{1n} < i_{2n} < \dots$ ($n \geq 1$). При этом

$$\{(\alpha_i)_{i \geq 1} : (\alpha_{i_j})_{j \geq 1} = (\beta_j)_{j \geq 1}\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{(\alpha_i)_{i \geq 1} : \alpha_{i_j} = \beta_j\},$$

где множества $\{(\alpha_i)_{i \geq 1} : \alpha_{i_j} = \beta_j\}$ являются борелевскими как прообразы замкнутых множеств при непрерывном отображении $h((\alpha_i)_{i \geq 1}) = \alpha_{i_j}$ ($h: \{0, 1\}^\infty \rightarrow \{0, 1\}$). Итак, множество $g([0, 1]^\infty)$ борелевское. Обратное отображение $g^{-1}: g([0, 1]^\infty) \rightarrow [0, 1]^\infty$, как нетрудно видеть, непрерывно (и, в частности, борелевское). Таким образом, мы установили, что g есть борелевский изоморфизм пространства $([0, 1]^\infty, d)$ на некоторое подмножество канторова множества. $\square$

35. Пусть X — случайная величина с симметричным распределением ($X \stackrel{d}{=} -X$) и функция $\varphi = \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, такова, что $E[\varphi(X) | |X|]$ определено. Показать, что

$$E[\varphi(X) | |X|] = \frac{1}{2}[\varphi(|X|) + \varphi(-|X|)] \quad \text{п. н.}$$

Используя указанное равенство, вычислить $P(X \leq x | |X|)$.

Решение. Очевидно, имеем $(X, |X|) \stackrel{d}{=} (-X, |X|)$, поэтому

$$E[\varphi(X) | |X|] = E[\varphi(-X) | |X|].$$

К тому же $\varphi(|X|) + \varphi(-|X|) = \varphi(X) + \varphi(-X)$. Окончательно получаем

$$2E[\varphi(X) | |X|] = E[\varphi(X) + \varphi(-X) | |X|] = \varphi(|X|) + \varphi(-|X|).$$

Переходя ко второй части задачи, находим, что с вероятностью единица

$$P(X \leq x | |X|) = E[I(X \leq x) | |X|] = \frac{1}{2}[I(|X| \leq x) + 1]$$

при $x \geq 0$ (аналогично при $x < 0$). $\square$

36. Пусть X — неотрицательная случайная величина. Найти условные вероятности

$$P(X \leq x | \lfloor X \rfloor) \quad \text{и} \quad P(X \leq x | \lceil X \rceil),$$

где $\lfloor X \rfloor$ — наибольшее целое число, не превосходящее X (это число также обозначается $[X]$), и $\lceil X \rceil$ — наименьшее целое число, большее или равное X .

Решение. Найдем первую вероятность (вторая считается аналогично):

$$P(X \leq x | \lfloor X \rfloor) = \varphi(x, \lfloor X \rfloor),$$

где $\varphi(x, n)$ определяется из условий

$$\varphi(x, n) = \begin{cases} \frac{P(X \leq x, n \leq X < n+1)}{P(n \leq X < n+1)}, & P(n \leq X < n+1) \neq 0, \\ 0, & P(n \leq X < n+1) = 0. \end{cases} \quad \square$$

37. Пусть X — случайная величина, имеющая геометрическое распределение:

$$P(X = n) = p q^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq p \leq 1, \quad q = 1 - p. \quad (*)$$

Показать, что для $m, n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$P(X > n + m | X > n) = P(X > m). \quad (**)$$

Доказать также обратное утверждение: если дискретная случайная величина, принимающая значения в $\mathbb{N}$, удовлетворяет свойству (**), то она имеет геометрическое распределение (*).

Решение. Соотношение (**) устанавливается прямой проверкой. Обратимся ко второй части задачи. Обозначая $f(\cdot) = P(X > \cdot)$, находим, что $f(n + m) = f(n)f(m)$ и $f(n) = f(1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, для натуральных n при $q = f(1)$ и $p = 1 - q$ имеем

$$P(X > n + 1) - P(X > n) = P(X = n + 1) = p q^n. \quad \square$$

38. (а) Если случайная величина X распределена по экспоненциальному закону, то выполнено свойство *отсутствия последействия*:

$$P(X > x + y | X > x) = P(X > y), \quad x, y \geq 0.$$

Показать, что если для неотрицательной расширенной (т. е. со значениями в $[0, \infty]$) случайной величины X выполнено сформулированное свойство, то имеет место один из трех случаев: или $P(X = 0) = 1$, или $P(X = \infty) = 1$, или X имеет экспоненциальное распределение.

(b) Пусть теперь $P(X > x) > 0$, $x \geq 0$, и для любого $y \geq 0$ существует положительный предел

$$P(X > x + y | X > x) \rightarrow f(y), \quad x \rightarrow \infty.$$

Показать, что $f(y) = e^{-\lambda y}$ для некоторого $\lambda \geq 0$ и $P(X > x) = e^{-\lambda x + o(x)}$ при росте x (*отсутствие последствий на бесконечности*).

Решение. (a) Обозначая $f(x) = P(X > x)$, приходим к уравнению $f(x + y) = f(x)f(y)$, которое, в частности, гарантирует, что $f(nx) = f(x)^n$ и $f(q) = f(1)^q$ для $n \in \mathbb{N}$, $x \geq 0$ и $q \in \mathbb{Q}$. Нетрудно доказать, что указанное уравнение в классе непрерывных справа неотрицательных ограниченных единиц функций имеет лишь следующие решения: или $f(x) \equiv 0$, или $f(x) \equiv 1$, или $f(x) = e^{-\lambda x}$ с некоторым $\lambda > 0$.

(b) Из соотношения

$$\begin{aligned} P(X > x + y + z | X > x + y)P(X > x + y | X > x) = \\ = P(X > x + y + z | X > x) \end{aligned}$$

следует, как и раньше, что $f(y + z) = f(y)f(z)$, $y, z \geq 0$. Кроме того, функция f не возрастает и ограничена единицей. При этом f должна быть непрерывной функцией на $\mathbb{R}_+$. Действительно, если она разрывна в точке z_0 , то она разрывна в любой точке $y + z_0 \geq z_0$ (по условию $f(y) > 0$ для всех $y \geq 0$). Последнее невозможно, так как монотонная функция имеет не более чем счетное число точек разрыва. Рассуждая, как в п. (a), приходим к равенству $f(y) = e^{-\lambda y}$, $y \geq 0$, для некоторого $\lambda > 0$.

Пусть теперь $P(X > x) = L(x)e^{-\lambda x}$. Тогда $L(x) > 0$ и при $y \geq 0$ имеем

$$\frac{L(x + y)}{L(x)} \rightarrow 1, \quad x \rightarrow \infty.$$

Другими словами, $L(x + 1)/L(x) \leq e^\varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$ начиная с некоторого x_ε . При $x > x_\varepsilon + 1$ имеем

$$\begin{aligned} L(x) = \frac{L(x)}{L(x-1)} \cdots \frac{L(x-n+1)}{L(x-n)} L(x-n) \leq \sup_{0 \leq y - x_\varepsilon \leq 1} L(y) \cdot e^{\varepsilon x}, \\ n = [x - x_\varepsilon], \end{aligned}$$

где $[x]$ — целая часть числа x . С помощью последней оценки легко устанавливается, что $\ln L(x) = o(x)$ при больших x . $\square$

39. Пусть случайные величины X и Y имеют конечные моменты второго порядка. Показать, что $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(X, E(Y|X))$. Доказать также, что $DX \leq DX Y$, когда $E(Y|X) = 1$.

Решение. Используя тот факт, что $EXY = EXE(Y|X)$ и $EY = EE(Y|X)$, получаем первое равенство. Кроме того, имеем $EXY = EX$ и

$$EX^2Y^2 = EX^2E(Y^2|X) \geq EX^2[E(Y|X)]^2 = EX^2,$$

что и приводит к искомой оценке. $\square$

§ 8. Случайные величины. II

1. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — н. о. р. случайные величины, распределенные по закону Коши с плотностью

$$\frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Показать, что

$$\frac{M_n}{n} \xrightarrow{d} \frac{1}{T},$$

где $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, а величина T имеет экспоненциальное распределение с параметром $1/\pi$.

Решение. Заметим, что при всех $x \leq 0$ выполняется соотношение

$$P(M_n \leq nx) \leq P(M_n \leq 0) = \frac{1}{2^n} \rightarrow 0.$$

При $x > 0$ имеем

$$P(M_n \leq nx) = \left(\frac{\operatorname{arctg} nx}{\pi} + \frac{1}{2} \right)^n.$$

Рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \quad \text{при } z > 0 \quad \text{и} \quad f(0) = 0.$$

Поскольку $f'(z) = -z^{-2}(\pi + \pi z^{-2})^{-1}$, получаем, что

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \frac{-z}{1+z^2} + o(z), \quad z \rightarrow 0.$$

Поэтому

$$P(M_n \leq nx) = \left[1 - \frac{1}{\pi} \frac{1}{nx + (nx)^{-1}} + o\left(\frac{1}{nx}\right) \right]^n \rightarrow e^{-\frac{1}{\pi x}} = P(T \geq 1/x). \quad \square$$

2. Пусть $X_1, \dots, X_n$, $n \geq 2$, — н. о. р. случайные величины с функцией распределения $F(x)$ (и плотностью $f(x)$, если таковая существует)

и $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, $m_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}$, $R_n = M_n - m_n$. Показать, что

$$F_{m_n, M_n}(x, y) = P(m_n \leq x, M_n \leq y) = \begin{cases} F(y)^n - [F(y) - F(x)]^n, & y > x, \\ F(y)^n, & y \leq x, \end{cases}$$

$$f_{m_n, M_n}(x, y) = n(n-1)[F(y) - F(x)]^{n-2} f(x) f(y) I(y \geq x),$$

$$F_{R_n}(x) = n I(x \geq 0) \int_{\mathbb{R}} [F(y) - F(y-x)]^{n-1} f(y) dy,$$

$$f_{R_n}(x) = n(n-1) I(x \geq 0) \int_{\mathbb{R}} [F(y) - F(y-x)]^{n-2} f(y-x) f(y) dy.$$

Решение. Используя независимость и одинаковую распределенность случайных величин $X_1, \dots, X_n$, находим, что

$$\begin{aligned} F_{m_n, M_n}(x, y) &= P(m_n \leq x, M_n \leq y) = \\ &= P(M_n \leq y) - P(x < m_n \leq M_n \leq y) = \\ &= P\left(\bigcap_i \{X_i \leq y\}\right) - P\left(\bigcap_i \{x < X_i \leq y\}\right) = \\ &= \begin{cases} F(y)^n - [F(y) - F(x)]^n, & y > x, \\ F(y)^n, & y \leq x. \end{cases} \end{aligned}$$

В случае, когда F — гладкая функция, плотность $f_{m_n, M_n}(x, y)$ ищется по формуле

$$\begin{aligned} f_{m_n, M_n}(x, y) &= (F_{m_n, M_n})''_{xy}(x, y) = \\ &= n(n-1)[F(y) - F(x)]^{n-2} f(x) f(y) I(y > x). \end{aligned}$$

В общем случае, вычисляя интеграл Лебега от функции $f_{m_n, M_n}(x, y)$ по множеству $(-\infty, x] \times (-\infty, y]$, получаем $F_{m_n, M_n}(x, y)$, т. е. $f_{m_n, M_n}(x, y)$ является плотностью случайного вектора (m_n, M_n) . Отсюда следует, что плотность вектора $(M_n - m_n, M_n)$ есть $f_{M_n - m_n, M_n}(y - x, y)$ и, значит, плотность величины R_n равна

$$\begin{aligned} f_{R_n}(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_{m_n, M_n}(y - x, y) dy = \\ &= n(n-1) I(x \geq 0) \int_{\mathbb{R}} [F(y) - F(y-x)]^{n-2} f(y-x) f(y) dy. \end{aligned}$$

Имея плотность $f_{R_n}(x)$, легко найти функцию распределения R_n (равную 0 при $x < 0$):

$$\begin{aligned}
 F_{R_n}(x) &= \int_{-\infty}^x f_{R_n}(z) dz = \\
 &= \int_0^x dz \int_{\mathbb{R}} n(n-1)[F(y) - F(y-z)]^{n-2} f(y-z) f(y) dy = \\
 &= \int_{\mathbb{R}} f(y) dy \int_0^x n(n-1)[F(y) - F(y-z)]^{n-2} f(y-z) dz = \\
 &= \int_{\mathbb{R}} n f(y) dy \int_0^x (n-1)[F(y) - F(y-z)]^{n-2} f(y-z) dz = \\
 &= n \int_{\mathbb{R}} [F(y) - F(y-x)]^{n-1} f(y) dy,
 \end{aligned}$$

где $x \geq 0$. □

3. Пусть X и Y — независимые пуассоновские случайные величины с параметрами $\lambda > 0$ и $\mu > 0$ соответственно. Показать, что

- (а) $X + Y$ имеет пуассоновское распределение с параметром $\lambda + \mu$,
 (б) распределение X условно на $X + Y$ является биномиальным:

$$P(X = k | X + Y = n) = C_n^k \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n,$$

- (с) $X - Y$ имеет следующее распределение:

$$P(X - Y = k) = e^{-(\lambda + \mu)} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{k/2} I_k(2\sqrt{\lambda\mu}), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где

$$I_k(2x) = x^k \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{2r}}{r! \Gamma(k+r+1)}$$

есть модифицированная функция Бесселя первого рода порядка k .

Решение. Пункты (а) и (б) устанавливаются прямой проверкой:

$$\begin{aligned}
 P(X + Y = n) &= \sum_{k=0}^n P(X = k, Y = n - k) = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \cdot \frac{\mu^{n-k} e^{-\mu}}{(n-k)!} = \\
 &= \frac{e^{-(\lambda + \mu)}}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k \lambda^k \mu^{n-k} = e^{-(\lambda + \mu)} \cdot \frac{(\lambda + \mu)^n}{n!},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(X = k | X + Y = n) &= \frac{P(X = k, Y = n - k)}{P(X + Y = n)} = \\
 &= \frac{\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \cdot \frac{\mu^{n-k} e^{-\mu}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda+\mu)} \cdot \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}} = C_n^k \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} \right)^{n-k}.
 \end{aligned}$$

Один из способов доказательства утверждения (с) основан на рассмотрении производящей функции величины $X - Y$ с представлением ее в виде ряда (см. детали в § 3 приложения). $\square$

4. (См. [66].) Пусть X_λ — пуассоновская случайная величина с параметром $\lambda > 0$.

(а) Доказать неравенства

$$\begin{aligned}
 P(X_\lambda \leq n) &\leq \frac{\lambda}{\lambda - n} \cdot P(X_\lambda = n), \quad 0 \leq n < \lambda, \\
 P(X_\lambda \geq n) &\leq \frac{n+1}{n+1-\lambda} \cdot P(X_\lambda = n), \quad n > \lambda - 1,
 \end{aligned}$$

Замечание. Из этих неравенств, в частности, вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(X_\lambda \geq n)}{P(X_\lambda = n)} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{P(X_\lambda \leq n)}{P(X_\lambda = n)} = 1.$$

Другими словами, основная «масса» пуассоновского распределения на отрезке $[0, n]$ при $\lambda \gg n$ (« $\gg$ » — значительно больше) сосредоточена в крайней точке $\{n\}$. Если же теперь $n \gg \lambda$, то на луче $[n, \infty)$ почти вся «масса» будет сосредоточена в точке $\{n\}$.

(b) В силу *центральной предельной теоремы для пуассоновского распределения*

$$\frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{d} \xi, \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

где $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Показать, однако, что при любом фиксированном $\lambda > 0$ выполняется соотношение

$$\frac{P(X_\lambda \geq n)}{P(\sqrt{\lambda}\xi \geq n - \lambda)} \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Решение. (а) Имеем

$$\begin{aligned}
 P(X_\lambda \geq n) &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \left[1 + \frac{\lambda}{n+1} + \frac{\lambda^2}{(n+1)(n+2)} + \dots \right] \leq \\
 &\leq e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \left[1 + \frac{\lambda}{n+1} + \frac{\lambda^2}{(n+1)^2} + \dots \right] = \\
 &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \left[1 - \frac{\lambda}{n+1} \right]^{-1} = \frac{n+1}{n+1-\lambda} \cdot P(X = n).
 \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} P(X_\lambda \leq n) &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \left[1 + \frac{n}{\lambda} + \frac{n(n-1)}{\lambda^2} + \dots + \frac{n!}{\lambda^n} \right] \leq \\ &\leq e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \left[1 + \frac{n}{\lambda} + \frac{n^2}{\lambda^2} + \dots \right] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \left[1 - \frac{n}{\lambda} \right]^{-1} = \frac{\lambda}{\lambda - n} \cdot P(X = n). \end{aligned}$$

(b) Вследствие замечания к п. (a) с учетом асимптотики хвоста функции распределения величины ξ имеем

$$\frac{P(X_\lambda \geq n)}{P(\xi \geq n/\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda})} \sim \frac{\frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}}{\frac{e^{-(n/\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda})^2/2}}{\sqrt{2\pi}(n/\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda})}}} = \sqrt{2\pi} e^{\frac{n^2}{2\lambda} - \lambda/2 - n} \lambda^{n-1/2} \frac{n - \lambda}{n!}.$$

Последнее выражение, конечно, стремится к ∞ с ростом n , так как главный вклад будет давать величина $e^{n^2/(2\lambda)}$, а все остальные сомножители (в том числе и $1/n!$) будут порядка $e^{O(n \ln n)}$. $\square$

5. Пусть X, Y — произвольные случайные векторы (в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$). Величина

$$\rho^*(X, Y) = \sup \rho(f(X), g(Y)),$$

где супремум берется по всем борелевским функциям $f = f(x)$ и $g = g(y)$, для которых коэффициент корреляции $\rho(f(X), g(Y))$ определен, называется *максимальным коэффициентом корреляции векторов X и Y* .

(a) Установить следующие представления для $\rho^*(X, Y)$:

$$\rho^*(X, Y) = \sup E f(X) g(Y) = \sup \sqrt{E|E(f(X)|Y)|^2},$$

где $\sup$ берется по всем таким функциям f и g (или просто f), что

$$E f(X) = E g(Y) = 0, \quad E|f(X)|^2 = E|g(Y)|^2 = 1.$$

(b) Показать, что случайные векторы X и Y независимы тогда и только тогда, когда

$$\rho^*(X, Y) = 0.$$

(c) Предполагая, что $X = (X_1, X_2)$ и $Y = (Y_1, Y_2)$, причем пары случайных величин (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2) независимы между собой, доказать, что

$$\rho^*((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)) = \max\{\rho^*(X_1, Y_1), \rho^*(X_2, Y_2)\}.$$

(См. задачи II.11.1, II.7.24, II.7.3.)

Замечание. Если величины X, Y совместно гауссовские, то в силу *неравенства Гебелейна* из задачи II.13.65 имеем

$$\rho^*(X, Y) = |\rho(X, Y)|.$$

Решение. (а) Первое равенство очевидно. Докажем второе равенство

$$\rho^*(X, Y)^2 = \sup \mathbb{E}|\mathbb{E}(f(X)|Y)|^2.$$

Выбирая $g(Y) = \lambda \mathbb{E}[f(X)|Y]$ при $\lambda = 1/\sqrt{\mathbb{E}|\mathbb{E}[f(X)|Y]|^2}$, находим, что

$$\mathbb{E}f(X)g(Y) = \mathbb{E}g(Y)\mathbb{E}[f(X)|Y] = \sqrt{\mathbb{E}|\mathbb{E}[f(X)|Y]|^2}.$$

Иными словами,

$$\rho^*(X, Y) \geq \sqrt{\mathbb{E}|\mathbb{E}[f(X)|Y]|^2}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}f(X)g(Y) &= \mathbb{E}g(Y)\mathbb{E}[f(X)|Y] \leq \sqrt{\mathbb{E}|g(Y)|^2} \sqrt{\mathbb{E}|\mathbb{E}[f(X)|Y]|^2} = \\ &= \sqrt{\mathbb{E}|\mathbb{E}[f(X)|Y]|^2}, \end{aligned}$$

и, значит, $\rho^*(X, Y) \leq \sqrt{\mathbb{E}|\mathbb{E}[f(X)|Y]|^2}$, откуда уже вытекает искомое представление.

(b) *Необходимость* очевидна. Для доказательства *достаточности* положим $f(X) = I(X \in A)$, $g(Y) = I(Y \in B)$, где A, B — произвольные борелевские множества. Из свойства $\sup \rho^*(f(X), g(Y)) = 0$ можно заключить, что

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) - \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B) = \text{cov}(I(X \in A), I(Y \in B)) = 0.$$

В силу произвольности A и B это означает независимость X и Y .

(с) Рассмотрим коэффициент $\rho^*((X_1, X_2), (Y_1, Y_2))$. Очевидно,

$$\rho^*((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)) \geq \max\{\rho^*(X_1, Y_1), \rho^*(X_2, Y_2)\}.$$

Покажем, что имеет место обратное неравенство. Возьмем любую такую борелевскую функцию $h = h(x_1, x_2)$, что $\mathbb{E}|h(X_1, X_2)|^2 = 1$ и $\mathbb{E}h(X_1, X_2) = 0$. Ввиду задачи II.11.1 для некоторых констант (a_{mn}) и некоторых ортонормированных систем $(f_m(X_1))$ и $(g_n(X_2))$, для ко-

торых $f_1 \equiv g_1 \equiv 1$, п. н. справедливо представление

$$h(X_1, X_2) = \sum_{m, n \geq 1} a_{mn} f_m(X_1) g_n(X_2)$$

(ряд сходится в L^2), причем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} f_m(X_1) &= \mathbb{E} g_n(X_2) = 0 \quad (m, n > 1), \\ \mathbb{E} |h(X_1, X_2)|^2 &= \sum_{m, n \geq 1} a_{mn}^2 = 1 \quad \text{и} \quad \mathbb{E} h(X_1, X_2) = a_{11} = 0. \end{aligned}$$

В силу задач II.7.24 и II.7.3 с вероятностью единица имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h(X_1, X_2)|Y_1, Y_2] &= \sum_{m, n \geq 1} a_{nm} \mathbb{E}[f_m(X_1) g_n(X_2)|Y_1, Y_2] = \\ &= \sum_{m, n \geq 1} a_{nm} \mathbb{E}[f_m(X_1)|Y_1] \mathbb{E}[g_n(X_2)|Y_2] = \sum_{m \geq 1} b_m(Y_2) \mathbb{E}[f_m(X_1)|Y_1], \end{aligned}$$

где $b_m(Y_2) = \sum_{n \geq 1} a_{mn} \mathbb{E}[g_n(X_2)|Y_2] = \mathbb{E}[\sum_{n \geq 1} a_{mn} g_n(X_2)|Y_2]$ (все ряды сходятся в L^2). Заметим, далее, что, во-первых,

$$\mathbb{E} |\mathbb{E}(h(X_1, X_2)|Y_1, Y_2)|^2 = \mathbb{E} |b_1(Y_2)|^2 + \mathbb{E} \left| \sum_{m > 1} b_m(Y_2) \mathbb{E}[f_m(X_1)|Y_1] \right|^2$$

в силу соотношений

$$\mathbb{E} b_1(Y_2) \sum_{m > 1} b_m(Y_2) \mathbb{E}[f_m(X_1)|Y_1] = \sum_{m > 1} \mathbb{E} b_1(Y_2) b_m(Y_2) \mathbb{E} f_m(X_1) = 0.$$

Кроме того, учитывая равенства $a_{11} = 0$,

$$\mathbb{E} \left| \sum_{n > 1} a_{1n} g_n(X_2) \right|^2 = \sum_{n > 1} a_{1n}^2 \quad \text{и} \quad \mathbb{E} \sum_{n > 1} a_{1n} g_n(X_2) = 0,$$

находим, что

$$\mathbb{E} |b_1(Y_2)|^2 = \mathbb{E} \left| \mathbb{E} \left[\sum_{n > 1} a_{1n} g_n(X_2) | Y_2 \right] \right|^2 \leq |\rho^*(X_2, Y_2)|^2 \sum_{n > 1} a_{1n}^2.$$

При этом также имеет место неравенство

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left| \sum_{m \geq 1} b_m(Y_2) \mathbb{E}[f_m(X_1) | Y_1] \right|^2 &= \\
 &= \mathbb{E} \sum_{m \geq 1} b_m^2(Y_2) \cdot \mathbb{E} \left| \frac{\sum_{m \geq 1} b_m(y) \mathbb{E}[f_m(X_1) | Y_1]}{\sqrt{\sum_{m \geq 1} b_m^2(y)}} \right|^2 \Big|_{y=Y_2} \leq \\
 &\leq |\rho^*(X_1, Y_1)|^2 \cdot \mathbb{E} \sum_{m \geq 1} b_m^2(Y_2) \leq \\
 &\leq |\rho^*(X_1, Y_1)|^2 \cdot \sum_{m \geq 1} \mathbb{E} \left(\sum_{n \geq 1} a_{nm} g_n(X_2) \right)^2 = \\
 &= |\rho^*(X_1, Y_1)|^2 \cdot \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} a_{mn}^2.
 \end{aligned}$$

Итак, мы доказали, что

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} |\mathbb{E}(h(X_1, X_2) | Y_1, Y_2)|^2 &\leq \\
 &\leq |\rho^*(X_1, Y_1)|^2 \cdot \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} a_{mn}^2 + |\rho^*(X_2, Y_2)|^2 \sum_{n \geq 1} a_{1n}^2 \leq \\
 &\leq \max\{|\rho^*(X_1, Y_1)|^2, |\rho^*(X_2, Y_2)|^2\} \sum_{m, n \geq 1} a_{mn}^2 = \\
 &= \max \{|\rho^*(X_1, Y_1)|^2, |\rho^*(X_2, Y_2)|^2\}.
 \end{aligned}$$

Взяв $\sup$ по h , видим, что

$$\rho^*((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)) \leq \max\{\rho^*(X_1, Y_1), \rho^*(X_2, Y_2)\},$$

что и требовалось доказать. $\square$

6. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — две σ -подалгебры в $\mathcal{F}$. Пусть также $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ для любой σ -алгебры $\mathcal{G}$ есть пространство $\mathcal{G}$ -измеримых случайных величин с конечным вторым моментом.

Положим

$$\rho^*(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup |\rho^*(\xi, \zeta)|,$$

где $\rho^*(\xi, \zeta)$ — коэффициент корреляции величин ξ и ζ , а супремум берется по всем случайным величинам $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ и $\zeta \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$.

(а) Показать, что если $\mathcal{A} = \sigma(X)$ и $\mathcal{B} = \sigma(Y)$, где X и Y — некоторые случайные величины на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, то

$$\rho^*(\sigma(X), \sigma(Y)) = \rho^*(X, Y).$$

(b) Пусть $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A}_i, i = 1, 2)$, $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{B}_i, i = 1, 2)$, причем σ -алгебры $\sigma(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i)$, $i = 1, 2$, являются *независимыми* (здесь под $\sigma(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ понимается наименьшая σ -алгебра, порожденная множествами $E \in \mathcal{E}$ и $G \in \mathcal{G}$). Показать, что

$$\rho^*(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \max\{\rho^*(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1), \rho^*(\mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2)\}.$$

Решение. (a) Равенство $\rho^*(\sigma(X), \sigma(Y)) = \rho^*(X, Y)$ следует из того факта, что любая $\sigma(\xi)$ -измеримая случайная величина ζ представляется в виде $\zeta = f(\xi)$ для некоторой борелевской функции f .

(b) Соотношение устанавливается теми же рассуждениями, что и в задаче II.8.5. $\square$

7. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — две σ -подалгебры. Введем следующие *коэффициенты перемешивания* (супремум берется по всем множествам $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{B}$):

$$\begin{aligned}\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) &= \sup |P(AB) - P(A)P(B)|, \\ \varphi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) &= \sup |P(B|A) - P(B)|, \quad P(A) > 0, \\ \psi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) &= \sup \left| \frac{P(AB)}{P(A)P(B)} - 1 \right|, \quad P(A)P(B) > 0.\end{aligned}$$

Пусть также

$$\begin{aligned}\beta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) &= \sup \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |P(A_i B_j) - P(A_i)P(B_j)|, \\ \mathcal{I}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) &= \sup \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(A_i B_j) \ln \frac{P(A_i B_j)}{P(A_i)P(B_j)}, \quad 0/0 = 0 \ln 0 = 0,\end{aligned}$$

где супремум берется по всем парам конечных разбиений $\{A_1, \dots, A_n\}$ и $\{B_1, \dots, B_m\}$, $A_i \in \mathcal{A}$, $B_j \in \mathcal{B}$ для всех $i \leq n$, $j \leq m$ и $n, m \geq 1$.

С учетом коэффициента $\rho^*(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, введенного в задаче II.8.6, доказать справедливость следующих неравенств:

$$\begin{aligned}2\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) &\leq \beta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq \varphi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq \psi(\mathcal{A}, \mathcal{B})/2, \\ 4\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) &\leq \rho^*(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq \psi(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \\ \rho^*(\mathcal{A}, \mathcal{B}) &\leq 2\sqrt{\varphi(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \sqrt{\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{A})}, \\ \sqrt{2}\beta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) &\leq \sqrt{\mathcal{I}(\mathcal{A}, \mathcal{B})}.\end{aligned}$$

(См. задачу II.6.67.)

Решение. Неравенство $2\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq \beta(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ вытекает из того, что

$$P(A^i B^j) - P(A^i)P(B^j) = (-1)^{i+j} \text{cov}(I_A, I_B), \quad 0 \leq i, j \leq 1,$$

для всех событий A, B (здесь $C^0 = \bar{C}$ и $C^1 = C$), а также из того, что $(A, \bar{A})$ и $(B, \bar{B})$ образуют разбиения множества Ω . Аналогично устанавливается, что

$$4\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq \rho^*(\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

В самом деле, в силу упомянутых выше соотношений

$$4|P(AB) - P(A)P(B)| = |\text{cov}(I_A - I_{\bar{A}}, I_B - I_{\bar{B}})| \leq \rho^*(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

(мы учли, что $D(I_A - I_{\bar{A}}) \leq E(I_A - I_{\bar{A}})^2 = 1$ и $D(I_B - I_{\bar{B}}) \leq 1$).

Далее, если $P(B) > 1/2$ (и $P(A) > 0$), то

$$\left| \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)P(B)} - 1 \right| \geq 2|P(\bar{B}|A) - P(\bar{B})| = 2|P(B|A) - P(B)|.$$

Если же $0 < P(B) \leq 1/2$, то

$$\left| \frac{P(A \cap B)}{P(A)P(B)} - 1 \right| \geq 2|P(B|A) - P(B)|.$$

Из указанных соотношений с необходимостью следует, что

$$2\varphi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq \psi(\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

Пусть события (A_i) и (B_j) такие же, как в определении коэффициента $\beta(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Тогда (считая без ограничения общности, что $P(A_i) > 0$) получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |P(A_i \cap B_j) - P(A_i)P(B_j)| &= \sum_{i=1}^n P(A_i) \sum_{j=1}^m |P(B_j|A_i) - P(B_j)| \leq \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m |P(B_j|A_i) - P(B_j)|. \end{aligned}$$

Кроме того, для всякого такого события $A \in \mathcal{A}$, что $P(A) > 0$, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m |P(B_j|A) - P(B_j)| &= \\ &= \left| P\left(\bigcup_{j \in J_-} B_j | A\right) - P\left(\bigcup_{j \in J_-} B_j\right) \right| + \left| P\left(\bigcup_{j \in J_+} B_j | A\right) - P\left(\bigcup_{j \in J_+} B_j\right) \right| \leq \\ &\leq 2\varphi(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \end{aligned}$$

где

$$J_- = \{j: P(B_j|A) < P(B_j)\}, \quad J_+ = \{j: P(B_j|A) \geq P(B_j)\}.$$

Отсюда уже вытекает неравенство $\beta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq \varphi(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Выведем теперь неравенство, связывающее ρ^* и φ . Рассмотрим простые функции

$$\xi = \sum_{i=1}^n a_i I_{A_i} \quad \text{и} \quad \eta = \sum_{j=1}^m b_j I_{B_j},$$

для которых $E\xi = E\eta = 0$ и

$$E\xi^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 P(A_i) = 1, \quad E\eta^2 = \sum_{j=1}^m b_j^2 P(B_j) = 1,$$

где (A_i) и (B_j) такие же, как в определении коэффициента $\beta(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ (считаем, что $P(A_i), P(B_j) > 0$). По неравенству Коши—Буняковского

$$\begin{aligned} |\operatorname{cov}(\xi, \eta)| &\leq \sum_{i,j} |a_i| |b_j| |P(A_i B_j) - P(A_i)P(B_j)| \leq \\ &\leq \left(\sum_{i,j} a_i^2 |P(A_i B_j) - P(A_i)P(B_j)| \right)^{1/2} \times \\ &\quad \times \left(\sum_{i,j} b_j^2 |P(A_i B_j) - P(A_i)P(B_j)| \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\sum_i a_i^2 P(A_i) \sum_j |P(B_j|A_i) - P(B_j)| \right)^{1/2} \times \\ &\quad \times \left(\sum_j b_j^2 P(B_j) \sum_i |P(A_i|B_j) - P(A_i)| \right)^{1/2} \leq \\ &\leq 2\sqrt{\varphi(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \sqrt{\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{A})}. \end{aligned}$$

К тому же

$$\begin{aligned} |\operatorname{cov}(\xi, \eta)| &\leq \sum_{i,j} |a_i| |b_j| P(A_i)P(B_j) \left| \frac{P(A_i B_j)}{P(A_i)P(B_j)} - 1 \right| = \\ &= \psi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) E|\xi| E|\eta| \leq \psi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \sqrt{E\xi^2} \sqrt{E\eta^2} = \psi(\mathcal{A}, \mathcal{B}). \end{aligned}$$

Взяв в полученных неравенствах суп по ξ, η , найдем, что

$$\rho^*(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq 2\sqrt{\varphi(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \sqrt{\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{A})} \quad \text{и} \quad \rho^*(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq \psi(\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

Для вывода последнего неравенства $2\beta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq \sqrt{\mathcal{I}(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$ введем такую вспомогательную величину X , что

$$P\left(X = 1 - \frac{P(A_i)P(B_j)}{P(A_i B_j)}\right) = P(A_i B_j), \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m,$$

где, как и раньше, (A_i) и (B_j) фигурируют в определении коэффициентов $\beta(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ и $\mathcal{I}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ (причем без ограничения общности $P(A_i), P(B_j) > 0$). Тогда ввиду задачи II.6.67 имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j} |P(A_i B_j) - P(A_i)P(B_j)| \right)^2 &= \frac{(E|X|)^2}{2} \leq -E \ln(1 - X) = \\ &= \sum_{i,j} P(A_i B_j) \ln \frac{P(A_i B_j)}{P(A_i)P(B_j)}. \end{aligned}$$

Взяв $\sup$ по (A_i) и (B_j) , получим неравенство $2\beta(\mathcal{A}, \mathcal{B})^2 \leq \mathcal{I}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. $\square$

8. Пусть X и Y — независимые случайные величины, равномерно распределенные на $[0, 1]$. Рассмотрим величину $Z = |X - Y|$. Доказать, что распределение $F_Z(z)$ имеет плотность $f_Z(z)$ и $f_Z(z) = 2(1 - z)$, $z \in [0, 1]$.

Отсюда, в частности, можно заключить, что $EZ = 1/3$.

Решение. Совместная плотность величин U и Y равна $f(u + y)f(y)$, где $U = X - Y$, а f — плотность величин X, Y . Вычислим плотность $f_U(u)$ при $u \in [0, 1]$:

$$f_U(u) = \int_{\mathbb{R}} f(u + y)f(y) dy = \int_0^{1-u} dy = 1 - u.$$

Величина U симметрична, и $|U| = Z \leq 1$ п. н., откуда легко найти плотность величины Z :

$$f_Z(z) = f_U(z) + f_U(-z) = 2f_U(z) = 2(1 - z), \quad z \in [0, 1]. \quad \square$$

9. (*Полярный метод.*) Пусть случайный вектор (U, V) имеет равномерное распределение на единичном круге с центром в нуле. Положим

$$(X, Y) = (U, V) \sqrt{-\frac{2 \ln(U^2 + V^2)}{U^2 + V^2}}.$$

Показать, что X и Y независимы и имеют распределение $\mathcal{N}(0, 1)$.

Решение. Переходя к полярным координатам

$$(U, V) = \rho(\cos \theta, \sin \theta),$$

видим, что совместная плотность преобразуется к виду

$$\pi^{-1} I(u^2 + v^2 \leq 1) \longrightarrow 2r I(r \in [0, 1]) \cdot (2\pi)^{-1} I(\theta \in [0, 2\pi]),$$

т. е. θ равномерно распределено на $[0, 2\pi]$, ρ имеет плотность $2r$ и не зависит от θ . Отсюда следует, что ρ^2 равномерно распределено на $[0, 1]$ и не зависит от θ . Таким образом, задача сводится к задаче II.8.10. $\square$

10. Пусть U и V — независимые случайные величины с равномерным распределением на $(0, 1)$. Определим *преобразование Бокса—Мюллера*

$$X = \sqrt{-2 \ln V} \cos(2\pi U), \quad Y = \sqrt{-2 \ln V} \sin(2\pi U).$$

Показать, что X и Y независимы и $\mathcal{N}(0, 1)$ -распределены.

Решение. Утверждение вытекает из формулы преобразования совместной плотности при гладкой замене координат. $\square$

11. Пусть положительная случайная величина R имеет *распределение Рэлея*, т. е. для некоторого $\sigma^2 > 0$ плотность R задается формулой

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, \quad r > 0.$$

Пусть также θ — не зависящая от R случайная величина с равномерным распределением на $(\alpha, \alpha + 2\pi k)$, где $k \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in [0, 2\pi)$. Показать, что величины $X = R \cos \theta$ и $Y = R \sin \theta$ независимы и имеют нормальное распределение $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Убедиться, что плотности распределения величин $\cos \theta$ и $\sin \theta$ совпадают и равны

$$\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in [-1, 1].$$

Решение. Заметим, что

$$\cos \theta = \cos 2\pi \left\{ \frac{\theta}{2\pi} \right\}, \quad \sin \theta = \sin 2\pi \left\{ \frac{\theta}{2\pi} \right\}$$

и

$$2\pi \left\{ \frac{\theta}{2\pi} \right\} \stackrel{d}{=} 2\pi \left\{ \frac{\theta - \alpha}{2\pi} \right\} \stackrel{d}{=} \varphi,$$

где φ имеет равномерное распределение на $[0, 2\pi)$. Поэтому для всех $x \in [-1, 1]$ имеем

$$\begin{aligned} P(\cos \theta \leq x) &= P(\cos \varphi \leq x) = P(\varphi \in [\arccos x, 2\pi - \arccos x]) = \\ &= \frac{2\pi - 2 \arccos x}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \end{aligned}$$

т. е. плотность величины $\cos \theta$ равна

$$\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in [-1, 1].$$

Аналогично находится плотность для $\sin \theta$.

Далее без ограничения общности можно считать, что $\theta (= \varphi)$ равномерно распределено на $[0, 2\pi)$. Требуемое утверждение о распределении вектора (X, Y) вытекает из формулы преобразования плотности при замене координат $(R, \theta) \rightarrow (R \cos \theta, R \sin \theta)$. В данном случае следует рассмотреть обратную к полярной замену координат. $\square$

12. Привести пример гауссовских величин ξ и η , сумма которых $\xi + \eta$ имеет негауссовское распределение.

Решение. Пусть ξ имеет нормальное распределение $\mathcal{N}(0, 1)$ и $\eta = \zeta \xi$ для бернуллиевской величины ζ , не зависящей от ξ и такой, что $P(\zeta = -1) = P(\zeta = 1) = 1/2$. Тогда

$$P(\eta \leq x) = \frac{P(\xi \leq x)}{2} + \frac{P(-\xi \leq x)}{2} = P(\xi \leq x),$$

т. е. $\eta \stackrel{d}{=} \xi$. При этом $P(\xi + \eta = 0) = 1/2$, что для гауссовской величины $\xi + \eta$ невозможно. $\square$

13. Пусть $F = F(x)$ — функция распределения. Показать, что для всякого $a > 0$ функции

$$G(x) = \frac{1}{a} \int_x^{x+a} F(u) du \quad \text{и} \quad H(x) = \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} F(u) du$$

также являются функциями распределения.

Решение. Пусть величина ξ распределена в соответствии с функцией распределения F , а η независимо с ξ и имеет равномерное распределение на $[0, 1]$. Тогда G — это функция распределения величины $\xi + a\eta$, а H — величины $\xi + 2a\eta - a$ (проверяется с помощью формулы свертки). $\square$

14. Пусть $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

(а) Найти плотность распределения величины $Y = X^{1/\alpha}$, $\alpha > 0$, называемого *распределением Вейбулла*.

(б) Найти плотность распределения величины $Y = \ln X$, называемого *двойным экспоненциальным распределением*.

(с) Показать, что целая $[X]$ и дробная $\{X\}$ части случайной величины X являются независимыми. Найти распределения этих величин.

Решение. (а) Функция распределения величины Y равна

$$P(Y \leq y) = P(X \leq y^\alpha) = 1 - e^{-\lambda y^\alpha}, \quad y > 0.$$

Дифференцируя ее, получаем формулу плотности величины Y :

$$f(y) = \lambda \alpha y^{\alpha-1} e^{-\lambda y^\alpha} I(y \geq 0).$$

(b) Функция распределения величины Y равна

$$P(Y \leq y) = P(X \leq e^y) = 1 - e^{-\lambda e^y}.$$

Дифференцируя ее, находим плотность величины Y :

$$f(y) = \lambda e^{y-\lambda e^y}.$$

(c) Имеем

$$\begin{aligned} P([X] = n, \{X\} \leq \alpha) &= P(n \leq X < n + \alpha) = \\ &= e^{-\lambda n} (1 - e^{-\lambda \alpha}) = p(n)q(\alpha), \quad \alpha \in [0, 1), \end{aligned}$$

откуда, в частности, следует, что $[X]$ и $\{X\}$ независимы и

$$P([X] = n) = e^{-\lambda n} (1 - e^{-\lambda}), \quad P(\{X\} \leq \alpha) = \frac{1 - e^{-\lambda \alpha}}{1 - e^{-\lambda}}, \quad \alpha \in [0, 1). \quad \square$$

15. (a) Пусть случайные величины X и Y имеют совместную плотность распределения $f = f(x, y)$ вида $f(x, y) = g(x^2 + y^2)$. Пусть R и θ — полярные координаты:

$$X = R \cos \theta, \quad Y = R \sin \theta.$$

Показать, что R и θ независимы, причем величина θ равномерно распределена на $[0, 2\pi)$.

(b) Пусть

$$\begin{pmatrix} X_\alpha \\ Y_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad \alpha \in [0, 2\pi).$$

Будем говорить, что распределение вектора (X, Y) *инвариантно относительно вращения*, если соотношение $(X_\alpha, Y_\alpha) \stackrel{d}{=} (X, Y)$ справедливо для любых $\alpha \in [0, 2\pi)$.

Доказать, что распределение вектора (X, Y) , обладающее плотностью $f = f(x, y)$, *инвариантно относительно вращения* тогда и только тогда, когда f представляется в виде $f(x, y) = g(x^2 + y^2)$.

Решение. (a) Переходя к полярным координатам, легко вычислить плотность случайного вектора (R, θ) :

$$h(r, \theta) = \begin{cases} r g(r^2), & r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Поскольку h представляется в виде $h(r, \theta) = p(r)q(\theta)$, величины R и θ независимы, причем θ имеет равномерное распределение на $[0, 2\pi)$ (в указанном представлении можно взять $q(\theta) = I(0 \leq \theta < 2\pi)$).

(б) *Достаточность* следует из того, что $X_\alpha^2 + Y_\alpha^2 = X^2 + Y^2$, а также из формулы преобразования плотности при линейных заменах вида $\xi = C\zeta$:

$$f_\zeta(\cdot) = |\det C| f_\xi(C^{-1}\cdot),$$

где ξ, ζ — случайные векторы в $\mathbb{R}^2$, C — невырожденная матрица, f_ξ и f_ζ — плотности случайных величин ξ и ζ соответственно.

Необходимость. Пусть α — случайная величина, независимая от (X, Y) и имеющая равномерное распределение на $[0, 2\pi)$. Плотность вектора (α, X, Y) равна $f(x, y)/(2\pi)$. Отсюда, используя формулу преобразования плотности при гладкой замене координат, получаем плотность вектора $(\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$:

$$h(\alpha, x, y) = \frac{1}{2\pi} f(x_\alpha, y_\alpha), \quad 0 \leq \alpha < 2\pi, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

где вектор (x_α, y_α) получается из (x, y) поворотом на угол α (по часовой стрелке). Все это в свою очередь позволяет вычислить плотность вектора (X_α, Y_α) как

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_\alpha, y_\alpha) d\alpha,$$

которая, очевидно, есть функция $g = g(r^2)$, зависящая только от длины $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ вектора (x, y) . С другой стороны, по предположению при любом фиксированном α справедливо равенство $f(x_\alpha, y_\alpha) = f(x, y)$ (почти всюду по мере Лебега), так что по теореме Фубини имеют место соотношения

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{[0, 2\pi) \times \mathbb{R}^2} |f(x_\alpha, y_\alpha) - f(x, y)| d\alpha dx dy = \\ &= \int_0^{2\pi} d\alpha \iint_{\mathbb{R}^2} |f(x_\alpha, y_\alpha) - f(x, y)| dx dy = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_\alpha, y_\alpha) d\alpha - f(x, y) \right| dx dy \leq \frac{I}{2\pi} = 0.$$

Иначе говоря, $f(x, y) = g(x^2 + y^2)$ почти всюду по мере Лебега. □

16. Пусть $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ — случайный вектор с плотностью $f = f(x_1, \dots, x_n)$. В этих предположениях

$$P\left(\bigcup_{i < j} \{\xi_i = \xi_j\}\right) = \int_{\bigcup_{i < j} \{x_i = x_j\}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 0.$$

Отсюда следует, что с вероятностью единица величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ можно и притом единственным способом переупорядочить по их строгому возрастанию. Если эти новые величины (называемые *порядковыми статистиками*) обозначить $\xi_{1:n}, \dots, \xi_{n:n}$, то с вероятностью единица получим

$$\xi_{1:n} < \dots < \xi_{n:n}.$$

Установить, что плотность $f_{(n)}$ вектора $X_n = (\xi_{(1)}, \dots, \xi_{(n)})$ задается формулой

$$f_{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(i_1, \dots, i_n)} f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) I(x_1 < x_2 < \dots < x_n),$$

где $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ пробегает все перестановки чисел $1, 2, \dots, n$.

Решение. Пусть борелевское множество B таково, что для любого $(x_1, \dots, x_n) \in B$ справедливы неравенства $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Тогда

$$\begin{aligned} P(X_n \in B) &= \sum_{(i_1, \dots, i_n)} P((\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_n}) \in B) = \\ &= \sum_{(j_1, \dots, j_n)} \int_B f(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}) dx_1 \dots dx_n = \int_B \sum_{(j_1, \dots, j_n)} f(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}) dx_1 \dots dx_n, \end{aligned}$$

где $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ — перестановка, обратная к $(i_1, i_2, \dots, i_n)$. Из этого следует, что плотность вектора X_n задается указанной в задаче формулой. $\square$

17. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — н. о. р. случайные величины с непрерывной функцией распределения $F = F(x)$. При этом $P(\xi_i = \xi_j) = 0$, $i \neq j$ (см. задачу II.8.57), поэтому

$$P(\xi_i = \xi_j \text{ для некоторых } i \neq j) = P\left(\bigcup_{i < j} \{\xi_i = \xi_j\}\right) \leq \sum_{i < j} P(\xi_i = \xi_j) = 0.$$

Отсюда следует, что с вероятностью единица

$$\xi_{1:n} < \dots < \xi_{n:n},$$

где $\xi_{1:n}, \dots, \xi_{n:n}$ — порядковые статистики величин $\xi_1, \dots, \xi_n$ (см. задачу II.8.16).

(а) Доказать, что функция распределения $F_{r:n} = F_{r:n}(x)$ величин $\xi_{r:n}$ может быть представлена следующим образом через *неполную* бета-функцию:

$$F_{r:n}(x) = \sum_{i=r}^n C_n^i [F(x)]^i [1 - F(x)]^{n-i} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_0^{F(x)} z^{r-1} (1-z)^{n-r} dz.$$

Предположим теперь, что функция распределения F имеет плотность $f = f(x)$.

Показать, что

(b) плотность распределения вероятностей величины $\xi_{r:n}$ задается формулой

$$\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} F(x)^{r-1} [1 - F(x)]^{n-r} f(x);$$

(с) совместная плотность $f_{r,s:n}(x, y)$ величин $\xi_{r:n}$ и $\xi_{s:n}$ ($r < s$) равна

$$\frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} F(x)^{r-1} [F(y) - F(x)]^{s-r-1} F(y)^{n-s} f(x) f(y)$$

при $x < y$ и равна нулю иначе;

(d) совместная плотность $f_{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ величин $\xi_{1:n}, \dots, \xi_{n:n}$ задается формулой

$$f_{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} n! f(x_1) \dots f(x_n), & \text{если } x_1 < \dots < x_n, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Решение. (а) В силу непрерывности функции $F(x)$, учитывая независимость и одинаковую распределенность величин ξ_i , $1 \leq i \leq n$, получаем формулу для $F_{r:n}$:

$$\begin{aligned} F_{r:n}(x) &= P(\xi_{r:n} \leq x) = \\ &= P(\text{хотя бы } r \text{ из всех величин } \xi_1, \dots, \xi_n \text{ не превосходят } x) = \\ &= \sum_{i=r}^n P(\text{ровно } i \text{ из всех величин } \xi_1, \dots, \xi_n \text{ не превосходят } x) = \\ &= \sum_{i=r}^n \sum_{(l_1, \dots, l_n)} P\left(\bigcup_{j=1}^i \{\xi_{l_j} \leq x\} \cup \bigcup_{j=i+1}^n \{\xi_{l_j} > x\}\right) = \\ &= \sum_{i=r}^n C_n^i [F(x)]^i [1 - F(x)]^{n-i}, \end{aligned}$$

где суммирование ведется по всем перестановкам $(l_1, \dots, l_n)$ чисел $1, \dots, n$, для которых $l_1 < \dots < l_i$ и $l_{i+1} < \dots < l_n$. Требуемое интегральное представление нетрудно вывести с помощью интегрирования по частям (см. задачу II.8.61).

(b) Утверждение следует из интегрального представления $F_{r,n}$, полученного в п. (a).

(c) Существование плотности $f_{r,s;n}(x, y)$ может быть выведено из п. (d). Очевидно, что можно положить $f_{r,s;n}(x, y) = 0$ при $x \geq y$ (так как $P(\xi_{r,n} \geq \xi_{s,n}) = 0$ в силу непрерывности функции F). Посчитаем плотность $f_{r,s;n}(x, y)$ в точке $x < y$. Почти всюду по мере Лебега имеет место соотношение

$$P(x < \xi_{r,n} < x + \Delta, y < \xi_{s,n} < y + \Delta) = f_{r,s;n}(x, y)\Delta^2 + o(\Delta^2), \quad \Delta \downarrow 0.$$

Для малых $\Delta > 0$ будет выполнено неравенство $x + \Delta < y$ и, кроме того,

$$P(\text{интервалы } (x, x + \Delta) \text{ и } (y, y + \Delta) \text{ содержат более двух величин } \xi_i, 1 \leq i \leq n) = o(\Delta^2).$$

Отсюда следует, что для почти всех $x < y$ (по мере Лебега) выполняется равенство

$$P(x < \xi_{r,n} < x + \Delta, y < \xi_{s,n} < y + \Delta) = P(A_{xy}^\Delta) + o(\Delta^2),$$

где A_{xy}^Δ — событие, заключающееся в том, что в семействе $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ ровно $r - 1$ величин не превосходят x , ровно $s - r - 1$ величин лежат в отрезке $[x + \Delta, y]$ и ровно $n - s$ величин не меньше $y + \Delta$. В итоге заключаем, что

$$\begin{aligned} P(A_{xy}^\Delta) &= \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} F(x)^{r-1} [F(x + \Delta) - F(x)] \times \\ &\quad \times [F(y) - F(x + \Delta)]^{s-r-1} [F(y + \Delta) - F(y)] [1 - F(y + \Delta)]^{n-s} = \\ &= \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} F(x)^{r-1} [F(y) - F(x)]^{s-r-1} F(y)^{n-s} f(x) f(y). \end{aligned}$$

(d) Утверждение вытекает из задачи II.8.16. □

18. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — последовательность *перестановочных* случайных величин,

$$P(X_i = X_j) = 0, \quad i \neq j.$$

Пусть $A_1, A_2, \dots$ — такая последовательность событий, что $A_1 = \Omega$ и для $n \geq 2$ выполняется равенство

$$A_n = \{X_n > X_m \text{ для всех } m < n\}.$$

Событие A_n можно трактовать как событие, заключающееся в том, что в момент времени n происходит *рекорд*. Показать, что события $A_1, A_2, \dots$ (и, следовательно, $I_{A_1}, I_{A_2}, \dots$) независимы и

$$P(A_n) = \frac{1}{n}, \quad n \geq 1.$$

Решение. В силу *перестановочности* X_n имеем

$$P(X_1 < \dots < X_N) = P(B_i), \quad B_i = \{X_{i_1} < \dots < X_{i_N}\}$$

для любой перестановки $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N)$ индексов $1, \dots, N$. С учетом условия

$$P\left(\bigcup_{i \neq j} \{X_i = X_j\}\right) = 0$$

последнее означает, что

$$P(B_i) = \frac{1}{N!}.$$

При $l < m < n < \dots < N$ имеем

$$P(A_l A_m A_n \dots A_N) = \sum_{\mathbf{i}} P(B_i) = \frac{1}{N!} \sum_{\mathbf{i}} 1,$$

где суммирование ведется по всем таким перестановкам $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N)$, что если $i_{l^*} = l$, $i_{m^*} = m$, ... (для некоторых $l^* < m^* < \dots$), то

$$\{1, \dots, l-1\} \subseteq \{i_1, \dots, i_{l^*-1}\}, \quad \{1, \dots, m-1\} \subseteq \{i_1, \dots, i_{m^*-1}\}, \quad \dots$$

Любая такая перестановка может быть построена следующим образом.

1. Сначала следует взять произвольную перестановку $(j_1, \dots, j_{l-1})$ чисел $1, \dots, l-1$ и добавить l в ее начало, получив последовательность $(j_1, \dots, j_{l-1}, l)$. Число таких (различных) последовательностей $(l-1)!$.

2. Затем надо расставить числа $l+1, \dots, m-1$ в промежутки «до j_1 », «между j_1 и j_2 », ..., «после l » в произвольном порядке и добавить m в начало полученной последовательности. Число таких расстановок равно числу сочетаний из $m-1$ элементов по l , помноженному на $(m-l-1)!$.

3. Далее следует повторять описанную в п. 2 процедуру, до тех пор пока не получится искомая перестановка $\mathbf{i}$.

Таким образом, общее число подходящих перестановок $\mathbf{i}$ равно

$$(l-1)! C_{m-1}^l (m-l-1)! C_{n-1}^m (n-m-1)! \dots = \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n} \dots \frac{N!}{N},$$

и

$$P(A_l A_m A_n \dots A_N) = \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n} \dots \frac{1}{N}.$$

Отсюда следуют искомые свойства. $\square$

19. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — н. о. р. неотрицательные случайные величины и τ — случайная величина, не зависящая от (ξ_n) и принимающая значения в $\mathbb{N}$.

(а) Установить, что $ES_\tau = E\tau E\xi_1$, где $S_\tau = \xi_1 + \dots + \xi_\tau$ и допускаются бесконечные значения математических ожиданий.

(б) Предполагая, что $E\xi_1 = \infty$, показать, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(S_\tau > x)}{P(\xi_1 > x)} = E\tau.$$

Решение. (а) В силу независимости (ξ_n) и τ имеем

$$ES_\tau = E \sum_{n \geq 1} \xi_n I(\tau \geq n) = E\xi_1 \sum_{n \geq 1} P(\tau \geq n) = E\xi_1 E\tau.$$

(б) Заметим вначале, что

$$P(S_\tau > x) = \sum_{n \geq 1} P(S_n > x) P(\tau = n),$$

причем в силу неотрицательности случайных величин при $x > 0$ имеем

$$\begin{aligned} P(S_n > x) &\geq \sum_{i=1}^n P(\xi_i > x, \xi_j \leq x, i \neq j \in [1, n]) = \\ &= nP(\xi_1 > x)P(\xi_1 \leq x)^{n-1}. \end{aligned}$$

Отсюда, применяя лемму Фату, получаем искомую оценку снизу

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(S_\tau > x)}{P(\xi_1 > x)} \geq \sum_{n \geq 1} nP(\tau = n) \lim_{x \rightarrow \infty} P(\xi_1 \leq x)^{n-1} = E\tau.$$

Это, в частности, доказывает требуемое соотношение при $E\tau = \infty$, и впрямь можно считать, что $E\tau < \infty$.

Далее, для фиксированного $c > 0$ (с учетом п. (а)) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^c P(S_\tau > x) dx &= E(S_\tau \wedge c) \leq E \sum_{n=1}^{\tau} (\xi_n \wedge c) = E\tau E(\xi_1 \wedge c) = \\ &= E\tau \int_0^c P(\xi_1 > x) dx. \end{aligned}$$

Если предположить, что для некоторого положительного ε выполнено равенство

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(S_\tau > x)}{P(\xi_1 > x)} = E\tau + \varepsilon > E\tau,$$

то придем к противоречию. Действительно, в этом случае

$$\int_b^c P(S_\tau > x) dx > (E\tau + \varepsilon/2) \int_b^c P(\xi_1 > x) dx$$

для достаточно большого $b \geq 0$ и всех $c \geq b$. Поскольку $ES_\tau = \infty$ и $E\xi_1 = \infty$, получаем предельные соотношения вида

$$\frac{\int_b^c P(S_\tau > x) dx}{\int_0^c P(S_\tau > x) dx} \rightarrow 1 \quad \text{и} \quad \frac{\int_b^c P(\xi_1 > x) dx}{\int_0^c P(\xi_1 > x) dx} \rightarrow 1, \quad c \rightarrow \infty.$$

Это с учетом предыдущего неравенства противоречит оценке $E(S_\tau \wedge c) \leq E\tau E(\xi_1 \wedge c)$ (при достаточно больших c). Полученное противоречие завершает доказательство требуемого равенства с lim. $\square$

20. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — некоррелированные одинаково распределенные случайные величины с конечным вторым моментом, а τ — такая случайная величина со значениями в $\mathbb{N}$, что $E\tau^2 < \infty$ и τ не зависит от $\xi_1, \xi_2, \dots$. Показать, что

$$ES_\tau = E\xi_1 E\tau, \quad DS_\tau = D\xi_1 E\tau + (E\xi_1)^2 D\tau,$$

где $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$.

Решение. Из независимости величин $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ и τ следует, что

$$ES_\tau^2 \leq E\tau \sum_{n=1}^{\tau} \xi_n^2 = E\tau \sum_{n=1}^{\tau} E(\xi_n^2 | \tau) = E\tau^2 E\xi_1^2,$$

$$ES_\tau = EE(S_\tau | \tau) = E(\tau E\xi_1).$$

По формуле $DX = ED(X|Y) + E[E(X|Y) - EX]^2$ имеем

$$DS_\tau = ED(S_\tau | \tau) + E[E(S_\tau | \tau) - ES_\tau]^2 = E(\tau D\xi_1) + E[\tau E\xi_1 - E\tau E\xi_1]^2,$$

что эквивалентно требуемому равенству. $\square$

21. (Винер.) Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — н. о. р. случайные величины,

$$P(\xi_1 \geq 0) = 1 \quad \text{и} \quad E\xi_1 < \infty.$$

Положим $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, $n \geq 1$, и $S_0 = 0$. Показать, что для всех $a \geq E\xi_1$ выполняется неравенство

$$P\left(\sup_n [S_n - an] \geq 0\right) \leq \frac{E\xi_1}{a}.$$

Это неравенство проще всего доказать, сводя задачу к подходящей оценке сверху величины $\sum_{k=0}^{N-1} I_{A_{k,N}}$ суммой $\sum_{n=1}^N \xi_n$, где

$$A_{k,N} = \left\{ \sup_{1 \leq n \leq N-k} [S_{n+k} - S_k - an] \geq 0 \right\} = \bigcup_{n=1}^{N-k} \left\{ \sum_{i=1}^n \xi_{i+k} > an \right\}.$$

Замечание. Результат задачи сохраняет свою силу, если рассматривать *стационарную в узком смысле* случайную последовательность $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$.

Решение. Легко видеть, что

$$\lim_N E \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} I_{A_{k,N}} = \lim_N P(A_{0,N}) = P\left(\sup_n [S_n - an] \geq 0\right).$$

Осталось установить, что

$$a \sum_{k=1}^N I_{A_k} \leq \sum_{n=1}^N \xi_n. \quad (*)$$

Для любого такого A_n , что $I_{A_n} = 1$, существует такой отрезок индексов $[n, n+l]$ (при $n+l \leq N$), что

$$\sum_{i=n}^{n+l} \xi_i \geq al,$$

откуда следует условие (*). $\square$

22. Пусть ξ и η — независимые случайные величины с плотностями $f_\xi = f_\xi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, и $f_\eta(y) = I_{[0,1]}(y)$, т. е. η имеет равномерное распределение на $[0, 1]$. Найти плотности величин $\xi\eta$ и ξ/η .

Решение. Вследствие независимости ξ и η имеем

$$\begin{aligned} P(\xi\eta \leq z) &= \iint_{\{u,v: uv \leq z\}} f_\xi(u) I_{[0,1]}(v) du dv = \int_{-\infty}^z dx \int_0^1 \frac{f_\xi(x/v)}{v} dv = \\ &= \int_{-\infty}^z dx \int_x^\infty \frac{f_\xi(y)}{y} dy. \end{aligned}$$

Аналогично

$$P(\xi/\eta \leq z) = \iint_{\{u, v: u/v \leq z\}} f_{\xi}(u) I_{[0,1]}(v) du dv = \int_{-\infty}^z dx \int_0^1 v f_{\xi}(xv) dv. \quad \square$$

23. (а) Пусть ξ и η — н. о. р. положительные случайные величины с некоторой плотностью f .

Доказать, что следующие свойства справедливы только для величин, имеющих экспоненциальное распределение:

1. $\frac{\xi}{\xi + \eta}$ не зависит от $\xi + \eta$ и имеет равномерное распределение на $[0, 1]$;

2. $\xi \wedge \eta$ независимо с $|\xi - \eta|$, а плотность f может быть выбрана положительной и непрерывной на $\mathbb{R}_+$.

(б) Показать, что если ξ и η — независимые экспоненциально распределенные случайные величины с параметрами λ и μ , причем $\lambda \neq \mu$, то плотность распределения суммы $\xi + \eta$ задается формулой

$$f_{\xi+\eta}(z) = \begin{cases} \frac{\lambda\mu}{\mu - \lambda} (e^{-\lambda z} - e^{-\mu z}) & \text{при } z > 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Решение. (а) 1. Плотность условного распределения ξ при условии $\xi + \eta = z$ равна

$$\left(\int_0^z f(y) f(z-y) dy \right)^{-1} f(x) f(z-x), \quad 0 \leq x \leq z,$$

и равна 0 иначе. Если ξ распределено экспоненциально, то последнее отношение равно $1/z$ и, следовательно, ξ при условии $\xi + \eta = z$ имеет равномерное распределение на $[0, 1]$.

Обратно, если это отношение равно $1/z$, то (почти всюду по мере Лебега) справедливо равенство

$$f(x)f(z-x) = g(z) \quad \text{или} \quad f(x)f(y) = g(x+y),$$

где $0 \leq x, y \leq z$ (z — любое положительное число). Интегрируя это равенство по $(s, \infty) \times (t, \infty)$ при $s, t \geq 0$, нетрудно убедиться, что для некоторой функции G выполняется равенство

$$P(\xi > s)P(\xi > t) = G(s+t).$$

В качестве такой функции G следует взять

$$\begin{aligned} \iint_{(s,\infty) \times (t,\infty)} g(x+y) dx dy &= \int_{s+t}^{\infty} g(u)(u-t) du = \int_{s+t}^{\infty} g(u)(u-s) du = \\ &= \int_{s+t}^{\infty} g(u) \left(u - \frac{s+t}{2}\right) du. \end{aligned}$$

Таким образом, $G(t) = P(\xi > t)$ и $P(\xi > s+t) = P(\xi > s)P(\xi > t)$, $s, t > 0$. В силу задачи II.7.38 величина ξ экспоненциально распределена.

2. Имеем $|\xi - \eta| = \xi \vee \eta - \xi \wedge \eta$. Совместная плотность величин $\xi \wedge \eta$ и $\xi \vee \eta$ равна

$$2f(x)f(y), \quad x \leq y,$$

а значит, совместная плотность величин $\xi \wedge \eta$ и $|\xi - \eta|$ — это $2f(x)f(x+z)$, $x, z \geq 0$. С другой стороны, она должна представляться в виде $p(x)q(z)$ (что эквивалентно независимости величин $\xi \wedge \eta$ и $|\xi - \eta|$), что действительно так для экспоненциально распределенных величин ξ и η .

Обратно, если $f(x)f(x+z) = p(x)q(z)$ при $x, z \geq 0$ для некоторых функций p и q , то $f(x)^2 = p(x)q(0)$, $q(0) \neq 0$, $p(0) \neq 0$ (в силу того, что $f(0) > 0$) и $f(z)f(0) = p(0)q(z)$. Поэтому

$$f(x)f(z) = f(x+z)f(0), \quad x, z \geq 0.$$

Рассуждая так же, как и выше, находим, что ξ — экспоненциальная величина.

(b) Утверждение проверяется прямым подсчетом по формуле

$$f_{\xi+\eta}(z) = \int_{\mathbb{R}} f_{\xi}(z-x)f_{\eta}(x) dx. \quad \square$$

24. Пусть случайная величина C распределена по закону Коши. Показать, что

$$C \stackrel{d}{=} \frac{X}{Y} \stackrel{d}{=} \frac{X}{|Y|},$$

где X и Y — н. о. р. случайные величины, распределенные по закону $\mathcal{N}(0, 1)$.

Решение. В силу симметричности величины C ($C \stackrel{d}{=} -C$), а также величин X/Y и $X/|Y|$ достаточно доказать, что

$$|C| \stackrel{d}{=} \frac{|X|}{|Y|}.$$

Используя замену переменных вида $x = uy$, для всех $z \geq 0$ получаем равенства

$$\begin{aligned} P(|X| \leq z|Y) &= \frac{2}{\pi} \int_{0 \leq x \leq zy} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^z du \int_{\mathbb{R}_+} ye^{-\frac{(1+u^2)y^2}{2}} dy = \frac{2}{\pi} \int_0^z \frac{du}{1+u^2} = P(|C| \leq z), \end{aligned}$$

т. е. $|C| \stackrel{d}{=} |X|/|Y|$. □

25. Пусть случайная величина ξ принимает конечное число значений $x_1, \dots, x_k \geq 0$. Показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (E\xi^n)^{1/n} = \max\{x_1, \dots, x_k\}.$$

Решение. Пусть $x = \max\{x_1, \dots, x_k\}$, а также $p = P(\xi = x) > 0$. Тогда

$$x^n p \leq E\xi^n \leq x^n \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p^{1/n} = 1,$$

что приводит к искомому равенству. □

26. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, принимающие значения в $\mathbb{N}$. Предположим, что или $E\xi < \infty$, или $E\eta < \infty$. Показать, что

$$E(\xi \wedge \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geq n)P(\eta \geq n).$$

Решение. Утверждение вытекает из равенства

$$E\tau = \sum_{n \geq 1} nP(\tau = n) = \sum_{n \geq 1} P(\tau \geq n),$$

справедливого для величины τ со значениями в $\mathbb{N}$, а также из того, что

$$P(\xi \wedge \eta \geq n) = P(\xi \geq n, \eta \geq n) = P(\xi \geq n)P(\eta \geq n). \quad \square$$

27. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, имеющие экспоненциальное распределение с параметрами λ и μ соответственно. Найти функции распределения величин $\frac{\xi}{\xi + \eta}$ и $\frac{\xi + \eta}{\xi}$.

Решение. Имеем

$$\frac{\xi + \eta}{\xi} = \frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{\zeta + \eta}{\zeta} \right) - \frac{\lambda}{\mu} + 1,$$

где $\zeta = \lambda\xi/\mu \stackrel{d}{=} \eta$. Согласно задаче II.8.23(а) величина $(\zeta + \eta)^{-1}\zeta$ равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Поэтому

$$P\left(\frac{\xi + \eta}{\xi} \leq x\right) = 1 - \left(\frac{\mu}{\lambda}(x - 1) + 1\right)^{-1}$$

и

$$P\left(\frac{\xi}{\xi + \eta} \leq x\right) = \left(\frac{\mu(1 - x)}{\lambda x} + 1\right)^{-1}$$

в случае, когда правые части приведенных равенств лежат в $[0, 1]$. При других значениях x соответствующие функции распределения равны 0 или 1. $\square$

28. (См. [73].) Пусть X — бернуллиевская случайная величина,

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p.$$

(а) Показать, что существуют независимые от X случайные величины Y , для которых распределение их суммы симметрично, т. е. $X + Y \stackrel{d}{=} -(X + Y)$.

(б) Установить, что минимум дисперсии DY по всем таким Y равен $p(1 - p)$ при $p \neq 1/2$ и 0 при $p = 1/2$. С этой целью предположить, что при $p \neq 1/2$ найдется такая нечетная функция $f = f(y)$, что

$$(1 - p)f(y) + pf(1 + y) \leq y^2 - p, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Замечание. В качестве функции f можно взять кусочно линейную функцию

$$f(y) = \frac{g(y)}{1 - 2p} - y, \quad y \in \mathbb{R},$$

где нечетная функция g определяется формулой $g(y) = \arcsin \sin \pi y$. При таком задании $g(1 + y) = -g(y)$, $y \in \mathbb{R}$, и неравенство

$$(1 - p)f(y) + pf(1 + y) \leq y^2 - p$$

эквивалентно тому, что $g(y) \leq y^2 + y$. Последнее устанавливается элементарной проверкой.

Решение. (а) Пусть Y не зависит от X и $Y \stackrel{d}{=} -X$. Тогда, очевидно, величина $X + Y$ является симметричной.

(б) В силу симметричности величины $X + Y$ имеем

$$p + EY = E(X + Y) = 0,$$

т. е. $EY = -p$. Кроме того, используя независимость величин X и Y и нечетность функции f , получаем, что

$$0 = Ef(X + Y) = (1 - p)Ef(Y) + pEf(1 + Y) \leq EY^2 - p = DY - p(1 - p).$$

Поэтому $DY \geq p(1 - p)$, причем $DY = p(1 - p)$ при $Y \stackrel{d}{=} -X$. $\square$

29. Пусть U — случайная величина, имеющая равномерное распределение на $(0, 1)$. Показать, что

(а) для всякого $\lambda > 0$ величина $-\frac{1}{\lambda} \ln U$ имеет экспоненциальное распределение с параметром λ ;

(б) величина $\operatorname{tg}\left(\pi U - \frac{\pi}{2}\right)$ имеет распределение Коши с плотностью $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$;

(с) величина $[nU] + 1$ имеет равномерное дискретное распределение на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$;

(д) если $0 < q < 1$, то величина $X = 1 + \left[\frac{\ln U}{\ln q}\right]$ имеет геометрическое распределение $P(X = k) = q^{k-1}(1 - q)$, $k \geq 1$.

Решение. (а) Вычислим функцию распределения величины $V = -\frac{1}{\lambda} \ln U \geq 0$:

$$P(V \leq v) = P(U \geq e^{-\lambda v}) = (1 - e^{-\lambda v}) I(v \geq 0).$$

Таким образом, V имеет экспоненциальное распределение с параметром λ .

(б) Аналогично находим, что

$$\begin{aligned} P\left(\operatorname{tg}\left(\pi U - \frac{\pi}{2}\right) \leq x\right) &= P\left(U \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x\right) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x = \int_{-\infty}^x \frac{dz}{\pi(1+z^2)}, \end{aligned}$$

что доказывает утверждение п. (б).

(с) Искомое свойство вытекает из соотношений

$$P([nU] + 1 = k) = P\left(\frac{k-1}{n} \leq U < \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}, \quad k = 1, \dots, n.$$

(д) Имеем

$$P\left(1 + \left[\frac{\ln U}{\ln q}\right] = k\right) = P(q^{k-1} \leq U < q^k) = q^{k-1}(1 - q), \quad k = 1, 2, \dots,$$

и, следовательно, $1 + \left[\frac{\ln U}{\ln q}\right]$ распределено по геометрическому закону. $\square$

30. Пусть θ — случайная величина, имеющая равномерное распределение на $[0, 2\pi)$, и C — случайная величина, распределенная по закону Коши. Показать, что

$$\operatorname{ctg} \theta \stackrel{d}{=} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \stackrel{d}{=} C \quad \text{и} \quad \cos^2 \theta \stackrel{d}{=} \cos^2 \frac{\theta}{2} \stackrel{d}{=} \frac{C^2}{1 + C^2}.$$

Решение. Вследствие задачи II.8.29 с учетом симметричности величины C имеем

$$C \stackrel{d}{=} -C \stackrel{d}{=} -\operatorname{tg}\left(\pi U - \frac{\pi}{2}\right) \stackrel{d}{=} \operatorname{ctg}(\pi U) \stackrel{d}{=} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2},$$

где U равномерно распределено на $[0, 1]$ (и, значит, $2\pi U \stackrel{d}{=} \theta$). Равенство вида $\operatorname{ctg} \theta \stackrel{d}{=} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}$ вытекает из того факта, что в силу периодичности (с периодом π) функции $\operatorname{ctg} x$ справедливы соотношения

$$\operatorname{ctg} \theta = \operatorname{ctg} \pi \left\{ \frac{\theta}{\pi} \right\} \quad \text{и} \quad \pi \left\{ \frac{\theta}{\pi} \right\} \stackrel{d}{=} \frac{\theta}{2},$$

где $\{\cdot\}$ — дробная часть числа $x \in \mathbb{R}$. Аналогично устанавливается, что $\cos^2 \theta \stackrel{d}{=} \cos^2 \frac{\theta}{2}$. Кроме того, очевидно,

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} \stackrel{d}{=} \frac{C^2}{1 + C^2}. \quad \square$$

31. Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ — н. о. р. случайные величины. Доказать, что с вероятностью единица

$$\sup_n \xi_n = \sup\{x \in \mathbb{R} : P(\xi < x) < 1\}.$$

Решение. Фиксируем любое z ,

$$z < x^* = \sup\{x \in \mathbb{R} : P(\xi < x) < 1\}.$$

Тогда $P(\xi \leq z) < 1$. Поэтому

$$P(\sup_n \xi_n \leq z) = \lim_n P(\xi_1 \leq z, \dots, \xi_n \leq z) = \lim_n P(\xi \leq z)^n = 0.$$

Аналогично

$$P(\sup_n \xi_n > x^*) = 1 - \lim_n P(\xi \leq x^*)^n = 1 - \lim_n 1^n = 0.$$

Таким образом, $\sup_n \xi_n = x^*$ с вероятностью единица. $\square$

32. Для случайной величины ξ , имеющей $\mathcal{N}(0, 1)$ -распределение,

$$P(\xi \geq x) \sim \frac{\varphi(x)}{x}, \quad x \rightarrow \infty, \quad \text{где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Найти соответствующую асимптотику для случайной величины ζ , имеющей гамма-распределение с плотностью

$$f(x) = \frac{I(x > 0)}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} e^{-x}, \quad \alpha > 0.$$

Решение. Искомая асимптотика равна

$$P(\zeta \geq x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} z^{\alpha-1} e^{-z} dz \sim f(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Действительно, по *правилу Лопиталья*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_x^{\infty} z^{\alpha-1} e^{-z} dz}{x^{\alpha-1} e^{-x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\int_x^{\infty} z^{\alpha-1} e^{-z} dz \right)'}{(x^{\alpha-1} e^{-x})'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^{\alpha-1} e^{-x}}{-x^{\alpha-1} e^{-x} [1 + (\alpha-1)x^{-1}]} = 1. \quad \square \end{aligned}$$

33. Пусть X и Y — две такие невырожденные независимые случайные величины, что их произведение XY имеет дискретное распределение. Показать, что каждая из величин X и Y имеет дискретное распределение.

Решение. Покажем, например, что X имеет дискретное распределение. Представим функцию распределения $F = F(x)$ величины X в виде $F(x) = G(x) + H(x)$, где $x \in \mathbb{R}$,

$$G(x) = \sum_{u \leq x} [F(u) - F(u-)]$$

— функция скачков функции F , а $H(x) = F(x) - G(x)$ — непрерывная компонента функции F . Полагая $Z = XY$, для всех $z \in \mathbb{R}$ получаем

$$\begin{aligned} P(Z \leq z) &= E I(XY \leq z) = E F(z/Y) I(Y > 0) + \\ &+ E [1 - F(z/Y-)] I(Y < 0) + P(Y = 0) I(z \geq 0). \end{aligned}$$

Перепишем это равенство с учетом разложения $F = G + H$:

$$P(Z \leq z) = A(z) + B(z), \quad (*)$$

где $B(z) = E H(z/Y) I(Y > 0) + E [H(\infty) - H(z/Y-)] I(Y < 0)$ — непрерывная неубывающая функция со значениями в $\mathbb{R}_+$, а $A = A(z)$ — некоторая другая неубывающая неотрицательная функция. Соотношение $(*)$ может иметь место для кусочно постоянной функции $f(z) = P(Z \leq z)$ только в том случае, если $B(z) \equiv 0$. Из этого следует, что $H(x) \equiv 0$. Иными словами, величина X дискретна. Аналогично устанавливается дискретность величины Y . $\square$

Замечание. Похожими рассуждениями можно доказать, что сумма $X + Y$ независимых величин X и Y дискретна только в том случае, когда каждая из величин X и Y дискретна.

34. Пусть I — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $y = \varphi(x)$ — функция, определенная на I , со значениями в $\mathbb{R}^n$. (Если $x = (x_1, \dots, x_n) \in I$, то $y = (y_1, \dots, y_n)$, где $y_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$.) Предполагается, что все производные $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$ существуют и непрерывны и при этом $|J_\varphi(x)| > 0$, $x \in I$, где $J_\varphi(x)$ есть детерминант якобиана функции φ :

$$J_\varphi(x) = \det \left\| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right\|, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Показать, что если $X = (X_1, \dots, X_n)$ — случайный вектор со значениями в I , имеющий плотность $f_X(x)$, и $Y = \varphi(X)$, то плотность $f_Y(y)$ существует и на множестве $\varphi(I) = \{y: y = \varphi(x), x \in I\}$ задается следующей формулой:

$$f_Y(y) = f_X(\psi(y))|J_\psi(y)|,$$

где $\psi = \varphi^{-1}$ — обратная к φ функция (и $|J_\psi(y)| > 0$, поскольку $|J_\varphi(x)| > 0$).

Решение. Для установления искомой формулы следует применить многомерный аналог формулы интегрирования с помощью подстановки (см. замечание к задаче II.6.15). $\square$

35. Пусть $Y = AX + b$, где $X = (X_1, \dots, X_n)$, $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$, матрица A порядка $n \times n$ такова, что $|\det A| > 0$, а b есть n -мерный вектор. Показать, что

$$f_Y(y) = \frac{1}{|\det A|} f_X(A^{-1}(y - b)).$$

Решение. Утверждение вытекает из результата задачи II.8.34, если взять $\varphi(x) = Ax + b$ и учесть, что $|J_{\varphi^{-1}}(y)| = 1/|\det A|$. $\square$

36. Пусть X и Y — случайные величины с конечными моментами второго порядка.

(а) Предполагая независимость величин X и Y , доказать равенство

$$D(XY) = DX \cdot DY + DX \cdot (EX)^2 + DY \cdot (EX)^2.$$

(б) Для произвольных X и Y установить неравенство

$$\text{cov}^2(X, Y) \leq DX \cdot DY.$$

Выяснить, когда здесь выполнено равенство.

(с) Показать, что

$$\rho(aX + b, cY + d) = \rho(X, Y) \cdot \text{sign}(ac),$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $\rho(X, Y)$ — коэффициент корреляции между X и Y , $\text{sign } x = 1$ при $x > 0$, 0 при $x = 0$ и -1 при $x < 0$.

Решение. Формулы из п. (а) и (с) устанавливаются прямой проверкой. Неравенство из п. (b) есть частный случай неравенства Коши—Буняковского. $\square$

37. (а) Показать, что следующие функции:

$$F_G(x) = \exp(-e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R};$$

$$F_F(x, \alpha) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \exp(-x^{-\alpha}), & x \geq 0, \end{cases} \quad \text{где } \alpha > 0;$$

$$F_W(x, \alpha) = \begin{cases} \exp(-|x|^\alpha), & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases} \quad \text{где } \alpha > 0,$$

являются функциями распределения. Они называются следующим образом: F_G — *распределение Гумбеля* (или *двойное экспоненциальное распределение*; ср. с задачей II.8.14), $F_F(x)$ — *распределение Фреше* и $F_W(x)$ — *распределение Вейбулла*. Все они являются частными случаями распределений следующих трех типов.

Т и п I (распределения типа Гумбеля):

$$F_1(x, a, b) = F_G(ax + b).$$

Т и п II (распределения типа Фреше):

$$F_2(x, a, b, \alpha) = F_F(ax + b, \alpha).$$

Т и п III (распределения типа Вейбулла):

$$F_3(x, a, b, \alpha) = F_W(ax + b, \alpha).$$

Во всех случаях $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$.

(b) Показать, что если случайная величина X имеет распределение второго типа с $b = 0$, то

$$\ln X$$

будет иметь распределение первого типа, и аналогично, если Y имеет распределение третьего типа с $b = 0$, то

$$-\ln(-Y)$$

будет также иметь распределение первого типа.

(с) Установить, что распределения всех трех типов являются частным случаем *обобщенного распределения экстремальных значений*:

$$F(x, a, b, \gamma) = \begin{cases} \exp\left\{-[1 + \gamma(ax + b)]^{-1/\gamma}\right\}, & \gamma(ax + b) > -1, \\ I(\gamma > 0), & \gamma(ax + b) \leq -1, \end{cases}$$

где $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ (в точке $\gamma = 0$ функция F доопределяется по непрерывности, т. е. как предел при $\gamma \rightarrow 0$).

Решение. Пункт (а) очевиден. Установим п. (b):

$$P(\ln X \leq x) = F_F(ae^x, \alpha) = F_G(\alpha x + \alpha \ln a),$$

$$P(-\ln(-Y) \leq x) = F_W(-ae^{-x}, \alpha) = F_G(\alpha x - \alpha \ln a).$$

(с) Распределения типов I, II и III получаются из обобщенного распределения экстремальных значений соответственно при $\gamma = 0$ (предельным переходом), $\gamma = 1/\alpha > 0$ и $\gamma = -1/\alpha < 0$ (после подходящей линейной замены аргумента x). $\square$

38. Пусть U, V — независимые случайные величины, причем U имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, а $\{u\}$ — дробная часть числа u . Показать, что случайная величина $\{U + V\}$ равномерно распределена на $[0, 1]$ и не зависит от V .

Решение. Отметим вначале следующий легко проверяемый факт.

Если случайная величина Z распределена равномерно на $[z, 1 + z]$, $z \in \mathbb{R}$, то ее дробная часть $\{Z\}$ распределена равномерно на $[0, 1]$.

В силу независимости U и V величина $U + V$ условно на $V = v$ распределена равномерно на отрезке $[v, v + 1]$. Следовательно, $\{U + V\}$ условно на $V = v$ (вне зависимости от $v \in \mathbb{R}$) имеет равномерное распределение на $[0, 1]$ и, значит, не зависит от V . $\square$

39. Пусть U, V — независимые случайные величины с равномерным распределением на $[0, 1]$, а $\{u\}$ — дробная часть числа $u \in \mathbb{R}$. Показать, что

$$(\{U - V\}, \{U + V\}) \stackrel{d}{=} (U, V).$$

Решение. Случайный вектор $(U + V, U - V)$ имеет равномерное распределение на квадрате

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |x - 1| + |y| \leq 1\}.$$

Отсюда следует, что совместная плотность величин $\{U + V\}$ и $U - V$ равна

$$f(x, y) = \frac{1}{2} I_A(x, y) + \frac{1}{2} I_B(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

где

$$A = \{(x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}: |x - 1| + |y| \leq 1\},$$

$$B = \{(x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}: |x| + |y| \leq 1\}.$$

Поэтому случайный вектор $(\{U - V\}, \{U + V\})$ имеет плотность

$$g(x, y) = \frac{1}{2} I_{A \cap [0,1]^2}(x, y) + \frac{1}{2} I_{B \cap [0,1]^2}(x, y) + \frac{1}{2} I_{(A+(0,1)) \cap [0,1]^2}(x, y) + \\ + \frac{1}{2} I_{(B+(0,1)) \cap [0,1]^2}(x, y),$$

которая есть не что иное, как $I_{[0,1]^2}(x, y)$; здесь

$$C + (a, b) = \{(x + a, y + b) : (x, y) \in C\}.$$

Тем самым указанное в задаче равенство доказано. $\square$

40. Пусть φ и ψ — две независимые случайные величины, имеющие равномерное распределение на $[0, 2\pi)$, и $\xi = \cos \varphi$, $\zeta = \cos \psi$. Показать, что

$$\frac{\xi + \zeta}{2} \stackrel{d}{=} \xi \zeta.$$

Решение. В силу равенства

$$2\xi\zeta = 2 \cos \varphi \cos \psi = \cos(\varphi - \psi) + \cos(\varphi + \psi)$$

достаточно доказать, что

$$\left(\left\{ \frac{\varphi - \psi}{2\pi} \right\}, \left\{ \frac{\varphi + \psi}{2\pi} \right\} \right) \stackrel{d}{=} \left(\frac{\varphi}{2\pi}, \frac{\psi}{2\pi} \right),$$

где $\{x\}$ — дробная часть числа $x \in \mathbb{R}$. Последнее эквивалентно П.8.39.

41. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые копии случайной величины ξ , где

$$\xi = \begin{cases} 2 & \text{с вероятностью } p, \\ 1 & \text{с вероятностью } q, \\ 0 & \text{с вероятностью } r \end{cases}$$

и $p, q, r \geq 0$, $p + q + r = 1$. Дать общую формулу для вероятностей

$$P_n(k, p, q) = P(\xi_1 + \dots + \xi_n = k), \quad 0 \leq k \leq 2n. \quad \square$$

Решение. Пусть $\zeta_i = \xi_i - 1$. Тогда

$$P_n(k, p, q) = P(\zeta_1 + \dots + \zeta_n = k - n).$$

Рассмотрим вначале случай $k \geq n$. Имеем

$$P_n(k, p, q) = \\ = \sum_{|k-n| \leq j \leq \frac{n+|k-n|}{2}} P(|\{i: \zeta_i = 1\}| = j, |\{i: \zeta_i = -1\}| = j - |k - n|) = \\ = \sum_{|k-n| \leq j \leq \frac{n+|k-n|}{2}} C_n^j C_{n-j}^{j-|k-n|} p^j r^{j-|k-n|} q^{n+|k-n|-2j}.$$

В случае $k < n$ приведенная выше формула сохраняет свою силу, если p и r поменять местами. $\square$

42. Пусть ξ и η — две н. о. р. случайные величины с экспоненциальным распределением. Показать, что случайные величины $\xi + \eta$ и ξ/η являются независимыми.

Решение. Утверждение следует из задачи II.8.23(a), согласно которой, в частности, величина

$$\zeta = \frac{\xi}{\xi + \eta} = \frac{1}{1 + \xi/\eta},$$

не зависит от $\xi + \eta$. Следовательно, величина

$$\frac{\xi}{\eta} = \frac{1}{\zeta} - 1$$

также не зависит от $\xi + \eta$. $\square$

43. Рассматривается матрица $\|\xi_{ij}\|$ порядка $n \times n$, все (случайные) элементы которой независимы и таковы, что $P(\xi_{ij} = \pm 1) = 1/2$. Показать, что среднее значение и дисперсия детерминанта этой случайной матрицы равны соответственно 0 и $n!$.

Решение. Утверждение следует из равенства $E\xi\eta = E\xi E\eta$, выполненного для независимых интегрируемых случайных величин ξ и η , а также из того, что определитель есть сумма $n!$ несовпадающих произведений (с точностью до -1) различных элементов матрицы. $\square$

44. Закон больших чисел Хинчина гласит, что

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - EX_1 I(|X_1| \leq n) \xrightarrow{P} 0$$

для любых таких н. о. р. случайных величин $(X_n)_{n \geq 1}$, что $nP(|X_1| > n) \rightarrow 0$. Предполагая дополнительно, что $P(X_1 > 0) = 1$, доказать, что

$$E \frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{(X_1 + \dots + X_n)^2} \rightarrow 0.$$

Решение. Заметим прежде всего, что

$$0 \leq \frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{(X_1 + \dots + X_n)^2} \leq 1 - \frac{\sum_{i \neq j} X_i X_j}{(X_1 + \dots + X_n)^2} \leq 1.$$

Поэтому (в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости) достаточно проверить сходимость

$$\frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{(X_1 + \dots + X_n)^2} \xrightarrow{P} 0.$$

В силу упомянутого закона больших чисел Хинчина имеем

$$\frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{(X_1 + \dots + X_n)^2} \leq \frac{n^{-1} \max_{1 \leq i \leq n} X_i}{n^{-1} (X_1 + \dots + X_n)} = \frac{n^{-1} \max_{1 \leq i \leq n} X_i}{R_n + EX_1 I(X_1 \leq n)},$$

где $R_n \xrightarrow{p} 0$. Кроме того, из условия $nP(X_1 > n) \rightarrow 0$ следует, что $xP(X_1 > x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, и, значит, при всех $\varepsilon > 0$ имеем

$$P(\max_{1 \leq i \leq n} X_i > \varepsilon n) \leq P\left(\bigcup_{i=1}^n \{X_i > \varepsilon n\}\right) \leq nP(X_1 > \varepsilon n) \rightarrow 0.$$

Иными словами,

$$n^{-1} \max_{1 \leq i \leq n} X_i \xrightarrow{p} 0.$$

Замечая, наконец, что

$$\lim_n EX_1 I(X_1 \leq n) > 0,$$

уже нетрудно проверить, что

$$\frac{n^{-1} \max_{1 \leq i \leq n} X_i}{R_n + EX_1 I(X_1 \leq n)} \xrightarrow{p} 0. \quad \square$$

45. (См. [20].) Пусть $X_1, X_2, \dots$ — н. о. р. случайные величины, $P(X_1 > 0) = 1$. Пусть

$$\phi(\lambda) = Ee^{-\lambda X_1}, \quad \lambda \geq 0,$$

— преобразование Лапласа величины X_1 . Выразить величину

$$R_n(l, \alpha) = E \frac{X_1^l + \dots + X_n^l}{(X_1 + \dots + X_n)^\alpha}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad \alpha > 0,$$

через ϕ . Используя полученную формулу, доказать, что при $EX_1^2 < \infty$ выполняются условия

$$R_n(2, 1) \rightarrow \frac{EX_1^2}{EX_1} \quad \text{и} \quad nR_n(2, 2) \rightarrow \frac{EX_1^2}{(EX_1)^2}.$$

Решение. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости для всех $\lambda > 0$ имеем

$$\lim_{\Delta \lambda \rightarrow 0} \frac{\phi(\lambda + \Delta \lambda) - \phi(\lambda)}{\Delta \lambda} = \lim_{\Delta \lambda \rightarrow 0} Ee^{-\lambda X_1} \frac{e^{-X_1 \Delta \lambda} - 1}{\Delta \lambda} = -Ee^{-\lambda X_1} X_1 = \phi'(\lambda),$$

где мы также учли, что при $\lambda > 0$ п. н. выполняются неравенства

$$e^{-\lambda X_1} \frac{|e^{-X_1 \Delta \lambda} - 1|}{\Delta \lambda} \leq X_1 e^{-\lambda X_1} \leq \lambda^{-1} \sup_{x>0} x e^{-x} < \infty.$$

Аналогично выводится существование l -й производной $\phi^{(l)}(\lambda)$ при $\lambda > 0$, равной $(-1)^l \mathbf{E} X_1^l e^{-\lambda X_1}$. В случае, когда $\mathbf{E} X_1^l < \infty$, точно так же устанавливается, что $\phi^{(l)}(0) = (-1)^l \mathbf{E} X_1^l$. Далее, из определения гамма-функции

$$x^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-x\lambda} \lambda^{\alpha-1} d\lambda, \quad x, \alpha > 0.$$

Из симметрии случайных величин $X_1, \dots, X_n$ находим, что

$$R_n(l, \alpha) = \mathbf{E} \frac{nX_1^l}{(X_1 + \dots + X_n)^\alpha}$$

и, следовательно, по теореме Фубини

$$\begin{aligned} R_n(l, \alpha) &= \mathbf{E} \frac{n}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} X_1^l e^{-\lambda \sum_{i=1}^n X_i} \lambda^{\alpha-1} d\lambda = \\ &= \frac{n}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \mathbf{E} X_1^l e^{-\lambda \sum_{i=1}^n X_i} \lambda^{\alpha-1} d\lambda = \frac{n}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} (-1)^l \phi^{(l)}(\lambda) \phi(\lambda)^{n-1} \lambda^{\alpha-1} d\lambda. \end{aligned}$$

Тем самым

$$\begin{aligned} R_n(2, 1) &= n \int_0^{\infty} \phi''(\lambda) \phi(\lambda)^{n-1} d\lambda, \\ R_n(2, 2) &= n \int_0^{\infty} \phi''(\lambda) \phi(\lambda)^{n-1} \lambda d\lambda. \end{aligned}$$

Для всех $\varepsilon > 0$ имеем

$$n \int_{\varepsilon}^{\infty} \phi''(\lambda) \phi(\lambda)^{n-1} d\lambda \leq n\phi(\varepsilon)^{n-1} \int_0^{\infty} \mathbf{E} X_1^2 e^{-\lambda X_1} d\lambda = n\phi(\varepsilon)^{n-1} \mathbf{E} X_1 \rightarrow 0$$

(так как $\phi(\varepsilon) < 1$, если $\mathbf{P}(X_1 > 0) = 1$). Аналогично

$$n^2 \int_{\varepsilon n}^{\infty} \phi''(\lambda) \phi(\lambda)^{n-1} \lambda d\lambda \leq n^2 \phi(\varepsilon)^{n-1} \int_0^{\infty} \mathbf{E} X_1^2 e^{-\lambda X_1} \lambda d\lambda = n^2 \phi(\varepsilon)^{n-1} \rightarrow 0.$$

Для малых $\varepsilon > 0$ видим, что при $\lambda \in [0, \varepsilon]$ выполняются неравенства

$$e^{-\lambda(\mathbf{E} X_1 + \delta)} \leq \phi(\lambda) = \mathbf{E} e^{-\lambda X_1} \leq e^{-\lambda(\mathbf{E} X_1 - \delta)}$$

и

$$\gamma \mathbf{E} X_1^2 \leq \phi''(\lambda) = \mathbf{E} X_1^2 e^{-\lambda X_1} \leq \mathbf{E} X_1^2,$$

где $\delta = \delta(\varepsilon) \downarrow 0$ и $\gamma = \gamma(\varepsilon) \uparrow 1$ при $\varepsilon \downarrow 0$. Таким образом, величина

$$(n-1) \int_0^\varepsilon \phi''(\lambda) \phi(\lambda)^{n-1} d\lambda = \int_0^{\varepsilon(n-1)} \phi''\left(\frac{\lambda}{n-1}\right) \phi\left(\frac{\lambda}{n-1}\right)^{n-1} d\lambda$$

с необходимостью содержится в отрезке

$$\left[\frac{\gamma EX_1^2}{EX_1 + \delta} \int_0^{\varepsilon(n-1)(EX_1 + \delta)} e^{-u} du, \frac{EX_1^2}{EX_1 - \delta} \int_0^{\varepsilon(n-1)(EX_1 - \delta)} e^{-u} du \right]$$

(считаем δ настолько малым, что $EX_1 > \delta$). Аналогичным образом получается, что величина

$$(n-1)^2 \int_0^\varepsilon \phi''(\lambda) \phi(\lambda)^{n-1} \lambda d\lambda = \int_0^{\varepsilon(n-1)} \phi''\left(\frac{\lambda}{n-1}\right) \phi\left(\frac{\lambda}{n-1}\right)^{n-1} \lambda d\lambda$$

лежит в отрезке

$$\left[\frac{\gamma EX_1^2}{(EX_1 + \delta)^2} \int_0^{\varepsilon(n-1)(EX_1 + \delta)} u e^{-u} du, \frac{EX_1^2}{(EX_1 - \delta)^2} \int_0^{\varepsilon(n-1)(EX_1 - \delta)} u e^{-u} du \right].$$

Выбирая достаточно малое $\varepsilon > 0$, а затем достаточно большое $n \geq 1$, уже легко получить, что

$$R_n(2, 1) \rightarrow \frac{EX_1^2}{EX_1} \quad \text{и} \quad nR_n(2, 2) \rightarrow \frac{EX_1^2}{(EX_1)^2}. \quad \square$$

46. (См. [52].) Пусть $X_1, \dots, X_n$ ($n \geq 1$) — н. о. р. неотрицательные случайные величины с плотностью $f = f(x)$,

$$S_n = X_1 + \dots + X_n \quad \text{и} \quad M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}.$$

Доказать, что преобразование Лапласа $\phi_n = \phi_n(\lambda)$, $\lambda \geq 0$, отношения S_n/M_n имеет вид

$$\phi_n(\lambda) = n e^{-\lambda} \int_0^\infty \left(\int_0^x e^{-\lambda y/x} f(y) dy \right)^{n-1} f(x) dx.$$

Решение. В силу непрерывности величин X_i , $1 \leq i \leq n$, вероятность

$$P(X_i = X_j \text{ для некоторых } 1 \leq i < j \leq n)$$

равна нулю. Поэтому

$$\phi_n(\lambda) = E e^{-\lambda S_n/M_n} = n e^{-\lambda} E e^{-\lambda S_{n-1}/X_n} I(M_{n-1} \leq X_n).$$

Далее, по теореме Фубини

$$\begin{aligned}\phi_n(\lambda) &= ne^{-\lambda} \int_0^{\infty} \mathbb{E} e^{-\lambda S_{n-1}/x} I(M_{n-1} \leq x) f(x) dx = \\ &= ne^{-\lambda} \int_0^{\infty} \left(\mathbb{E} e^{-\lambda X_1/x} I(X_1 \leq x) \right)^{n-1} f(x) dx = \\ &= ne^{-\lambda} \int_0^{\infty} \left(\int_0^x e^{-\lambda y/x} f(y) dy \right)^{n-1} f(x) dx. \quad \square\end{aligned}$$

47. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — положительные н. о. р. случайные величины, $\mathbb{E}X_1, \mathbb{E}X_1^{-1} < \infty$ и $S_m = X_1 + \dots + X_m$, $1 \leq m \leq n$. Показать, что

$$\mathbb{E}S_n^{-1} \leq \frac{\mathbb{E}X_1^{-1}}{n}, \quad \mathbb{E}X_1 S_n^{-1} = \frac{1}{n},$$

а также что при $m \leq n$ выполняются равенства

$$\mathbb{E}S_m S_n^{-1} = \frac{m}{n}, \quad \mathbb{E}S_n S_m^{-1} = 1 + (n-m)\mathbb{E}X_1 \mathbb{E}S_m^{-1}.$$

Решение. Распределение случайного вектора $(X_1, \dots, X_n)$ не изменяется при любой перестановке его компонент. Поэтому с учетом выпуклости функции $f(x) = x^{-1}$ при $x > 0$ имеем

$$\mathbb{E}nS_n^{-1} = \mathbb{E}f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}f(X_i) = \mathbb{E}X_1^{-1}.$$

Кроме того,

$$(X_i, S_n) \stackrel{d}{=} (X_1, S_n), \quad 1 \leq i \leq n,$$

и

$$\mathbb{E}X_1 S_n^{-1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}X_i S_n^{-1} = \frac{1}{n},$$

$$\mathbb{E}S_m S_n^{-1} = \sum_{i=1}^m \mathbb{E}X_i S_n^{-1} = m\mathbb{E}X_1 S_n^{-1} = \frac{m}{n}.$$

Оставшиеся соотношения вытекают из независимости и одинаковой распределенности X_n :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}S_n S_m^{-1} &= 1 + \mathbb{E}(S_n - S_m) S_m^{-1} = \\ &= 1 + \mathbb{E}(S_n - S_m) \mathbb{E}S_m^{-1} = 1 + (n-m)\mathbb{E}X_1 \mathbb{E}S_m^{-1}. \quad \square\end{aligned}$$

48. *Функцией концентрации* случайной величины X называется функция

$$Q(X; l) = \sup_{x \in \mathbb{R}} P(x < X \leq x + l), \quad l \geq 0.$$

Показать, что

(а) если X и Y — независимые случайные величины, то

$$Q(X + Y; l) \leq \min(Q(X; l), Q(Y; l)) \quad \text{для всех } l \geq 0;$$

(б) найдется такое x_l^* , что $Q(X; l) = P(x_l^* < X \leq x_l^* + l)$, и функция распределения величины X непрерывна тогда и только тогда, когда $Q(X; 0) = 0$.

Решение. (а) Заметим, что если F_X и F_Y — функции распределения величин X и Y , то

$$P(z < X + Y \leq z + l) = \int_{\mathbb{R}} [F_X(z + l - y) - F_X(z - y)] dF_Y(y).$$

Следовательно,

$$Q(X + Y; l) \leq Q(X; l) \cdot \int_{\mathbb{R}} dF_Y(y) = Q(X; l).$$

Аналогично устанавливается, что $Q(X + Y; l) \leq Q(Y; l)$.

(б) Поскольку

$$Q(X; 0) = \sup_{x \in \mathbb{R}} [F_X(x) - F_X(x-)],$$

функция распределения величины X непрерывна тогда и только тогда, когда $Q(X; 0) = 0$. Согласно задаче II.1.16 имеем

$$\overline{\lim}_n P(A_n) \leq P(\overline{\lim}_n A_n).$$

Искомое равенство $Q(X; l) = P(x_l^* < X \leq x_l^* + l)$ для некоторого $x_l^* \in \mathbb{R}$, таким образом, вытекает из следующего легко проверяемого соотношения:

$$\{\omega: x^* \leq X(\omega) \leq x^* + l\} \supseteq \overline{\lim}_n \{\omega: x_n < X(\omega) \leq x_n + l\},$$

если $x^* = \lim_n x_n$, а также того, что

$$P(x^* \leq X \leq x^* + l) = P(x^* < X \leq x^* + l). \quad \square$$

49. 1. Пусть $f = f(x)$ — нечетная ограниченная борелевская функция на $\mathbb{R}$. Тогда, как легко видеть,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} f(x) dx = 0.$$

Т. И. Стильтес в своей знаменитой монографии [104] (где он ввел *интеграл Стильтеса*) заметил, что если f имеет период единица, то из последнего соотношения следует, что

$$\int_0^{\infty} x^n x^{-\frac{\ln x}{2}} f(\ln x) dx = 0, \quad n = -1, 0, 1, 2, \dots$$

Проверить, что это действительно так.

2. Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ и $\zeta = e^{\xi}$ — *логарифмически нормальная* случайная величина (с параметрами $a = 0$ и $\sigma^2 = 1$), имеющая плотность

$$f_{\zeta}(x) = \begin{cases} \frac{x^{-\frac{\ln x}{2}}}{\sqrt{2\pi} x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

(а) Установить, что

$$E\zeta^n = \int_{\mathbb{R}} x^n f_{\zeta}(x) dx = e^{n^2/2}, \quad n \geq 1.$$

(b) Изменить плотность f_{ζ} так, чтобы получилась новая плотность распределения вероятностей, имеющая те же моменты, что и f_{ζ} .

(с) Следуя [7], показать, что *дискретная* случайная величина η , для которой

$$P(\eta = e^k) = Ce^{-k^2/2},$$

где $k \in \mathbb{Z}_+$, а $C > 0$ — нормирующая константа, имеет те же моменты, что и ζ .

Решение. 1. Пусть $n \in \{-1, 0, 1, \dots\}$. Делая замену переменных

$$x = \ln u - n - 1$$

под знаком интеграла $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} f(x) dx$, видим, что

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{(\ln u - n - 1)^2}{2}} f(\ln u - n - 1) \frac{du}{u} = 0.$$

С учетом равенства $f(\ln u - n - 1) = f(\ln u)$ находим, что

$$\int_0^{\infty} u^n u^{-\frac{\ln u}{2}} f(\ln u) du = 0,$$

что и требовалось доказать.

2. (а) При каждом $n \geq 1$ имеем

$$E\zeta^n = Ee^{n\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{nx - x^2/2} dx = \frac{e^{n^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-n)^2/2} dx = e^{n^2/2}.$$

(б) Возьмем любую нечетную борелевскую функцию $f = f(x)$, которая к тому же будет ограничена единицей и иметь период 1. Например, $f(x) = \sin(2\pi x)$. Тогда функция

$$g(x) = f_{\zeta}(x)(1 + f(\ln x))$$

будет неотрицательна и вследствие п. 1 получим, что

$$\int_{\mathbb{R}} x^n g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} x^n f_{\zeta}(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Иначе говоря, g будет плотностью с теми же моментами, что и f_{ζ} .

(с) Для всех $n \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} E\eta^n &= C \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{nk - \frac{k^2}{2}} = e^{\frac{n^2}{2}} C \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(k-n)^2}{2}} = \\ &= e^{\frac{n^2}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(\eta = n - k) = e^{\frac{n^2}{2}}. \end{aligned}$$

Тем самым η имеет те же моменты, что и ζ . $\square$

50. Дать пример плотности $f = f(x)$, не являющейся четной функцией, для которой, тем не менее,

$$\int_{-\infty}^0 |x|^n f(x) dx = \int_0^{\infty} |x|^n f(x) dx, \quad n \geq 1.$$

Решение. В качестве $f = f(x)$ можно взять, например,

$$\frac{g(-x)}{2} + \frac{f_{\zeta}(x)}{2},$$

где $f_{\zeta}(x)$ и $g(x)$ фигурируют в решении задачи II.8.49(b). $\square$

51. Пусть $(\xi_n)_{n \geq 1}$ — последовательность симметрично распределенных (между собой и относительно нуля) случайных величин,

$$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n, \quad n \geq 1.$$

Определим последовательность частичных максимумов $M = (M_n)_{n \geq 1}$, полагая

$$M_n = \max(0, S_1, \dots, S_n),$$

и последовательность частичных минимумов $m = (m_n)_{n \geq 1}$, полагая

$$m_n = \min(0, S_1, \dots, S_n).$$

Показать, что для каждого $n \geq 1$ выполняются равенства

$$(M_n - S_n, S_n - m_n, S_n) \stackrel{d}{=} (-m_n, M_n, S_n) \stackrel{d}{=} (M_n, -m_n, -S_n),$$

т. е. совместные распределения этих троек случайных величин совпадают.

Решение. Достаточно воспользоваться легко устанавливаемыми соотношениями

$$(S_n - S_{n-k}; k \leq n) \stackrel{d}{=} (S_k; k \leq n), \quad (-S_k; k \leq n) \stackrel{d}{=} (S_k; k \leq n)$$

для всякого n . □

52. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — н. о. р. случайные величины с непрерывной функцией распределения. Показать, что

$$P(\xi_{\max} = \xi_1) = n^{-1},$$

где $\xi_{\max} = \max\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$.

Установить также, что случайные величины $\xi_{\max}$ и $I(\xi_{\max} = \xi_1)$ независимы.

Решение. В силу симметричности величин $\xi_1, \dots, \xi_n$ для всех борелевских множеств B имеем

$$P(\xi_{\max} \in B) = \sum_{i=1}^n P(\xi_{\max} \in B, \xi_{\max} = \xi_i) = nP(\xi_{\max} \in B, \xi_{\max} = \xi_1),$$

где учтен тот факт (см. задачу II.8.57), что

$$P(\xi_i = \xi_j \text{ для некоторых } i \neq j) = 0.$$

Полагая $B = \mathbb{R}$, получаем $P(\xi_{\max} = \xi_1) = n^{-1}$. Два последних соотношения гарантируют независимость $\xi_{\max}$ и $I(\xi_{\max} = \xi_1)$. □

53. Пусть X — случайная величина с функцией распределения $F = F(x)$ и C — константа. Найти функции распределения следующих случайных величин:

$$X \vee C \equiv \max(X, C), \quad X \wedge C \equiv \min(X, C), \quad X^C = \begin{cases} X, & |X| \leq C, \\ 0, & |X| > C. \end{cases}$$

Решение. Прямым вычислением получаем, что

$$P(X \vee C \leq x) = \begin{cases} P(X \leq x), & x \geq C, \\ 0, & x < C; \end{cases}$$

$$P(X \wedge C \leq x) = \begin{cases} P(X \leq x), & x < C, \\ 1, & x \geq C; \end{cases}$$

$$P(X^C \leq x) = \begin{cases} 0, & x < -C, \\ P(-C \leq X \leq x), & -C \leq x < 0, \\ P(-C \leq X \leq x) + P(|X| > C), & 0 \leq x \leq C, \\ 1, & x > C. \end{cases} \quad \square$$

54. (Схема Бернулли со случайной вероятностью успеха.)

Пусть случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ и π таковы, что π имеет равномерное распределение на $(0, 1)$, а величины $\xi_i, i = 1, \dots, n$, принимают два значения 1 и 0 с условными вероятностями

$$P(\xi_i = 1 | \pi = p) = p, \quad P(\xi_i = 0 | \pi = p) = 1 - p$$

и являются условно независимыми:

$$P(\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n | \pi) = P(\xi_1 = x_1 | \pi) \dots P(\xi_n = x_n | \pi)$$

(здесь и далее $x_i = 0, 1$ для $i = 1, \dots, n$).

Показать, что

$$(a) \quad P(\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n) = \frac{1}{(n+1)C_n^x}, \text{ где } x = x_1 + \dots + x_n;$$

(b) величина $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ имеет дискретное равномерное распределение на множестве $\{0, 1, \dots, n\}$;

(c) условные распределения

$$P(\pi \leq p | \xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n) \quad \text{и} \quad P(\pi \leq p | S_n = x_1 + \dots + x_n)$$

совпадают, $p \in (0, 1)$;

(d) распределение $P(\pi \leq p | S_n = x)$, где $x = x_1 + \dots + x_n$, имеет плотность

$$f_{\pi|S_n}(p|x) = (n+1)C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\text{и } E(\pi | S_n = x) = \frac{x+1}{n+2}.$$

Решение. (а) Справедливо равенство

$$\begin{aligned} P(\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n) &= \int_0^1 P(\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n | \pi = p) dp = \\ &= \int_0^1 \prod_{i=1}^n p^{x_i} (1-p)^{1-x_i} dp = \int_0^1 p^x (1-p)^{n-x} dp = \\ &= B(x+1, n-x+1) = \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)}{\Gamma(n+2)} = \frac{x!(n-x)!}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)C_n^x}, \end{aligned}$$

где $x = x_1 + \dots + x_n$.

(b) При $x \in \{0, 1, \dots, n\}$ имеем

$$\begin{aligned} P(S_n = x) &= \sum_{(x_1, \dots, x_n): \sum_{i=1}^n x_i = x} P(\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n) = \\ &= C_n^x \cdot \frac{1}{(n+1)C_n^x} = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Другими словами, S_n имеет равномерное распределение на множестве $\{0, 1, \dots, n\}$.

(с) Вычислим первую вероятность (полагая, как и раньше, $x = x_1 + \dots + x_n$):

$$\begin{aligned} P(\pi \leq q | \xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n) &= \frac{\int_0^q P(\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n | \pi = p) dp}{P(\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n)} = \\ &= (n+1)C_n^x \int_0^q p^x (1-p)^{n-x} dp. \end{aligned}$$

Аналогично получаем, что

$$\begin{aligned} P(\pi \leq q | S_n = x) &= \frac{\int_0^q P(S_n = x | \pi = p) dp}{P(S_n = x)} = \\ &= (n+1) \int_0^q C_n^x p^x (1-p)^{n-x} dp, \end{aligned}$$

что гарантирует требуемое равенство.

(d) Искомая плотность может быть вычислена по формуле

$$f_{\pi|S_n}(p|x) = \frac{P(S_n = x | \pi = p)}{P(S_n = x)} = (n+1)C_n^x p^x (1-p)^{n-x},$$

откуда получаем, что

$$\begin{aligned}
 E(\pi | S_n = x) &= \int_0^1 p f_{\pi|S_n}(p|x) dp = (n+1)C_n^x \int_0^1 p^{x+1} (1-p)^{n-x} dp = \\
 &= (n+1)C_n^x \cdot B(x+2, n-x+1) = \\
 &= (n+1)C_n^x \cdot \frac{\Gamma(x+2)\Gamma(n-x+1)}{\Gamma(n+3)} = \\
 &= \frac{(n+1)!}{x!(n-x)!} \cdot \frac{(x+1)!(n-x)!}{(n+2)!} = \frac{x+1}{n+2}. \quad \square
 \end{aligned}$$

55. Пусть ξ — неотрицательная случайная величина с такой функцией распределения $F = F(x)$, что $F(0) < 1$ и существует правая производная $F'_+(0) = \lambda$. Показать, что

$$\text{величина } \xi \text{ экспоненциальна} \Leftrightarrow \xi \wedge \eta \stackrel{d}{=} \xi/2,$$

где η — независимая копия величины ξ .

Решение. Докажем достаточность условия $\xi \wedge \eta \stackrel{d}{=} \xi/2$ (его необходимость проверяется элементарно). Для всех $x \geq 0$ имеем

$$P(\xi > x)^2 = P(\xi \wedge \eta > x) = P(\xi > 2x),$$

и, следовательно, при $n \geq 1$ получаем

$$P(\xi > x) = P\left(\xi > \frac{x}{2^n}\right)^{2^n} = \left[1 - P\left(\xi \leq \frac{x}{2^n}\right)\right]^{2^n}.$$

Отсюда с учетом условия $P(\xi > 0) > 0$ вытекает, что вероятность события $\{\xi \leq 0\}$ равна нулю. Таким образом, при $x > 0$ имеем

$$P(\xi > x) = \lim_n \left[1 - P\left(\xi \leq \frac{x}{2^n}\right)\right]^{2^n} = \lim_n \left[1 - \frac{\lambda x + o(1)}{2^n}\right]^{2^n} = e^{-\lambda x},$$

что и требовалось доказать. $\square$

56. (См. [90].) Пусть X — ограниченная случайная величина с функцией распределения $F = F(x)$ и гладкой плотностью $f = f(x)$.

(а) Пусть $f(x)$ не возрастает при $x > 0$ и не убывает при $x \leq 0$, другими словами, величина X *унимодальна* с модой $x = 0$. Доказать, что $X \stackrel{d}{=} UZ$, где U и Z — независимые случайные величины, причем U имеет равномерное распределение на $[0, 1]$, а функция распределения величины Z задается равенством $G(x) = F(x) - xf(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(б) Установить обратное: если $X \stackrel{d}{=} UZ$, где величины U и Z независимы, причем U имеет равномерное распределение на $[0, 1]$, то величина X унимодальна с модой в нуле.

Замечание. Данные утверждения являются частным случаем *критерия Хинчина*, в котором отсутствуют какие-либо ограничения на гладкость функции F и ограниченность величины X .

Решение. (а) Заметим прежде всего, что G действительно является функцией распределения. В самом деле, $G(\infty) = 1$, $G(-\infty) = 0$ (так как $f(x) = 0$ вне некоторого отрезка), и при всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$G'(x) = f(x) - xf'(x) - f(x) = -xf'(x) \geq 0$$

вследствие унимодальности (с модой в $x = 0$) величины X .

По теореме Фубини для всякого действительного x имеем

$$\begin{aligned} P(UZ \leq x) &= \int_0^1 P(uZ \leq x) du = \int_0^1 G(x/u) du = \\ &= \int_0^1 \left[F(x/u) - \frac{x}{u} F'(x/u) \right] du = \int_0^1 \frac{du F(x/u)}{du} du = F(x), \end{aligned}$$

т. е. $X \stackrel{d}{=} UZ$.

(б) Если $X \stackrel{d}{=} UZ$, то функция распределения G величины Z должна удовлетворять интегральному уравнению

$$\int_0^1 G(x/u) du = x \int_x^\infty \frac{G(v)}{v^2} dv = F(x).$$

Отсюда следует, что $G(x)$ совпадает (почти всюду на $\mathbb{R}$ по мере Лебега) с $G_0(x) = F(x) - xf'(x)$, поскольку G_0 этому уравнению удовлетворяет. В силу непрерывности справа функций G_0 и G они должны быть равны всюду. Итак, мы получили, что $G(x) = F(x) - xf'(x)$ есть функция распределения и, значит, $G'(x) = -xf'(x) \geq 0$. Последнее неравенство эквивалентно тому, что величина X унимодальна с модой в нуле. $\square$

57. Пусть X и Y — независимые случайные величины с функциями распределения F и G соответственно. Показать, что

$$P(X = Y) = \sum_{-\infty < x < \infty} [F(x) - F(x-)] \cdot [G(x) - G(x-)].$$

Решение. По теореме Фубини

$$\begin{aligned} P(X = Y) &= EP(x = Y)|_{x=X} = E[G(X) - G(X-)] = \\ &= \sum_{-\infty < x < \infty} [F(x) - F(x-)] \cdot [G(x) - G(x-)]. \quad \square \end{aligned}$$

58. Пусть X и Y — независимые случайные величины. Показать, что функция распределения величины $X + Y$

(а) *непрерывна*, если величина Y непрерывна, т. е. $P(Y = y) = 0$ для всех $y \in \mathbb{R}$;

(б) *имеет плотность* $g(z) = Ef(z - X)$, если Y имеет плотность $f = f(y)$;

(с) *сингулярна*, если X и Y — дискретная и сингулярная величины соответственно.

Установить, что свойства (а) и (б), вообще говоря, не выполнены, если X и Y не являются независимыми.

Решение. (а) Утверждение следует из задачи II.8.57.

(б) По теореме Фубини

$$El_B(X + Y) = EP(x + Y \in B) \Big|_{x=X} = E \int_{B-X} f(y) dy = \int_B Ef(z - X) dz.$$

(с) Если $X \in \{x_1, x_2, \dots\}$ п. н., то

$$G(z) = P(X + Y \leq z) = \sum_{n=1}^{\infty} P(Y \leq z - x_n)P(X = x_n).$$

Функция $G(z)$ непрерывна, так как величина Y непрерывна, см. п. (а). Кроме того, множество D точек роста функции G содержится в объединении множеств точек роста функций $G_n(z) = P(Y \leq z - x_n)$, каждое из которых имеет лебегову меру нуль в силу сингулярности Y . Поэтому мера множества D также равна нулю, так что функция G сингулярна.

Свойства (а) и (б) не будут выполнены, если взять $X = -Y$. $\square$

59. (См. [94].) Пусть X, Y — независимые симметричные случайные величины с плотностями $f = f(x)$ и $g = g(x)$ соответственно. Доказать, что

(а) $X + Y$ — симметричная случайная величина;

(б) $X + Y$ — симметричная унимодальная величина, когда каждая из величин X и Y имеет унимодальное распределение с модой в нуле.

Решение. (а) По условию $X \stackrel{d}{=} -X$ и $Y \stackrel{d}{=} -Y$. Вследствие независимости $(X, Y) \stackrel{d}{=} (-X, -Y)$, и, значит, $f(X, Y) \stackrel{d}{=} f(-X, -Y)$ для всякой борелевской функции $f = f(x, y)$. Полагая $f(x, y) = x + y$, получаем требуемое свойство.

(б) Как установлено в задаче II.8.58(б), плотность $h = h(z)$ суммы $X + Y$ можно записать в виде $h(z) = Eg(z - X)$. В силу п. (а) функция h четна, так что достаточно доказать, что $h(z)$ не возрастает при $z > 0$.

Имеем

$$Eg(z - X) = Eg(X - z) = \int_0^{\infty} P(g(X - z) > u) du.$$

Вследствие симметричности и унимодальности функции g событие $\{g(X - z) > u\}$ представляется в виде $\{z - v < X < z + v\}$ при некотором $v = v(u) > 0$. Наконец, как вытекает из симметричности и унимодальности величины X , вероятность $P(z - v < X < z + v)$ не возрастает при $z > 0$. Следовательно, $h(z) = Eg(z - X)$ также не возрастает при $z > 0$. $\square$

60. Показать, что справедлива следующая *формула включения-исключения для максимума случайных величин* $X_1, \dots, X_n$:

$$\begin{aligned} X_1 \vee \dots \vee X_n &= \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_i \wedge X_j + \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} X_i \wedge X_j \wedge X_k + \dots + (-1)^{n+1} X_1 \wedge \dots \wedge X_n. \end{aligned}$$

Вывести отсюда *формулу включения-исключения для вероятностей*

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \dots \cup A_n) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n). \end{aligned}$$

Решение. В силу симметрии рассматриваемых выражений относительно любой перестановки X_n можно считать, что $X_1 \geq \dots \geq X_n$. В этом случае требуемое равенство переписывается в виде

$$\begin{aligned} X_1 &= \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{j=2}^n C_{j-1}^1 X_j + \sum_{k=3}^n C_{k-1}^2 X_k + \dots + (-1)^{n+1} X_n = \\ &= X_1 + \sum_{i=2}^n X_i \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k C_{i-1}^k. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что

$$\sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k C_{i-1}^k = (-1 + 1)^{i-1} = 0, \quad i > 1.$$

Полагая $X_i = I_{A_i}$ и находя среднее от обеих частей указанного в условии задачи равенства, получаем формулу включения-исключения для $P(A_1 \cup \dots \cup A_n)$. $\square$

61. Пусть случайная величина X распределена по биномиальному закону с параметрами $n \in \mathbb{N}$ и $p \in [0, 1]$, т. е.

$$P(X \leq m) = \sum_{k=0}^m C_n^k p^k q^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad q = 1 - p,$$

Доказать, что $P(X \leq m)$ может быть выражена через неполную *бета-функцию*:

$$P(X \leq m) = \frac{1}{B(m+1, n-m)} \int_p^1 x^m (1-x)^{n-m-1} dx,$$

где

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx.$$

Решение. Интегрируя по частям, находим, что

$$\begin{aligned} \int_p^1 x^m (1-x)^{n-m-1} dx &= \frac{p^m q^{n-m}}{n-m} + \frac{m}{n-m} \int_p^1 x^{m-1} (1-x)^{n-m} dx = \\ &= \frac{p^m q^{n-m}}{n-m} + \frac{m p^{m-1} q^{n-m+1}}{(n-m)(n-m+1)} + \\ &\quad + \frac{m(m-1)}{(n-m)(n-m+1)} \int_p^1 x^{m-2} (1-x)^{n-m+1} dx = \dots = \\ &= \sum_{i=0}^m \frac{C_n^{m-i}}{C_n^m (n-m)} p^{m-i} q^{n-m-i}. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства следует заметить, что

$$B(m+1, n-m)^{-1} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(n-m)} = \frac{n!}{m!(n-m-1)!} = C_n^m (n-m).$$

□

62. Показать, что пуассоновская функция распределения

$$F(m; \lambda) \equiv \sum_{k=0}^m \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

выражается следующим образом через неполную *гамма-функцию*:

$$F(m; \lambda) = \frac{1}{m!} \int_{\lambda}^{\infty} x^m e^{-x} dx.$$

Решение. Утверждение следует (как и в случае задачи II.8.61) из формулы интегрирования по частям. $\square$

63. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — н. о. р. случайные величины с параметром *скошенности* (skewness)

$$\text{skw}(\xi_1) = \frac{E(\xi_1 - E\xi_1)^3}{(D\xi_1)^{3/2}}$$

и параметром *пикообразности* (kurtosis)

$$\text{kur}(\xi_1) = \frac{E(\xi_1 - E\xi_1)^4}{(D\xi_1)^2}.$$

Показать, что

$$\text{skw}(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \frac{\text{skw}(\xi_1)}{\sqrt{n}}$$

и

$$\text{kur}(\xi_1 + \dots + \xi_n) = 3 + \frac{\text{kur}(\xi_1) - 3}{n}.$$

Решение. Обозначим $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Без ограничения общности можно считать, что $E\xi_1 = 0$. Из независимости и одинаковой распределенности величин ξ_i , $1 \leq i \leq n$, получаем, что

$$DS_n = nD\xi_1,$$

$$ES_n^3 = nE\xi_1^3 + 3n(n-1)E\xi_1^2\xi_2 + n(n-1)(n-2)E\xi_1\xi_2\xi_3 = nE\xi_1^3,$$

так как $E\xi_1^2\xi_2 = E\xi_1^2 \cdot E\xi_1 = 0$, $E\xi_1\xi_2\xi_3 = (E\xi_1)^3 = 0$. Поэтому

$$\text{skw}(S_n) = \frac{ES_n^3}{(DS_n)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{E\xi_1^3}{(D\xi_1)^{3/2}} = \frac{\text{skw}(\xi_1)}{\sqrt{n}}.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} ES_n^4 &= nE\xi_1^4 + 3n(n-1)E\xi_1^2\xi_2^2 + 4n(n-1)E\xi_1^3\xi_2 + \\ &\quad + 6n(n-1)(n-2)E\xi_1^2\xi_2\xi_3 + n(n-1)(n-2)(n-3)E\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4 = \\ &= nE\xi_1^4 + 3n(n-1)E\xi_1^2\xi_2^2, \end{aligned}$$

откуда следует второе равенство. $\square$

64. Пусть X — биномиальная случайная величина с параметрами $n \in \mathbb{N}$ и $p \in [0, 1]$. Показать, что для нее параметр *скошенности* задается формулой ($q = 1 - p$)

$$\text{skw}(X) = \frac{E(X - EX)^3}{(DX)^{3/2}} = \frac{q - p}{\sqrt{npq}}.$$

В частности, если $0 < p < 1/2$, то $\text{skw}(X) > 0$; в этом случае говорят, что распределение имеет *скошено* вправо. Найти также значение параметра *пикообразности*

$$\text{kur}(X) = \frac{E(X - EX)^4}{(DX)^2}.$$

Решение. Используя результат задачи II.8.63, а также равенство $X \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^n \xi_i$, где $(\xi_i)_{i=1}^n$ — н. о. р. бернуллиевские величины, $P(\xi_1 = 1) = p$ и $P(\xi_1 = 0) = q$, находим, что

$$\text{skw}(X) = \frac{q - p}{\sqrt{npq}}, \quad \text{kur}(X) = 3 + \frac{1}{npq} - \frac{6}{n}. \quad \square$$

65. Когда вводится биномиальное распределение, то фиксируется число испытаний n и рассматривается вероятность $P_n(\nu = r)$ того, что число «успехов» ν в этих n испытаниях равно r . Эти вероятности $P_n(\nu = r) = C_n^r p^r q^{n-r}$, $0 \leq r \leq n$, и образуют *биномиальное распределение*, где p — вероятность единичного «успеха», а $q = 1 - p$.

Отрицательно-биномиальное распределение $P^r(\tau = k)$ (называемое иногда также *обратно-биномиальным* или *распределением Паскаля*) возникает, когда рассматривается вопрос о том, какова вероятность того, что r «успехов» *впервые* появятся на (случайном) шаге $\tau = k$ ($\geq r$). Показать, что

$$P^r(\tau = k) = C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-r}, \quad k \geq r,$$

$r = 1, 2, \dots$, и проверить, что $E^r \tau = r/p$.

Решение. Пусть $(\xi_n)_{n \geq 1}$ — независимые бернуллиевские величины,

$$P(\xi_n = 1) = p \quad \text{и} \quad P(\xi_n = 0) = q,$$

а $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, $n \geq 1$. Тогда

$$P^r(\tau = k) = P(S_{k-1} = r-1, \xi_k = 1) = C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-r}.$$

Заметим далее, что

$$p^{-r} = (1-q)^{-r} = \sum_{i \geq 0} C_{-r}^i (-q)^i = \sum_{i \geq 0} C_{r+i-1}^i q^i = \sum_{i \geq 0} C_{r+i-1}^{r-1} q^i$$

и

$$r p^{-r-1} = r(1-q)^{-r-1} = ((1-x)^{-r})'_{x=q} = \sum_{i \geq 1} i C_{r+i-1}^{r-1} q^{i-1}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} E^r \tau &= \sum_{k \geq r} k C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-r} = p^r q \sum_{i \geq 0} i C_{r+i-1}^{r-1} q^{i-1} + r p^r \sum_{i \geq 0} C_{r+i-1}^{r-1} q^i = \\ &= \frac{r p^r q}{p^{r+1}} + \frac{r p^r}{p^r} = \frac{r}{p}. \quad \square \end{aligned}$$

66. (а) Говорят, что случайная величина ξ с натуральными значениями распределена по *дискретному закону Парето* с параметром $\rho > 0$, если

$$P(\xi = n) = \frac{1}{\zeta(\rho+1)n^{\rho+1}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s}$ — дзета-функция Римана. Показать, что

$$E\xi = \frac{\zeta(\rho)}{\zeta(\rho+1)}.$$

(b) (См. [29].) Установить, что

$$\zeta(2) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad (*)$$

путем подсчета вспомогательного интеграла

$$\int_{[0,1]^2} \frac{dx dy}{1-xy}.$$

Решение. (а) Утверждение вытекает из определения $E\xi$.

(b) Заметим прежде всего, что (по теореме Фубини)

$$I = \int_{[0,1]^2} \frac{dx dy}{1-xy} = \int_{[0,1]^2} \sum_{n=1}^{\infty} (xy)^{n-1} dx dy = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{n-1}}{n} dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Переходя к новым координатам $x = u - v$, $y = u + v$, находим

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{1/2} du \int_{-u}^u \frac{dv}{(1-u^2)+v^2} + 2 \int_{1/2}^1 du \int_{-(1-u)}^{1-u} \frac{dv}{(1-u^2)+v^2} = \\ &= 4 \int_0^{1/2} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} + 4 \int_{1/2}^1 \operatorname{arctg} \frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}. \end{aligned}$$

Делая далее замену $u = \sin \theta$, получаем, что

$$\int_0^{1/2} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int_0^{\pi/6} \operatorname{arctg} \operatorname{tg} \theta \cdot \frac{d \sin \theta}{\cos \theta} = \int_0^{\pi/6} \theta d\theta = \frac{\pi^2}{72}.$$

Полагая теперь $u = \cos \theta$, видим, что

$$\int_{1/2}^1 \operatorname{arctg} \frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int_{\pi/3}^0 \operatorname{arctg} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \cdot \frac{d \cos \theta}{\sin \theta} = \int_0^{\pi/3} \frac{\theta}{2} \cdot d\theta = \frac{\pi^2}{36}.$$

Поэтому

$$I = \frac{4\pi^2}{72} + \frac{4\pi^2}{36} = \frac{\pi^2}{6}. \quad \square$$

Замечание. Первым $\zeta(2)$ подсчитал Л. Эйлер в 1734 г. (см. подробнее § 10.65 в книге [19]). Вначале его доказательство было не совсем строгим, но весьма поучительным, так как впоследствии аналогичным методом можно было суммировать $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k}$ при всех натуральных k .

А именно, метод Л. Эйлера, иллюстрируемый сейчас для случая $k=1$, состоял в следующем. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0, \quad x \geq 0$$

(в нуле указанная дробь доопределяется по непрерывности единицей). Решения этого уравнения суть $x_n = \pi^2 n^2$, $n \in \mathbb{N}$. Запишем функцию $\sin \sqrt{x}/\sqrt{x}$ как «бесконечный» многочлен

$$1 - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \dots$$

Заметим, что если имеется многочлен $P(x) = 1 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ степени $n \geq 1$ с n различными корнями $x_1, \dots, x_n$, то по теореме Безу

$$P(x) = \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_n}\right).$$

Предположим, что эта теорема верна и для «бесконечных» многочленов, таких как $\sin \sqrt{x}/\sqrt{x}$. Тогда

$$1 - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \dots = \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \dots = 1 - \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots\right)x + \dots$$

Иначе говоря,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\pi^2 n^2} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

67. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — н. о. р. случайные величины с функцией распределения $F(x|\theta)$, зависящей от некоторого (случайного) параметра θ , имеющего *априорное распределение* $\Pi(\theta)$ из некоторого класса $\mathcal{K}$.

Пусть также $\Pi(\theta|x_1, \dots, x_n)$ — апостериорное распределение, подсчитанное по формуле Байеса в предположении, что $x_1, \dots, x_n$ есть результаты наблюдений над $\xi_1, \dots, \xi_n$. Если это апостериорное распределение также принадлежит тому же самому классу $\mathcal{K}$, то говорят, что распределения $\Pi(\theta)$ из $\mathcal{K}$ сопряжены с распределением $F(x|\theta)$.

Показать, что

(а) если $F(\cdot|\theta) \sim \mathcal{N}(\theta, a)$ и $\Pi(\theta) \sim \mathcal{N}(b, c)$, то

$$\Pi(\theta|x_1, \dots, x_n) \sim \mathcal{N}\left(\frac{ab + c(x_1 + \dots + x_n)}{a + nc}, \frac{1}{a + nc}\right);$$

(б) если $F(\cdot|\theta) \sim \mathcal{N}(0, \theta^{-1})$ и $\Pi(\theta) \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ — гамма-распределение с плотностью

$$f(x; \alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} I(x \geq 0),$$

то

$$\Pi(\theta|x_1, \dots, x_n) \sim \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}n, \lambda + \frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2)\right);$$

(с) если $F(\cdot|\theta)$ — экспоненциальное распределение с параметром θ и $\Pi(\theta) \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, то

$$\Pi(\theta|x_1, \dots, x_n) \sim \Gamma(\alpha + n, \lambda + (x_1 + \dots + x_n));$$

(д) если $F(\cdot|\theta) \sim \text{Poisson}(\theta)$ и $\Pi(\theta) \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, то

$$\Pi(\theta|x_1, \dots, x_n) \sim \Gamma(\alpha + (x_1 + \dots + x_n), \lambda + n);$$

(е) если $F(\cdot|\theta) \sim \text{Bernoulli}(\theta)$ и $\Pi(\theta)$ есть бета-распределение с параметрами (α, β) , т. е. $\Pi(\theta)$ имеет плотность вида

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} I(0 < x < 1),$$

то $\Pi(\theta|x_1, \dots, x_n)$ есть бета-распределение с параметрами

$$(\alpha + (x_1 + \dots + x_n), \beta + n - (x_1 + \dots + x_n)).$$

(Предполагается, что значения всех параметров лежат в области определения соответствующих распределений.)

Решение. Свойство сопряженности указанных распределений устанавливается прямым вычислением с помощью формулы

$$\pi(\theta|x_1, \dots, x_n) = \frac{\pi(\theta)f(x_1|\theta)\dots f(x_n|\theta)}{\int_{\mathbb{R}} \pi(z)f(x_1|z)\dots f(x_n|z) dz},$$

где $\pi(\cdot)$ — априорная плотность параметра θ (относительно меры Лебега), а $f(\cdot|\theta)$ — плотность (относительно меры Лебега или $\sum_{n \geq 0} \delta_n$), отвечающая $F(\cdot|\theta)$. $\square$

68. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые экспоненциально распределенные случайные величины с параметрами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ соответственно.

(а) Показать, что

$$P(\xi_1 \leq \xi_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

(б) Показать, что $\xi_{\min} = \min\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$, и вывести из п. (а), что

$$P(\xi_1 = \xi_{\min}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}.$$

(с) Найти плотность распределения величины $\xi_1 + \dots + \xi_n$, когда все λ_i различны и когда $\lambda_i \equiv \lambda$.

(д) Показать, что

$$E \xi_1 \wedge \xi_2 = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

и найти $E \xi_1 \vee \xi_2$.

(е) Найти плотность распределения случайной величины $\xi_1 - \xi_2$.

(ф) Показать, что величины $\xi_1 \wedge \xi_2$ и $\xi_1 - \xi_2$ являются независимыми.

Решение. (а) Имеем

$$P(\xi_1 \leq \xi_2) = EP(x \leq \xi_2)|_{x=\xi_1} = Ee^{-\lambda_2 \xi_1} = \lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2),$$

(б) Имеем $P(\xi_{\min} > x) = P(\xi_1 > x) \dots P(\xi_n > x) = e^{-\lambda x}$ при $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$, и в силу п. (а) получаем

$$P(\xi_1 = \xi_{\min}) = P(\xi_1 \leq \min\{\xi_2, \dots, \xi_n\}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i}.$$

(с) Пусть вначале все λ_i различны. Плотность суммы $\xi_1 + \dots + \xi_n$ можно вычислять по индукции (базу индукции $n = 2$ см. в задаче П.8.23). Однако проще воспользоваться экспоненциальными производящими функциями. Прежде всего напомним некоторые факты из алгебры. Известно, что если все λ_i различны, то

$$\text{дробь } \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_i - t} \text{ однозначно представляется в виде } \sum_{i=1}^n \frac{c_i \lambda_i}{\lambda_i - t}.$$

При этом c_i можно искать предельным переходом при $t \rightarrow \lambda_i$ после умножения обоих выражений на $\lambda_i - t$. Следовательно,

$$c_i = \prod_{j \neq i} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i}.$$

Поскольку $M_\xi(t) = Ee^{\xi t} = \lambda/(\lambda - t)$ для величины ξ , распределенной экспоненциально с параметром λ , и $t < \lambda$, получаем, что

$$M_{\xi_1 + \dots + \xi_n}(t) = \prod_{i=1}^n M_{\xi_i}(t) = \sum_{i=1}^n c_i M_{\xi_i}(t).$$

Учитывая, что производящая функция однозначно определяет плотность величины $\xi_1 + \dots + \xi_n$, видим, что она равна

$$I(x > 0) \cdot \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i e^{-\lambda_i x}.$$

Пусть теперь $\lambda_i \equiv \lambda$. Поскольку экспоненциальное распределение с параметром λ есть гамма-распределение с параметрами $(1, \lambda)$, в силу задачи II.8.74 сумма $\xi_1 + \dots + \xi_n$ также имеет гамма-распределение с параметрами (n, λ) , т. е. обладает плотностью вида

$$\frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!}, \quad x \geq 0.$$

(d) Равенство $E \xi_1 \wedge \xi_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^{-1}$ следует из п. (b):

$$E \xi_1 \vee \xi_2 = E(\xi_1 + \xi_2 - \xi_1 \wedge \xi_2) = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

(e) Совместная плотность величин ξ_1 и $\xi_1 - \xi_2$ — это $f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(x - y)$, где x соответствует ξ_1 . Поэтому плотность величины $\xi_1 - \xi_2$ равна

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(x - y) dx &= \lambda_1 \lambda_2 e^{\lambda_2 y} \int_{y \vee 0}^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x} dx = \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \begin{cases} e^{-\lambda_1 y}, & y \geq 0, \\ e^{\lambda_2 y}, & y < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

(f) Найдём совместную плотность величин $\xi_1 \wedge \xi_2$ и $\xi_1 - \xi_2$. Пусть переменная y соответствует $\xi_1 - \xi_2$. Случай $y \geq 0$ эквивалентен тому, что $\xi_1 \geq \xi_2$, откуда, очевидно, следует, что $\xi_1 \wedge \xi_2 = \xi_2$, и совместная

плотность в этом случае равна $f_{\xi_1}(x+y)f_{\xi_2}(x)$. Если же $y < 0$, то она равна $f_{\xi_1}(x)f_{\xi_2}(x+y)$. Комбинируя эти случаи, получаем

$$(\lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x} \cdot \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \begin{cases} e^{-\lambda_1 y}, & y \geq 0, \\ e^{\lambda_2 y}, & y < 0. \end{cases}$$

Последнее с учетом пп. (b) и (e) означает независимость $\xi_1 \wedge \xi_2$ и $\xi_1 - \xi_2$. $\square$

69. (*Гамма- и бета-функции*, [56].) В данной задаче предлагается получить интегральное представление для $n!$ и тем самым ввести *гамма-функцию*, как это делал Л. Эйлер. Показать вначале, что

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^n dx = \frac{n!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)}, \quad \alpha > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (*)$$

Вывести отсюда, что при $a > 0$

$$\int_0^1 \left(\frac{1-x^a}{a} \right)^n dx = \frac{n!}{(1+a)\dots(1+an)}.$$

Переходя к пределу при $a \rightarrow 0$, установить, что

$$\int_0^1 (-\ln x)^n dx = n!.$$

Полученный интеграл А. М. Лежандр называл *первым эйлеровым интегралом*, а соответствующую ему функцию обозначал буквой Γ (гамма):

$$\Gamma(s) = \int_0^1 (-\ln x)^{s-1} dx, \quad s > 0.$$

Показать, что *гамма-функция* $\Gamma(s)$ допускает иное представление:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx.$$

Получить отсюда рекуррентное свойство гамма-функции $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.

Вторым эйлеровым интегралом (или *бета-функцией*) называют интегралы вида

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx, \quad \alpha, \beta > 0.$$

В силу соотношения (*) для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ имеем

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

Доказать, что эта формула остается верной для любых $\alpha, \beta > 0$.

Решение. Чтобы установить соотношение (*), достаточно n раз проинтегрировать по частям. Переходя к новой переменной $z = x^\alpha$ и полагая $\alpha = 1/a$, получаем

$$\int_0^1 x^{1/a-1} (1-x)^n dx = a^n \int_0^1 \left(\frac{1-z^a}{a}\right)^n \frac{dz}{1/a}.$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{a^{n+1}} \int_0^1 x^{1/a-1} (1-x)^n dx = \frac{n!}{a(1+a)\dots(1+an)},$$

откуда следует второе искомое равенство. При $a \rightarrow 0$ для всех $x \in (0, 1]$ имеем

$$\frac{1-x^a}{a} = \frac{1-e^{a \ln x}}{a} \rightarrow -\ln x \quad \text{и} \quad 0 \leq \frac{1-e^{a \ln x}}{a} \leq |\ln x|.$$

Кроме того, $\int_0^1 |\ln x|^n dx < \infty$, так как $|\ln x| = o(1/\sqrt{x})$ при $x \rightarrow 0$.

Следовательно, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\int_0^1 \left(\frac{1-x^a}{a}\right)^n dx \rightarrow \int_0^1 (-\ln x)^n dx.$$

Очевидно также, что

$$\frac{n!}{(1+a)\dots(1+an)} \rightarrow n!,$$

откуда получаем третье равенство.

Второе представление для гамма-функции вытекает из первого, если сделать подходящую замену переменных ($x = e^{-z}$). Выведем теперь рекуррентное свойство:

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty x^s e^{-x} dx = -x^s e^{-x} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x} dx x^s = s\Gamma(s).$$

Более того,

$$\begin{aligned}
 \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \cdot \int_0^\infty y^{\beta-1} e^{-y} dy = \\
 &= \int_{\mathbb{R}_+^2} x^{\alpha-1} y^{\beta-1} e^{-(x+y)} dx dy = \int_{0 \leq x \leq u} x^{\alpha-1} (u-x)^{\beta-1} e^{-u} dx du = \\
 &= \int_{(u,v) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1]} (uv)^{\alpha-1} (u-uv)^{\beta-1} e^{-u} u dv du = \Gamma(\alpha+\beta) B(\alpha, \beta). \quad \square
 \end{aligned}$$

70. Пусть X — случайная величина, имеющая гамма-распределение с плотностью

$$f(x; \alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} I(x > 0),$$

где $\alpha, \lambda > 0$ и

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Показать, что

$$EX = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad DX = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

и вообще для всех $p > -\alpha$ выполняется равенство

$$EX^p = \frac{1}{\lambda^p} \frac{\Gamma(\alpha+p)}{\Gamma(\alpha)}.$$

Установить также, что преобразование Лапласа величины X задается формулой

$$Ee^{-sX} = \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda+s)^\alpha}, \quad s > 0.$$

Решение. Если X имеет гамма-распределение с параметрами (α, λ) , то λX имеет гамма-распределение с параметрами $(\alpha, 1)$. Далее для простоты будем считать, что $\lambda = 1$. Найдем EX^p :

$$EX^p = \int_0^\infty x^p \frac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{\Gamma(\alpha)} dx = \frac{\Gamma(\alpha+p)}{\Gamma(\alpha)}.$$

В частности, в силу равенства $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, $s > 0$, имеем

$$\begin{aligned}
 EX &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha, \quad EX^2 = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha(\alpha+1), \\
 DX &= \alpha(\alpha+1) - \alpha^2 = \alpha.
 \end{aligned}$$

Вычислим теперь преобразование Лапласа величины X :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}e^{-sX} &= \int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{\Gamma(\alpha)} dx = \frac{(1+s)^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \left(\frac{x}{1+s}\right)^{\alpha-1} e^{-(1+s)x} \frac{dx}{1+s} = \\ &= (1+s)^{-\alpha}. \quad \square \end{aligned}$$

71. Пусть X — случайная величина, имеющая бета-распределение с плотностью

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} I(0 < x < 1),$$

где $\alpha, \beta > 0$ и

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx.$$

Показать, что

$$\mathbb{E}X = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad \mathbb{D}X = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$$

и вообще для всех $p > -\alpha$ выполняется равенство

$$\mathbb{E}X^p = \frac{B(\alpha+p, \beta)}{B(\alpha, \beta)}.$$

Решение. Найдем $\mathbb{E}X^p$:

$$\mathbb{E}X^p = \int_0^1 x^p \frac{x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} dx = \frac{\int_0^1 x^{\alpha+p}(1-x)^{\beta-1} dx}{B(\alpha, \beta)} = \frac{B(\alpha+p, \beta)}{B(\alpha, \beta)}.$$

В частности,

$$\mathbb{E}X = \frac{B(\alpha+1, \beta)}{B(\alpha, \beta)} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta},$$

где мы учли известное свойство гамма-функции $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, $\alpha > 0$. Дисперсия $\mathbb{D}X$ вычисляется аналогично. $\square$

72. Многомерным аналогом бета-распределения является *распределение Дирихле*, вводимое как распределение на множестве

$$\Delta_{n-1} = \{(x_1, \dots, x_{n-1}): x_i \in \mathbb{R}_+, 0 \leq x_1 + \dots + x_{n-1} \leq 1\}, \quad n \geq 2,$$

определяемое плотностью

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_{n-1}; \alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \\ &= \frac{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_n)} x_1^{\alpha_1-1} \dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}-1} [1 - (x_1 + \dots + x_{n-1})]^{\alpha_n-1}, \end{aligned}$$

где параметры $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ положительны. Иногда это распределение вводится на симплексе $\left\{ (x_1, \dots, x_n): x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}$ с помощью «плотности»

$$g(x_1, \dots, x_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_n)} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n},$$

но мы не зря здесь слово «плотность» взяли в кавычки, поскольку, несмотря на свой естественный вид плотности, функция g не является плотностью по мере Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Пусть случайный вектор $X = (X_1, \dots, X_n)$ с такими неотрицательными компонентами $X_i \geq 0$, что $X_1 + \dots + X_n = 1$, имеет распределение Дирихле с плотностью $f(x_1, \dots, x_{n-1}; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ на Δ_{n-1} (в том смысле, что это есть плотность распределения случайных величин $X_1, \dots, X_{n-1}$, оставшихся в векторе $(X_1, \dots, X_n)$ после исключения последней компоненты X_n с помощью равенства $X_1 + \dots + X_n = 1$).

(а) Показать, что

$$\begin{aligned} EX_j &= \frac{\alpha_j}{A_n}, & DX_j &= \frac{\alpha_j(A_n - \alpha_j)}{A_n^2(A_n + 1)}, \\ \text{cov}(X_j, X_k) &= -\frac{\alpha_j \alpha_k}{A_n^2(A_n + 1)}, & j &\neq k, \end{aligned}$$

где $A_n = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

(б) Показать, что для неотрицательных $\beta_1, \dots, \beta_n$ выполняется равенство

$$EX_1^{\beta_1} \dots X_n^{\beta_n} = \frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right) \prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i + \beta_i)}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i) \Gamma\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{i=1}^n \beta_i\right)}.$$

Решение. Пункт (а) может быть выведен из п. (б) с учетом равенства $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$, справедливого при $\alpha > 0$. Пункт (б) есть прямое следствие того факта, что для всех $\gamma_1, \dots, \gamma_n > 0$ функция

$$f(x_1, \dots, x_n | \gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

является плотностью и, значит,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n-1} x_i^{\gamma_i-1} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)^{\gamma_n-1} dx_1 \dots dx_n = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)}. \quad \square$$

73. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые случайные величины с равномерным распределением на отрезке $[0, 1]$. Обозначим через $X_{1:n}, \dots, X_{n:n}$ соответствующие им *порядковые статистики* (см. задачу II.8.17).

Доказать, что для любых $1 \leq r_1 < \dots < r_k \leq n$ случайный вектор

$$(X_{r_1:n}, X_{r_2:n} - X_{r_1:n}, \dots, X_{r_k:n} - X_{r_{k-1}:n})$$

имеет *распределение Дирихле* с параметрами

$$(r_1, r_2 - r_1, \dots, r_k - r_{k-1}, n - r_k + 1).$$

Решение. Плотность вектора $(X_{r_1:n}, X_{r_2:n}, \dots, X_{r_k:n})$ выводится точно так же, как в задаче II.8.17(с). Далее следует воспользоваться формулой преобразования плотности при гладкой замене координат (см. задачу II.8.34). $\square$

74. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины, имеющие гамма-распределение с параметрами $(\alpha_1, \beta), \dots, (\alpha_n, \beta)$ соответственно. Показать, что

(а) случайные величины

$$\zeta_1 = \frac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_2}, \quad \zeta_2 = \frac{\xi_1 + \xi_2}{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}, \quad \dots, \\ \dots, \quad \zeta_{n-1} = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_{n-1}}{\xi_1 + \dots + \xi_n}, \quad \eta_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$$

являются независимыми;

(б) случайная величина η_n имеет гамма-распределение с параметрами

$$\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j, \beta \right),$$

а ζ_i при $i < n$ имеет бета-распределение с параметрами

$$\left(\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j, \sum_{j=1}^i \alpha_j \right);$$

(с) случайный вектор $X = (X_1, \dots, X_{n-1})$ с компонентами

$$X_i = \frac{\xi_i}{\xi_1 + \dots + \xi_n}, \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

имеет распределение Дирихле с параметрами $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$;

(д) для всех k , $1 \leq k \leq n-2$ ($n > 2$), случайный вектор $Y = (Y_1, \dots, Y_{k-1})$ с компонентами

$$Y_i = \frac{X_i}{X_1 + \dots + X_k}, \quad 1 \leq i \leq k-1,$$

не зависит от вектора $(X_{k+1}, \dots, X_{n-1})$ и имеет распределение Дирихле с параметрами $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$.

Решение. Рассмотрим вначале п. (а) и (b). Воспользуемся методом математической индукции.

База индукции $n = 2$. По условию

$$f_{\xi_1}(x) = \frac{\beta^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} x^{\alpha_1-1} e^{-\beta x}, \quad f_{\xi_2}(x) = \frac{\beta^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} x^{\alpha_2-1} e^{-\beta x}.$$

Вычислим плотность суммы $\xi_1 + \xi_2$ по формуле свертки:

$$\begin{aligned} f_{\xi_1+\xi_2}(z) &= \int_{\mathbb{R}} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(z-x) dx = \\ &= e^{-\beta z} \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^z x^{\alpha_1-1} (z-x)^{\alpha_2-1} dx = \\ &= \beta^{\alpha_1+\alpha_2} z^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-\beta z} \frac{B(\alpha_1, \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} = \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} z^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-\beta z}. \end{aligned}$$

Другими словами, $\xi_1 + \xi_2$ имеет гамма-распределение с параметрами $(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$. Плотность условного распределения величины ξ_1 при $\xi_1 + \xi_2 = z$ равна

$$\xi_1 = \begin{cases} \left[\int_0^z f_{\xi_1}(y) f_{\xi_2}(z-y) dy \right]^{-1} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(z-x) & \text{при } x \in [0, z], \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

а значит, условная плотность величины $\frac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_2}$ при $\xi_1 + \xi_2 = z$ не зависит от z и равна плотности бета-распределения с параметрами $(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2)$:

$$\frac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_2} = \begin{cases} \left[\int_0^1 v^{\alpha_1-1} (1-v)^{\alpha_2-1} dv \right]^{-1} u^{\alpha_1-1} (1-u)^{\alpha_2-1} & \text{при } u \in [0, 1], \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $u = x/z$, $v = y/z$. Отсюда следуют утверждения п. (а) и (b), когда $n = 2$.

Переход $k \Rightarrow k + 1$. Допустим, что утверждения пп. (а) и (b) верны для всех $n \leq k$. Установим их справедливость при $n = k + 1$. Величины η_k и ξ_{k+1} независимы и имеют гамма-распределения соответственно с параметрами $\left(\sum_{j=1}^k \alpha_j, \beta \right)$ (по предположению индукции) и (α_k, β) (по условию). Тем самым ввиду уже установленной базы индукции ζ_k и η_{k+1} независимы и распределены, как описано в п. (b). Таким образом, выполнено утверждение п. (b) для $n = k + 1$.

Далее, $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{k-1}, \eta_k$ независимы по предположению индукции. Они также являются борелевскими функциями от $\xi_1, \dots, \xi_k$, поэтому не зависят (в совокупности) от ξ_{k+1} . Отсюда также следует, что случайные векторы

$$(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{k-1}) \quad \text{и} \quad (\varphi(\eta_k, \xi_{k+1}), \xi_{k+1})$$

независимы для любой борелевской функции φ . В частности, можно взять

$$\zeta_k = \varphi(\eta_k, \xi_{k+1}) = \frac{\eta_k}{\eta_k + \xi_{k+1}}.$$

Вследствие полученного выше свойства независимости ζ_k и η_{k+1} отсюда вытекает утверждение п. (а) для $n = k + 1$.

Для вывода п. (с) всюду далее будем последовательно использовать формулу преобразования плотности при гладкой замене координат. Без ограничения общности будем считать, что величина ξ_i , $1 \leq i \leq n$, имеет гамма-распределение с параметрами $(\alpha_i, 1)$ (иначе заменим ξ_i на ξ_i/β). В силу независимости ξ_i плотность вектора $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ равна

$$\frac{\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i-1} e^{-\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)} \cdot I\left(\min_{1 \leq i \leq n} x_i > 0\right).$$

Вычислим далее плотность вектора $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_1 + \dots + \xi_n)$:

$$\frac{\prod_{i=1}^{n-1} x_i^{\alpha_i-1} e^{-y_n}}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)} \cdot \left(y_n - \sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)^{\alpha_n-1} \cdot I\left(\min_{1 \leq i \leq n-1} x_i > 0, y_n > \sum_{i=1}^{n-1} x_i\right).$$

Найдем теперь плотность вектора $(X_1, \dots, X_{n-1}, \xi_1 + \dots + \xi_n)$:

$$\begin{aligned} & \frac{\prod_{i=1}^{n-1} z_i^{\alpha_i-1}}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)} \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} z_i\right)^{\alpha_n-1} \times \\ & \times I\left(\min_{1 \leq i \leq n-1} z_i > 0, \sum_{i=1}^n z_i \leq 1\right) \cdot e^{-y_n} y_n^{\sum_{i=1}^n \alpha_i-1} \cdot I(y_n > 0), \end{aligned}$$

где мы также учли, что определитель якобиана вектор-функции

$$h(z_1, \dots, z_{n-1}, y_n) = (z_1 y_n, \dots, z_{n-1} y_n, y_n)$$

равен y_n^{n-1} . Интегрируя последнюю найденную плотность по y_n , получаем плотность $(X_1, \dots, X_{n-1})$, которая в точности совпадает с плотностью распределения Дирихле с параметрами $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

(d) Компоненты вектора Y представимы в виде

$$Y_i = \frac{\xi_i}{\xi_1 + \dots + \xi_k}, \quad 1 \leq i \leq k-1,$$

поэтому ввиду п. (с) случайный вектор Y имеет распределение Дирихле с параметрами $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$. С другой стороны,

$$Y_i = \frac{\xi_i}{\xi_1 + \dots + \xi_k} = \begin{cases} \prod_{j=i}^{k-1} \zeta_j - \prod_{j=i-1}^{k-1} \zeta_j, & 1 < i \leq k-1, \\ \prod_{j=1}^{k-1} \zeta_j, & i = 1, \end{cases}$$

$$X_i = \frac{\xi_i}{\eta_k + \xi_{k+1} + \dots + \xi_n}, \quad k+1 \leq i \leq n.$$

Последнее вследствие п. (а) означает независимость Y и $(X_{k+1}, \dots, X_n)$ как борелевских вектор-функций от независимых в совокупности случайных величин (соответственно от $\{\zeta_1, \dots, \zeta_{k-1}\}$ и $\{\eta_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n\}$). $\square$

75. (См. [105].) Пусть ξ и ζ — независимые случайные величины, причем ξ имеет гамма-распределение с параметрами (γ, λ) , а ζ — бета-распределение с параметрами $(\alpha, \gamma - \alpha)$ для некоторых $\alpha, \gamma, 0 < \alpha < \gamma$, и $\lambda > 0$.

Используя то, что преобразование Лапласа $\phi(s) = Ee^{-s\zeta\xi}$ случайной величины $\zeta\xi$ однозначно определяет ее распределение, доказать, что $\zeta\xi$ имеет гамма-распределение с параметрами (γ, λ) .

Решение. Для простоты будем считать, что $\lambda = 1$ (иначе умножим ξ на λ). Для любого $s > 0$ выполнены равенства (см. задачи II.8.70 и II.8.71)

$$\begin{aligned} \phi(s) &= E(\zeta\xi)^s = E\xi^s E\zeta^s = \frac{\Gamma(s+\gamma)}{\Gamma(\gamma)} \frac{B(s+\alpha, \gamma-\alpha)}{B(\alpha, \gamma-\alpha)} = \\ &= \frac{\Gamma(s+\gamma)}{\Gamma(\gamma)} \frac{\Gamma(s+\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(s+\gamma)\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} = \frac{\Gamma(s+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = E\eta^s, \end{aligned}$$

где величина η имеет гамма-распределение с параметрами $(\gamma, 1)$. Следовательно,

$$Ee^{-s\zeta\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-s)^n}{n!} E(\zeta\xi)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-s)^n}{n!} E\eta^n = Ee^{-s\eta}, \quad s \geq 0.$$

Законность указанных выше разложений легко выводится из оценки

$$\left| e^{-x} - \sum_{i=1}^n \frac{(-x)^i}{i!} \right| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad x \geq 0.$$

Тем самым преобразование Лапласа $\phi(s)$ неотрицательных величин $\zeta\xi$ и η , имеющих плотность, совпадает, и, значит, $\zeta\xi \stackrel{d}{=} \eta$ (см. задачу П.11.17). $\square$

76. Пусть X_α , $\alpha > 0$, — независимые случайные величины, имеющие гамма-распределение с параметрами (α, λ) для некоторого положительного λ . Используя *формулу удвоения Лежандра* для гамма-функции

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2s}\Gamma(2s)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \quad s > 0,$$

и рассуждая, как в задаче П.8.75, доказать, что

$$4X_\alpha X_{\alpha+1/2} \stackrel{d}{=} X_{2\alpha}^2.$$

Вывести отсюда, что

$$X \stackrel{d}{=} 2\sqrt{X}|Z|, \quad 2(X_{1/4}, X_{3/4})^{1/4} \stackrel{d}{=} |Z|,$$

где X и Z — такие независимые случайные величины, что X имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda > 0$, а $Z \sim \mathcal{N}(0, \lambda)$.

Решение. Без ограничения общности будем считать, что $\lambda = 1$ (иначе все X_α поделим на λ). Рассуждая, как при решении задачи П.8.75, по формуле удвоения Лежандра для всякого $s > 0$ находим

$$\begin{aligned} \mathbf{E} 4^s X_\alpha X_{\alpha+1/2}^s &= 4^s \mathbf{E} X_\alpha^s \mathbf{E} X_{\alpha+1/2}^s = 4^s \frac{\Gamma(\alpha+s)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+s+1/2)}{\Gamma(\alpha+1/2)} = \\ &= \frac{4^{s+2\alpha-1} \Gamma(\alpha+s) \Gamma(\alpha+s+1/2)}{4^{2\alpha-1} \Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha+1/2)} = \frac{\Gamma(2\alpha+2s)}{\Gamma(2\alpha)} = \mathbf{E} X_{2\alpha}^{2s}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что преобразования Лапласа величин $4X_\alpha X_{\alpha+1/2}$ и $X_{2\alpha}^2$ тождественно равны друг другу, так что $4X_\alpha X_{\alpha+1/2} \stackrel{d}{=} X_{2\alpha}^2$ (см. подробнее решение задачи П.8.75). Оставшиеся соотношения есть частные случаи уже доказанного равенства соответственно при $\alpha = 1/2$ и $\alpha = 1/4$. $\square$

77. (См. [67].) Пусть $X, Y_1, Y_2, \dots$ — независимые случайные величины, причем X имеет гамма-распределение с параметрами $(\alpha, 1)$, а Y_n , $n \geq 1$, распределены по экспоненциальному закону $\mathbf{P}(Y_n > x) = e^{-x}$, $x > 0$. Используя результат задачи П.8.74 и элементарное представление

$$\ln X = \sum_{i=1}^n \ln \frac{X + S_{i-1}}{X + S_i} + \ln(X + S_n), \quad S_n = Y_1 + \dots + Y_n$$

($S_0 = 0$), доказать, что

$$\ln X \stackrel{d}{=} -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1} - \frac{Y_n}{n+\alpha} \right],$$

где $\gamma = \lim_n [1 + 2^{-1} + \dots + n^{-1} - \ln n] = 0,5772\dots$ — константа Эйлера, а указанный ряд сходится по вероятности (и п. н.).

Решение. Легко показать, что $Z^{1/\alpha}$ имеет равномерное распределение, когда Z распределено по бета-закону с параметрами $(\beta, \beta + 1)$, $\beta > 0$. Поэтому в силу задачи II.8.74 (п. (а) и (б)) величины

$$U_0 = \left(\frac{X}{X+S_1} \right)^{1/\alpha}, \quad \dots, \quad U_{n-1} = \left(\frac{X+S_{n-1}}{X+S_n} \right)^{1/(\alpha+n-1)}, \quad V_n = X+S_n$$

являются независимыми, причем U_i имеет равномерное распределение на $[0, 1]$, а V_n распределено по гамма-закону с параметрами $(\alpha + n, 1)$. Следовательно,

$$\ln X = \ln n - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} + \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{1}{i+1} + \frac{\ln U_i}{\alpha+i-1} \right] + \ln \frac{V_n}{n}.$$

Далее, с учетом определения γ имеем

$$\ln n - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \rightarrow -\gamma.$$

По (усиленному) закону больших чисел и теореме Слущкого (см. задачу II.10.9)

$$\ln \frac{X+S_n}{n} \xrightarrow{p} \ln \mathbb{E} Y_1 = 0 \quad (\rightarrow \text{п. н.}).$$

Другими словами, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{\ln U_n}{n+\alpha} \right]$$

сходится по вероятности (и п. н.). Осталось заметить, что

$$(-\ln U_n, n \geq 1) \stackrel{d}{=} (Y_n, n \geq 1)$$

(см. задачу II.8.29). □

78. Опираясь на представление случайных величин из задачи II.8.77, дать другое доказательство основного результата задачи II.8.76:

$$4X_\alpha X_{\alpha+1/2} \stackrel{d}{=} X_{2\alpha}^2,$$

без использования *формулы удвоения Лежандра*. Получить эту формулу в качестве следствия указанного свойства, показав тем самым их эквивалентность.

Решение. Без ограничения общности можно считать, что X_α имеет гамма-распределение с параметрами $(\alpha, 1)$ (иначе умножим X_α на λ^{-1}). Имеем

$$\begin{aligned} 2 \ln X_{2\alpha} &\stackrel{d}{=} -2\gamma + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1} - \frac{Y_n}{n+2\alpha} \right] \stackrel{d}{=} \\ &\stackrel{d}{=} -\gamma + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{k+1} - \frac{Y_{2k}}{k+\alpha} \right] + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{2}{2k+1} - \frac{1}{k+1} \right] - \\ &\quad - \gamma + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{k+1} - \frac{Y_{2k+1}}{k+\alpha+1/2} \right] \stackrel{d}{=} \\ &\stackrel{d}{=} \ln X_\alpha + \ln X_{\alpha+1/2} + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{2}{2k+1} - \frac{1}{k+1} \right], \end{aligned}$$

где все ряды сходятся по вероятности (и в L^2 , что вытекает из неравенства Чебышёва). Осталось заметить, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \right] &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} \Big|_{x=1} = \\ &= \ln(1+x) \Big|_{x=1} = \ln 2. \end{aligned}$$

Формула удвоения Лежандра есть следствие равенства моментов величин $4X_\alpha X_{\alpha+1/2}$ и $X_{2\alpha}^2$ (см. решение задачи II.8.76). $\square$

79. (См. [36].) Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — н. о. р. случайные величины, имеющие гамма-распределение с параметрами $(\alpha, 1)$. Показать, что

$$Y_\alpha = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n^2}, \quad Z_\alpha = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{(n-1/2)^2}$$

— корректно определенные случайные величины как пределы п. н. и в L^1 , преобразования Лапласа которых задаются формулами

$$\mathbb{E} e^{-\lambda Y_\alpha} = \left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{\operatorname{sh} \sqrt{2\lambda}} \right)^\alpha \quad \text{и} \quad \mathbb{E} e^{-\lambda Z_\alpha} = \left(\frac{1}{\operatorname{ch} \sqrt{2\lambda}} \right)^\alpha, \quad \lambda > 0.$$

С этой целью воспользуйтесь формулами Эйлера

$$\operatorname{sh} z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{n^2 \pi^2} \right), \quad \operatorname{ch} z = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{(n-1/2)^2 \pi^2} \right).$$

Замечание. Распределения величин Y_α и Z_α часто встречаются при рассмотрении распределений различных функционалов от броуновского движения (подробнее см. [36]).

Решение. По теореме Фубини в силу неотрицательности X_n имеем

$$\mathbb{E} \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n^2} = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E} X_n}{n^2} = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n^2} < \infty,$$

т. е. ряд сходится п. н. и в L^1 к такой случайной величине Y , что $\mathbb{P}(Y_\alpha < \infty) = 1$. Аналогично проверяется корректность задания Z . Используя формулу для преобразования Лапласа случайной величины с гамма-распределением (см. задачу II.8.70) и тождества Эйлера, получаем

$$\mathbb{E} e^{-\lambda Y_\alpha} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{\pi^2} \frac{\lambda}{n^2} \right)^{-\alpha} = \left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{\operatorname{sh} \sqrt{2\lambda}} \right)^\alpha,$$

где $\lambda > 0$. Точно так же выводится, что

$$\mathbb{E} e^{-\lambda Z_\alpha} = \left(\frac{1}{\operatorname{ch} \sqrt{2\lambda}} \right)^\alpha. \quad \square$$

80. (См. [36].) Пусть выполнены условия задачи II.8.79.

(а) Применяя *формулу Леви* (см. замечание к задаче II.13.49)

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{a e^{-\frac{a^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t^3}} dt = e^{-a\sqrt{2\lambda}}, \quad a, \lambda > 0,$$

найти плотность величины Z_α , определенной в задаче II.8.79. Наметить возможный способ вычисления плотности величины Y_α .

(См. задачу II.11.17.)

(б) Найти функцию распределения величины Y_2 .

Решение. (а) Согласно задаче II.11.17 преобразование Лапласа неотрицательной величины с плотностью однозначно определяет эту плотность. Поэтому надо лишь найти неотрицательные функции $f_\alpha = f_\alpha(y)$ и $g_\alpha = g_\alpha(z)$, для которых при всех $\lambda > 0$ выполняются равенства

$$\left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{\operatorname{sh} \sqrt{2\lambda}} \right)^\alpha = \int_0^\infty e^{-\lambda y} f_\alpha(y) dy, \quad \left(\frac{1}{\operatorname{ch} \sqrt{2\lambda}} \right)^\alpha = \int_0^\infty e^{-\lambda z} g_\alpha(z) dz.$$

По формуле Леви при $u > 0$ имеем

$$\begin{aligned} (\operatorname{ch} u)^{-\alpha} &= \frac{2^\alpha e^{-\alpha u}}{(1 + e^{-2u})^\alpha} = 2^\alpha \sum_{n \geq 0} C_{-\alpha}^n e^{-(2n+\alpha)u} = \\ &= 2^\alpha \int_0^\infty e^{-\frac{u^2 z}{2}} \sum_{n \geq 0} C_{-\alpha}^n \frac{2n+\alpha}{\sqrt{2\pi z^3}} e^{-\frac{(2n+\alpha)^2}{2z}} dz, \end{aligned}$$

где предпоследнее равенство вытекает из формулы биннома Ньютона для дробных степеней a :

$$(1+x)^a = \sum_{n \geq 0} C_a^n x^n \quad \text{при } |x| < 1, \quad C_a^n = \begin{cases} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}, & n > 0, \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

Подставляя $u = \sqrt{2\lambda}$, находим, что

$$g_\alpha(z) = 2^\alpha \sum_{n \geq 0} C_{-\alpha}^n \frac{2n+\alpha}{\sqrt{2\pi z^3}} e^{-\frac{(2n+\alpha)^2}{2z}},$$

Аналогично получаем

$$(u/\operatorname{sh} u)^\alpha = 2^\alpha \int_0^\infty u^\alpha e^{-\frac{u^2 y}{2}} h_\alpha(y) dy,$$

где

$$h_\alpha(y) = \sum_{n \geq 0} C_{-\alpha}^n (-1)^n \frac{2n+\alpha}{\sqrt{2\pi y^3}} e^{-\frac{(2n+\alpha)^2}{2y}}, \quad y > 0.$$

Чтобы вычислить f_α , можно сделать следующее. Вначале запишем $\alpha = 2n - 2a$, $n \in \mathbb{N}$, $-1 < a \leq 0$, затем заметим, что

$$\int_0^\infty u^\alpha e^{-\frac{u^2 y}{2}} h_\alpha(y) dy = 2^{\alpha/2} \int_0^\infty (u^2/2)^{-a} e^{-\frac{u^2 y}{2}} h_\alpha^{(n)}(y) dy.$$

Далее, применяя формулу

$$v^{-p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty e^{-vx} x^{p-1} dx, \quad p > 0,$$

получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (u^2/2)^{-a} e^{-\frac{u^2 y}{2}} h_\alpha^{(n)}(y) dy &= \int_0^\infty \frac{h_\alpha^{(n)}(y) dy}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-\frac{u^2(x+y)}{2}} x^{a-1} dx = \\ &= \int_0^\infty \frac{h_\alpha^{(n)}(y) dy}{\Gamma(a)} \int_y^\infty e^{-\frac{u^2 z}{2}} (z-y)^{a-1} dz = \int_0^\infty e^{-\frac{u^2 z}{2}} dz \int_0^z (z-y)^{a-1} \frac{h_\alpha^{(n)}(y) dy}{\Gamma(a)}. \end{aligned}$$

Таким образом, как и раньше, полагая $u = \sqrt{2\lambda}$, находим

$$f_{\alpha}(z) = \frac{2^{3\alpha/2}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z (z-y)^{\alpha-1} h_{\alpha}^{(n)}(y) dy.$$

(b) Функция распределения $F(y) = P(Y_2 \leq y)$ удовлетворяет равенству

$$\frac{2\lambda}{(\operatorname{sh} \sqrt{2\lambda})^2} = E e^{-\lambda Y_2} = E \int_0^{\infty} I(Y_2 \leq y) \lambda e^{-\lambda y} dy = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda y} F(y) dy.$$

Другими словами,

$$\frac{2}{(\operatorname{sh} \sqrt{2\lambda})^2} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda y} F(y) dy.$$

Вновь применяя те же рассуждения, что и в п. (a), заключаем, что

$$F(y) = 4h_2(y) = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{\pi y^3}} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-\frac{2k^2}{y}}, \quad y > 0,$$

где мы также учли, что $(-1)^n C_{-2}^n = n+1$, $n \geq 0$. $\square$

Замечание. С помощью тождества для тета-функции Якоби (см. задачу II.12.2) функцию распределения величины Y_2 можно представить также в виде

$$F(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 - n^2 \pi^2 y) e^{-\frac{\pi^2 k^2 y}{2}}.$$

Действительно, поскольку $\sqrt{t}\theta(t) = \theta(t^{-1})$, $t > 0$, где $\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi t}$, получаем, что

$$\frac{\theta(t)}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t}\theta'(t) = -\frac{\theta'(t^{-1})}{t^2},$$

или, что эквивалентно,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 - 2n^2 \pi t) e^{-n^2 \pi t} = \frac{2}{\sqrt{t^3}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 \pi e^{-\frac{n^2 \pi}{t}} = \frac{4}{\sqrt{t^3}} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \pi e^{-\frac{n^2 \pi}{t}},$$

откуда уже следует искомое представление (если взять $y = \pi t/2$).

81. Пусть θ — абсолютно непрерывная случайная величина, принимающая значения в отрезке $[0, \pi]$. Показать, что если

$$\cos 2\theta \stackrel{d}{=} \cos \theta,$$

то θ имеет равномерное распределение на $[0, \pi]$.

Решение. Предположим для простоты, что θ имеет плотность f , непрерывную на $[0, \pi]$. Проиллюстрируем основную идею доказательства на примере расчета вероятности $P(\theta \in [0, \pi/2])$. Поскольку $\cos(2\theta) \stackrel{d}{=} \cos \theta$, имеем

$$\begin{aligned} P(\theta \in [0, \pi/2]) &= P(\theta \in [0, \pi/4] \cup [3\pi/4, \pi]) = \\ &= P(\theta \in [0, \pi/8] \cup [3\pi/8, \pi/2] \cup [\pi/2, 5\pi/8] \cup [7\pi/8, \pi]) = \dots, \end{aligned}$$

т. е. на n -й итерации доля тех θ , которые попали в отрезок

$$[(k-1)\pi/2^{n-1}, k\pi/2^{n-1}],$$

одна и та же для любого $k = 1, \dots, 2^{n-1}$ (и равна $1/2$). Отсюда, учитывая, что плотность f локально постоянна, получаем

$$P(\theta \in [0, \pi/2]) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(x) dx + o(1), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Поэтому $P(\theta \in [0, \pi/2]) = 1/2$. Аналогично доказывается, что

$$P(\theta \in A) = \frac{\lambda(A)}{\pi},$$

где $A \subset [0, \pi]$, λ — мера Лебега.

В общем случае (когда плотность f не является непрерывной функцией на $[0, \pi]$) для установления используемых выше предельных соотношений следует применить теорему Лузина. $\square$

82. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины, имеющие равномерное распределение на $[0, 1]$. Пользуясь формулой включения-исключения из задачи II.8.60, доказать *формулу Лапласа*

$$P(\xi_1 + \dots + \xi_n \leq x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{[x]} (-1)^k C_n^k (x-k)^n, \quad 0 \leq x \leq n;$$

где $[x]$ — целая часть числа x .

Решение. Нам потребуется формула объема n -мерного симплекса

$$V(S_z) = \frac{z^n}{n!}, \quad S_z = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{i=1}^n x_i \leq z \right\}.$$

Установим ее. Объем n -мерного куба $B = [0, z]^n$ — это z^n . Куб B симметричен, поэтому множество $A = B \cap \{x \in \mathbb{R}_+^n : x_1 \leq \dots \leq x_n\}$ составляет от всего куба долю $1/n!$, т. е. $V(A) = z^n/n!$. Далее, отображение

$(y_1, \dots, y_n) = (x_1, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1})$ сохраняет объемы и задает биекцию между A и S_z , значит, $V(S_z) = z^n/n!$.

Полагая $A_k = \left\{x \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{i=1}^n x_i \leq z, x_k > 1\right\}$ и используя симметрию множеств A_k , видим, что вероятность $P(\xi_1 + \dots + \xi_n \leq z)$ по формуле включения-исключения равна

$$V(S_z) - V\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = V(S_z) + \sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k V\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right).$$

Кроме того, $x \in \bigcap_{i=1}^k A_i$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j=1}^k (x_j - 1) + \sum_{i=k+1}^n x_i \leq z - k, \quad x_1 - 1, \dots, x_k - 1 > 0, \quad x_{k+1}, \dots, x_n \geq 0.$$

Поэтому при $z \leq k$ множество $\bigcap_{i=1}^k A_i$ пусто, а при $z > k$ выполнено равенство $V(\bigcap_{i=1}^k A_i) = V(S_{z-k}) = (z-k)^n/n!$. Последнее завершает доказательство искомой формулы. $\square$

§ 9. Построение процесса с заданными конечномерными распределениями

1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}) = ((0, 1], \mathcal{B}((0, 1]))$, а P — мера Лебега на $(0, 1]$. Показать, что $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — универсальное вероятностное пространство в том смысле, что для любой функции распределения $F = F(x)$ можно определить случайную величину $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, с функцией распределения F .

Решение. Пусть $U(\omega) = \omega$, $\omega \in (0, 1]$. Положим $\xi = F^{-1}(U)$ при $U \in (0, 1)$, а также возьмем $\xi(1)$ произвольным; здесь

$$F^{-1}(u) = \inf\{x : u \leq F(x)\}, \quad u \in (0, 1).$$

Тогда для всех $u \in (0, 1)$ и $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$F^{-1}(u) \leq x \Leftrightarrow u \leq F(x),$$

поэтому $P(\xi \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x)$. $\square$

2. В продолжение предыдущей задачи построить на пространстве $((0, 1], \mathcal{B}((0, 1]))$ P

(а) счетную систему таких н. о. р. бернуллиевских величин $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$, что

$$P(\xi_1 = 0) = P(\xi_1 = 1) = \frac{1}{2};$$

(b) последовательность независимых случайных величин $\{U_n\}_{n \geq 1}$ с равномерным распределением на $[0, 1]$;

(c) последовательность независимых случайных величин $\{X_n\}_{n \geq 1}$ с заданными функциями распределения $\{F_n\}_{n \geq 1}$;

(d) последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n \geq 1}$ с заданными функциями совместного распределения

$$P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = F_n(x_1, \dots, x_n), \quad n \geq 1,$$

удовлетворяющими условию

$$F_n(x_1, \dots, x_{n-1}, \infty) = F_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Установить, что на $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], P)$ нельзя определить более чем счетное число независимых бернуллиевских величин $\{\xi_t\}_{t \in T}$, принимающих два значения 0 и 1 с ненулевой вероятностью.

Решение. (a) В качестве $\xi_n(\omega)$ следует взять n -ю цифру в *необрывающемся* (т. е. с бесконечным числом единиц) двоичном разложении числа ω .

(b) Переупорядочим $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ из п. (a) в матрицу $\{\xi_{in}\}_{i,n \geq 1}$ и положим

$$U_n = \sum_{i \geq 1} \frac{\xi_{in}}{2^i}, \quad n \geq 1.$$

Такие величины U_n будут обладать требуемыми свойствами.

(c) Следует взять $X_n = F_n^{-1}(U_n)$, где U_n заданы в п. (b) (см. решение задачи II.9.1).

(d) Обозначим

$$G_1(x) = F_1(x),$$

$$G_n(x|x_1, \dots, x_{n-1}) = P(X_n \leq x | X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}), \quad (*)$$

где $n > 1$. Функции G_n определяются по F_n . С другой стороны, G_n , $n \geq 1$, определяют $\text{Law}(X_n | X_1, \dots, X_{n-1})$, и при этом

$$F_1(x_1) = G_1(x_1), \quad F_2(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} G_2(x_2|x) dF_1(x), \quad \dots$$

Следовательно, F_n восстанавливаются по G_n , так что надо построить случайные величины X_n , для которых имеет место условие (*). Это можно сделать следующим образом:

$$X_1 = G_1^{-1}(U_1), \quad X_2 = G_2^{-1}(U_2 | X_1), \quad X_3 = G_3^{-1}(U_3 | X_1, X_2), \quad \dots,$$

где $(U_n)_{n \geq 1}$ фигурируют в п. (b).

Заметим, что если $\{\xi_t\}_{t \in T}$ — независимые бернуллиевские величины,

$$P(\xi_t = 1) = p_t \quad \text{и} \quad P(\xi_t = 0) = 1 - p_t, \quad p_t \in (0, 1),$$

то в случае несчетности T для некоторых a, b , $0 < a < b < 1$ найдется несчетное количество значений t , для которых $p_t \in (a, b]$. Действительно,

$$\{p_t, t \in T\} \in \bigcup_{n \geq 1} (2^{-n-1}, 2^{-n}] \cup \bigcup_{n \geq 1} (1 - 2^{-n}, 1 - 2^{-n-1}],$$

и, тем самым, найдутся полуинтервал $(a, b]$ вида $(2^{-n-1}, 2^{-n}]$ или $(1 - 2^{-n}, 1 - 2^{-n-1}]$, $n \geq 1$, и более чем счетное число таких t , что $p_t \in (a, b]$.

Осталось воспользоваться свойством сепарабельности пространства $L^1((0, 1], \mathcal{B}((0, 1]), P)$. Этому свойству противоречит существование такой несчетной системы случайных величин $\{\xi_t: p_t \in (a, b], t \in T\}$, что все попарные расстояния

$$E|\xi_t - \xi_s|, \quad t \neq s, \quad t, s \in T, \quad p_t, p_s \in (a, b],$$

не меньше некоторого положительного $\varepsilon (= 2a[1 - b])$. □

3. При решении задачи II.9.1 установлено, что

вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ универсально тогда и только тогда, когда на нем можно построить случайную величину $U = U(\omega)$, имеющую равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$.

Показать, что свойство универсальности $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ эквивалентно тому, что P есть неатомическая мера.

Решение. Докажем *необходимость*. Допустим, что на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ определена величина $U = U(\omega)$ с равномерным распределением на $[0, 1]$, однако мера P имеет атом A ($P(A) > 0$). По определению атома если $P(A) > P(B)$ и $B \subset A$ ($B \in \mathcal{F}$), то $P(B) = 0$. С учетом этого определим

$$v = \inf \{u \in [0, 1]: P(A \cap \{U \leq u\}) = P(A)\}.$$

Тогда $P(A \cap \{U \leq v\}) = P(A)$ и $P(A) > P(A \cap \{U \leq v - \varepsilon\}) = 0$, $\varepsilon > 0$. Тем самым

$$\begin{aligned} v - \varepsilon + P(A) &= P(U \leq v - \varepsilon) + P(A) = P(\{U \leq v - \varepsilon\} \cup A) \leq \\ &\leq P(\{U \leq v\} \cup A) = P(U \leq v) = v, \end{aligned}$$

что, очевидно, не может быть выполнено при $\varepsilon < P(A)$.

Установим теперь *достаточность*. Нам понадобится следующее свойство (которое доказывается ниже): если $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — измеримое пространство с неатомической мерой P и $P(\Omega) = p \in (0, 1]$, то всегда можно указать такое подмножество $C \in \mathcal{F}$, что $P(C) \in [p/3, p/2]$. Это свойство позволяет построить такую последовательность

$$\{D_{i,n}, 1 \leq i \leq 2^n\}, \quad n \geq 1,$$

измельчающихся разбиений Ω , что $\max_i P(D_{i,n}) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, где все $D_{i,n} \in \mathcal{F}$ таковы, что $P(D_{i,n}) > 0$ и $D_{2i-1,n+1}, D_{2i,n+1} \subset D_{i,n}$. Для фиксированного $x \in (0, 1]$ определим A_x как объединение $D_{i,n}$ по всем (i, n) , для которых $i2^{-n} \leq x$. Пусть также $A_0 = \emptyset$. Такие A_x не убывают по x , поэтому случайную величину X можно корректно задать соотношением $\{\omega: X(\omega) = x\} = A_x \setminus \bigcup_{z: z < x} A_z$. Как нетрудно проверить, функция распределения $F = F(x)$ величины X будет непрерывной, строго возрастающей на $[0, 1]$ и $F(0) = 0$, $F(1) = 1$. Следовательно, $U = F^{-1}(X)$ будет иметь равномерное распределение на $[0, 1]$ (см. решение задачи II.9.1).

Обратимся теперь к доказательству указанного выше свойства пространства $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с конечной неатомической мерой P ($P(\Omega) = p \in (0, 1]$). Проверим вначале, что любое такое множество $A \in \mathcal{F}$, что $P(A) > 0$, содержит подмножество B сколь угодно малой положительной меры. Неатомичность меры P означает, что найдется $B_1 \subset A$ ($B_1 \in \mathcal{F}$), для которого $0 < P(B_1) < P(A)$. Возможны только три случая: $0 < P(B_1) < P(A)/2$, $0 < P(A \setminus B_1) < P(A)/2$ и $P(B_1) = P(A)/2$. Пусть, например, $0 < P(A \setminus B_1) < P(A)/2$. Возьмем тогда множество $A_1 = A \setminus B_1$ и применим к нему аналогичную процедуру, выделив подмножество A_2 , для которого $0 < P(A_2) \leq P(A_1)/2$, и т. д. Через конечное число шагов найдем подходящее множество $B \subset A$ со сколь угодно малой положительной мерой.

Вернемся к доказательству существования множества C с указанными свойствами. Допустим, что такого C не найдется. Тогда для всех таких $A \in \mathcal{F}$, что $P(A) \leq p/2$, будем иметь $P(A) < p/3$ (такие A существуют, например, $A = \emptyset$). Обозначим класс таких множеств A через $\mathcal{A}$. Отметим основное свойство класса $\mathcal{A}$: если $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, то $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$. Действительно, $P(A_1 \cup A_2) < 2p/3$, поэтому $P(A_1 \cup A_2) \notin (p/2, 2p/3]$, иначе мы имели бы $P(C) \in (p/3, p/2]$ при $C = \Omega \setminus (A_1 \cup A_2)$ (что противоречит предположению). Более того, $P(A_1 \cup A_2) < p/3$, так как иначе $P(C) \in [p/3, p/2]$ при $C = A_1 \cup A_2$. Итак, класс $\mathcal{A}$ замкнут относительно конечных объединений. Подберем теперь такие $A_n \in \mathcal{A}$, $n \geq 1$, для

которых

$$P(A_n) \rightarrow s = \sup\{P(A): A \in \mathcal{A}\}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Можно считать, что $A_n \subseteq A_{n+1}$ (иначе перейдем к $A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}$) и, значит, $P(A_\infty) = s \leq p/3$, где $A_\infty = \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{F}$. Если $s = p/3$,

то $P(A_\infty) = p/3$, что противоречит предположению. Таким образом, $P(A_\infty) = s < p/3$, но в этом случае $A_\infty \in \mathcal{A}$. Выделим из $\Omega \setminus A_\infty$ подмножество B достаточно маленькой положительной меры, точнее говоря, такое, что $0 < P(B) < p/3 - s$. Тогда $P(A_\infty \cup B) = s + P(B) < p/3$ и, следовательно, $A_\infty \cup B \in \mathcal{A}$. Однако это противоречит определению s , так как $P(A_\infty \cup B) > s$. Тем самым мы доказали существование искомого множества C . $\square$

4. Рассмотрим так называемое *уравнение восстановления*

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-s) dF(s), \quad (*)$$

где $F(t)$ — функция распределения невырожденной неотрицательной случайной величины ξ . Показать, что в классе функций, ограниченных на конечных интервалах, единственным решением уравнения восстановления является функция, определяемая формулой

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t),$$

где $F_n = F * \dots * F$ (свертка n раз).

Решение. Итерируя равенство (*), получаем $m(t) = \sum_{i=1}^n F_i(t) + R(t)$, где

$$\begin{aligned} |R(t)| &= \left| \int_0^t \int_0^{t-t_1} \dots \int_0^{t-t_1-\dots-t_n} m(t-t_1-\dots-t_n-s) dF(s) dF(t_n) \dots dF(t_1) \right| \leq \\ &\leq \sup_{s \in [0, t]} |m(s)| \cdot F_{n+1}(t). \end{aligned}$$

Покажем теперь, что ряд $\sum_{n \geq 1} F_n(t)$ сходится для всех $t \geq 0$ (в частности, установив, что $F_n(t) \rightarrow 0$). Тем самым утверждение задачи будет полностью доказано.

Имеем $F_n(t) = P(S_n \leq t)$ при $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, где ξ_i — независимые копии величины ξ . Выберем $\delta > 0$ из условия $P(\xi > \delta) = p > 0$. Пусть также

для простоты $t = k\delta$ при некотором $k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$\begin{aligned} P(S_n \leq k\delta) &\leq P(\text{не более } k \text{ из величин } \xi_i \text{ превосходят } \delta) \leq \\ &\leq (k+1)C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

для всех достаточно больших n . Из конечности суммы $\sum_{n \geq k} C_n^k (1-p)^n$ следует сходимость рассматриваемого ряда. $\square$

5. Пусть T — произвольное множество.

(а) Допустим, что для каждого $t \in T$ задано некоторое вероятностное пространство $(\Omega_t, \mathcal{F}_t, P_t)$. Положим

$$\Omega = \prod_{t \in T} \Omega_t, \quad \mathcal{F} = \otimes_{t \in T} \mathcal{F}_t.$$

Тогда

на $(\Omega, \mathcal{F})$ существует и единственна такая вероятностная мера P , что

$$P\left(\prod_{t \in T} B_t\right) = \prod_{t \in T} P_t(B_t),$$

где $B_t \in \mathcal{F}_t$, $t \in T$, причем $B_t = \Omega_t$ для всех индексов $t \in T$, кроме, быть может, конечного их числа.

Доказать это утверждение для несчетного множества T , используя аналогичный результат для счетного T (см. следствие 4 в В1.П.9).

(б) Пусть для каждого $t \in T$ заданы измеримое пространство $(E_t, \mathcal{E}_t)$ и вероятностная мера P_t на нем. Доказать следующую теорему Ломницкого—Улама:

существуют такое вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и такие независимые случайные элементы $(X_t)_{t \in T}$, что X_t являются $\mathcal{F}/\mathcal{E}_t$ -измеримыми и

$$P(X_t \in B) = P_t(B), \quad B \in \mathcal{E}_t.$$

Решение. (а) Имеем

$$\mathcal{F} = \bigcup_{t_\infty} \mathcal{F}_{t_\infty}, \quad (*)$$

где объединение ведется по всем $t_\infty = (t_n)_{n \geq 1} \in T^\infty$, а σ -алгебры $\mathcal{F}_{t_\infty}$ состоят из всех таких множеств $B \subseteq \Omega$, что

$$B = \{(\omega_t)_{t \in T} : (\omega_{t_n})_{n \geq 1} \in C\} \quad \text{для некоторого } C \in \otimes_{n \geq 1} \mathcal{F}_{t_n}.$$

На каждом пространстве

$$\Omega = \prod_{n \geq 1} \Omega_{t_n}, \quad \mathcal{F} = \otimes_{n \geq 1} \mathcal{F}_{t_n}$$

существует единственная такая вероятностная мера P_{t_∞} , что

$$P_{t_\infty}\left(\prod_{n \geq 1} B_{t_n}\right) = \prod_{n \geq 1} P_{t_n}(B_{t_n}),$$

где $B_{t_n} \in \mathcal{F}_{t_n}$, $n \geq 1$. Таким образом, если мера P существует, то она с необходимостью единственна (так как ограничение P на соответствующую σ -алгебру совпадает с P_{t_∞} и P однозначно определяется по таким ограничениям в силу свойства (*)).

В силу единственности P_{t_∞} (при каждом $t_\infty = (t_n)_{n \geq 1}$) имеем

$$P_{t_\infty}(B) = P_{s_\infty}(C),$$

если $s_\infty = (t_{n_k})_{k \geq 1}$ для некоторых $(n_k)_{k \geq 1} \in \mathbb{N}^\infty$ ($n_k \uparrow \infty$), $C \in \bigotimes_{k \geq 1} \mathcal{F}_{t_{n_k}}$ и

$$B = \{(\omega_{t_n})_{n \geq 1} : (\omega_{t_{n_k}})_{k \geq 1} \in C\}.$$

Другими словами, меры P_{t_∞} согласованы, и, значит, P корректно определяется формулой

$$P(B) = P_{t_\infty}(C)$$

где $C \in \bigotimes_{n \geq 1} \mathcal{F}_{t_n}$

$$B = \{(\omega_t)_{t \in T} : (\omega_{t_n})_{n \geq 1} \in C\}.$$

(b) Пусть $(\Omega_t, \mathcal{F}_t) = (E_t, \mathcal{E}_t)$, $t \in T$. Определим $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ так же, как и в п. (a), и положим

$$X_t(\omega) = \omega_t, \quad \omega = (\omega_t)_{t \in T} \in \Omega.$$

Указанные величины X_t удовлетворяют всем необходимым свойствам. $\square$

§ 10. Разные виды сходимости последовательностей случайных величин

1. Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — равномерно интегрируемое семейство неотрицательных случайных величин, а $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Доказать, что

$$\frac{EM_n}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Установить, что если при этом $X_n \preceq X$ для некоторой неотрицательной величины X , $EX < \infty$, и всех $n \geq 1$, то с вероятностью единица

$$\frac{M_n}{n} \rightarrow 0.$$

Замечание. Знак « $\preceq$ » означает стохастическое доминирование, т. е.

$$\zeta \preceq \eta \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}: P(\zeta > x) \leq P(\eta > x).$$

Решение. При $a > 0$ имеем

$$M_n I(M_n > a) = \max_{1 \leq k \leq n} X_k I(X_k > a) \leq \sum_{k=1}^n X_k I(X_k > a),$$

поэтому

$$E \frac{M_n}{n} \leq \frac{a}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E X_k I(X_k > a) \leq \frac{a}{n} + \sup_{k \geq 1} E X_k I(X_k > a).$$

Полагая $a = \sqrt{n}$ и переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, приходим к искомому соотношению.

Второе утверждение эквивалентно тому, что $X_n/n \rightarrow 0$ п. н., и вытекает из леммы Бореля—Кантелли, так как при $\varepsilon > 0$ выполняются неравенства

$$\sum_{n \geq 1} P(X_n > \varepsilon n) \leq \sum_{n \geq 1} P(X > \varepsilon n) \leq \frac{EX}{\varepsilon} < \infty. \quad \square$$

2. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — некоторые случайные величины. Рассмотрим условия

- (1) $P(X - X_n > \varepsilon) \rightarrow 0$ для всех $\varepsilon > 0$;
- (2) $P(X - X_n < -\varepsilon) \rightarrow 0$ для всех $\varepsilon > 0$.

Установить, что среди всех *расширенных* величин X , удовлетворяющих свойству 1, найдется такая величина X_* , что $P(X_* \geq X) = 1$ для любой другой величины X со свойством 1. Доказать аналогичный факт для свойства 2, установив существование X^* .

Показать далее, что $P(X_* \leq X^*) = 1$, причем $X_n \xrightarrow{P} X$ тогда и только тогда, когда $X_* = X^* = X$ п. н.

Решение. Пусть $\mathcal{X}$ — множество величин X , удовлетворяющих свойству 1. Заметим, что $\mathcal{X}$ непусто, так как в качестве X можно взять $-\infty$. Если $X, Y \in \mathcal{X}$, то $X \wedge Y \in \mathcal{X}$, так как

$$P(X \wedge Y - X_n > \varepsilon) \leq P(X - X_n > \varepsilon) + P(Y - X_n > \varepsilon);$$

здесь и далее ε — произвольное положительное число. Кроме того, если $Z_1, Z_2, \dots \in \mathcal{X}$, то $X = \inf_n Z_n \in \mathcal{X}$. Действительно, $Y_k = \min_{i \leq k} X_i \rightarrow X$ всюду при $k \rightarrow \infty$ и $Y_k \in \mathcal{X}$, поэтому

$$\begin{aligned} P(X - X_n > 2\varepsilon) &= P(X - Y_{k_n} + Y_{k_n} - X_n > 2\varepsilon) \leq \\ &\leq P(X - Y_{k_n} > \varepsilon) + P(Y_{k_n} - X_n > \varepsilon) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

когда $n \rightarrow \infty$ и k_n стремится к бесконечности достаточно медленно. Так что в качестве X_* можно взять ess inf по всем величинам X со свойством 2 (см. замечание к II.4.2).

Докажем теперь, что $X_* \leq X^*$ п. н. Поскольку X_* и X^* обладают свойствами 1 и 2 соответственно, $P(X_* < X_n + \varepsilon, X^* > X_n - \varepsilon) \rightarrow 1$. Но $\{X_* < X_n + \varepsilon, X^* > X_n - \varepsilon\} \subseteq \{X_* < X^* + 2\varepsilon\}$, и, значит,

$$P(X_* < X^* + 2\varepsilon) = 1.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $P(X_* \leq X^*) = 1$.

Если $P(X_* = X^* = X) = 1$, то, очевидно, $X_n \xrightarrow{P} X$. Обратно, если $X_n \xrightarrow{P} X$, то X удовлетворяет свойствам 1 и 2. Но тогда по определению X_* и X^* с вероятностью единица $X \leq X_*$ и $X^* \leq X$, причем $P(X_* \leq X^*) = 1$. Поэтому $P(X_* = X^* = X) = 1$. $\square$

Замечание. Величины X_* и X^* из задачи II.10.2 есть не что иное, как *нижний* и *верхний пределы по вероятности* величин X_n соответственно (они определены с точностью до множеств P -меры нуля). Другими словами, если $X_{n_k} \xrightarrow{P} X$ для некоторых $n_k \uparrow \infty$, то

$$P(X_* \leq X \leq X^*) = 1.$$

По аналогии можно задать *верхний* и *нижний пределы по распределению* величин X_n , а именно, взять в качестве таковых соответственно (расширенные) величины X° и $X_\circ$ с функциями распределения

$$P(X^\circ \leq x) = \lim_{y \rightarrow x+0} \lim_n P(X_n \leq y)$$

и

$$P(X_\circ \leq x) = \lim_{y \rightarrow x+0} \overline{\lim}_n P(X_n \leq y), \quad x \in \mathbb{R}.$$

При таком задании если $X_{n_k} \xrightarrow{d} X$ для некоторых $n_k \uparrow \infty$, то $X_\circ \preceq X \preceq X^\circ$ (« $\preceq$ » означает *стохастическое доминирование*, см. задачу II.10.1). Кроме того, $X_n \xrightarrow{d} X$ тогда и только тогда, когда распределения величин X , $X_\circ$ и X° совпадают.

3. Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — н. о. р. случайные величины, а

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad n \geq 1.$$

Пусть также $\mathcal{R}_n$ — *размах*, т. е. число различных значений, принимаемых величинами $S_0, S_1, \dots, S_n$. Пусть

$$\sigma(0) = \inf\{n > 0: S_n = 0\}$$

— момент первого возвращения в нулевое состояние. Используя разложения вида

$$\mathcal{R}_n = 1 + I(S_1 \neq 0) + I(S_2 \neq 0, S_2 \neq S_1) + \dots \\ \dots + I(S_n \neq 0, S_n \neq S_1, \dots, S_n \neq S_{n-1})$$

и следующий факт (вытекающий из эргодической теоремы):

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n I(S_{i+j} \neq S_i, j \geq 1) \rightarrow P(S_j \neq 0, j \geq 1)$$

п. н. при $n \rightarrow \infty$ для всех $k = 1, 2, \dots, \infty$, доказать теорему Кестена—Спицера—Витмана, утверждающую, что

$$\frac{\mathcal{R}_n}{n} \rightarrow P(S_n \neq 0, n \geq 1) = P(\sigma(0) = \infty) \quad \text{п. н. и в } L^p, p > 0. \quad (*)$$

Вероятность $P(\sigma(0) = \infty)$ есть вероятность невозвращения в нуль.

Решение. В силу ограниченности величины $\mathcal{R}_n/n$ (например, двойкой) достаточно доказать в формуле (*) сходимость п. н., так как сходимость в L^p тогда будет обеспечиваться теоремой Лебега о мажорируемой сходимости. Для любого $k \in \mathbb{N}$ вследствие усиленного закона больших чисел имеем п. н.

$$\frac{\mathcal{R}_n}{n} \leq \frac{k+1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^n I(S_i \neq S_{i-k}, \dots, S_i \neq S_{i-1}) \rightarrow \\ \rightarrow P(S_1 \neq 0, \dots, S_k \neq 0).$$

Таким образом, для любого $k > 1$ с вероятностью единица

$$\overline{\lim}_n \frac{\mathcal{R}_n}{n} \leq P(S_n \neq 0, 1 \leq n \leq k).$$

Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем

$$\overline{\lim}_n \frac{\mathcal{R}_n}{n} \leq P(\sigma(0) = \infty) \quad \text{п. н.}$$

С другой стороны, очевидно, что

$$\mathcal{R}_n = 1 + I(S_{n-1} \neq S_n) + I(S_{n-2} \neq S_{n-1}, S_{n-2} \neq S_n) + \dots \\ \dots + I(S_0 \neq S_1, S_0 \neq S_2, \dots, S_0 \neq S_n).$$

Поэтому с вероятностью единица

$$\frac{\mathcal{R}_n}{n} \geq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n I(S_{i+1} \neq S_i, S_{i+2} \neq S_i, \dots) \rightarrow P(S_n \neq 0, n \geq 1)$$

и

$$\lim_n \frac{\mathcal{R}_n}{n} \geq P(\sigma(0) = \infty).$$

Последнее завершает доказательство сходимости п. н. в формуле (*). $\square$

4. Доказать, что пространство L^∞ полно.

Решение. Пусть $(\xi_n)_{n \geq 1}$ — фундаментальная в L^∞ последовательность, т. е. $\|\xi_m - \xi_n\|_\infty \rightarrow 0$ при $m, n \rightarrow \infty$. Положим

$$\xi = \overline{\lim}_n \xi_n \cdot I(\overline{\lim}_n \xi_n < \infty).$$

Так определенное ξ есть случайная величина, и для нее $\lim_n \|\xi - \xi_n\|_\infty = 0$. Последнее равенство можно вывести, например, из того факта, что мера всех таких $\omega \in \Omega$, что $|\xi_n(\omega) - \xi_m(\omega)| \leq \|\xi_n - \xi_m\|_\infty$ при всех $n, m \geq 1$, равна единице. $\square$

5. Показать, что если $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$ и в то же время $\xi_n \xrightarrow{p} \zeta$, то ξ и ζ эквивалентны, т. е. $P(\xi = \zeta) = 1$.

Решение. Утверждение вытекает из неравенства

$$P(|\xi - \zeta| \geq 2\varepsilon) \leq P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) + P(|\xi_n - \zeta| \geq \varepsilon),$$

выполненного для любого $\varepsilon > 0$. $\square$

6. Пусть $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$, $\zeta_n \xrightarrow{p} \zeta$ и случайные величины ξ и ζ эквивалентны. Показать, что тогда для любого $\varepsilon > 0$ выполняется условие

$$P(|\xi_n - \zeta_n| \geq \varepsilon) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Решение. Утверждение следует из неравенства

$$P(|\xi_n - \zeta_n| \geq 3\varepsilon) \leq P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) + P(|\zeta_n - \zeta| \geq \varepsilon) + P(|\xi - \zeta| \geq \varepsilon),$$

справедливого для любого $\varepsilon > 0$. $\square$

7. Доказать, что если $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$ и $\zeta_n \xrightarrow{p} \zeta$, то $(\xi_n, \zeta_n) \xrightarrow{p} (\xi, \zeta)$, т. е. для всех $\varepsilon > 0$ выполняется равенство

$$\lim_n P(|(\xi_n, \zeta_n) - (\xi, \zeta)| > \varepsilon) = \lim_n P((\xi_n - \xi)^2 + (\zeta_n - \zeta)^2 > \varepsilon^2) = 0.$$

Решение. Данное свойство легко проверить с помощью соотношения

$$\{ |(\xi_n, \zeta_n) - (\xi, \zeta)| > \varepsilon \} \subset \{ |\xi_n - \xi| > \varepsilon/2 \} \cup \{ |\zeta_n - \zeta| > \varepsilon/2 \}. \quad \square$$

8. Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ — случайные векторы в $\mathbb{R}^d$. Доказать, что $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$, если и только если для любой возрастающей последовательности $(n') \subset (n)$ найдется подпоследовательность $(n'') \subset (n')$, для которой

$$\xi_{n''} \rightarrow \xi \quad \text{п. н.,} \quad n'' \rightarrow \infty.$$

Решение. Если $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, то по определению $\xi_{n'} \xrightarrow{P} \xi$ и, значит, для некоторой подпоследовательности $(n'') = (n_1, n_2, \dots) \subset (n')$ выполняется неравенство

$$\sum_k P(|\xi_{n_k} - \xi| > 2^{-k}) < \infty.$$

Последнее в силу леммы Бореля—Кантелли означает, что $\xi_{n_k} \rightarrow \xi$ п. н., $k \rightarrow \infty$.

Обратно, если ξ_n не сходится к ξ по вероятности, то найдутся такие $\delta, \varepsilon > 0$ и такая последовательность индексов $(n') \subset (n)$, что при всех n' выполняются неравенства

$$P(|\xi_{n'} - \xi| > \varepsilon) \geq \delta > 0.$$

Из (n') , очевидно, нельзя выделить подпоследовательность $(n'') \subset (n')$, обладающую свойством $\xi_{n''} \rightarrow \xi$ п. н. $\square$

9. Пусть $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, где $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ — случайные векторы в $\mathbb{R}^d$, и функция $\varphi = \varphi(x)$, определенная на $\mathbb{R}^d$, является борелевской. Доказать, что

$$D_\varphi = \{x \in \mathbb{R}^d : \varphi \text{ разрывна в } x\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),$$

и установить также *обобщенную лемму Слущкого*, утверждающую, что $\varphi(\xi_n) \xrightarrow{P} \varphi(\xi)$, когда $P(\xi \in D_\varphi) = 0$.

Решение. Обобщенная лемма Слущкого есть следствие эквивалентного определения сходимости по вероятности из задачи II.10.8.

Докажем, что $D_\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Имеем $D_\varphi = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} D_{mn}$, где

$$D_{mn} = \{x \in \mathbb{R}^d : \exists y, z \in \mathbb{R}^d : |\varphi(y) - \varphi(z)| > m^{-1}, \\ \|x - y\| < n^{-1}, \|x - z\| < n^{-1}\},$$

очевидно, является открытым множеством в $\mathbb{R}^d$. $\square$

10. Допустим, что $\xi_n \xrightarrow{d} c$, где c — константа. Доказать, что тогда $\xi_n \xrightarrow{P} c$.

Показать также, что если $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ для некоторых $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$, то $(\xi_n, \xi_n) \xrightarrow{d} (\xi, c)$, т. е., иначе говоря, для любой непрерывной ограниченной функции f выполняется условие

$$E f(\xi_n, \xi_n) \rightarrow E f(\xi, c).$$

В частности, $\xi_n \xi_n \xrightarrow{d} c \xi$.

Решение. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим функцию

$$f_\varepsilon(x) = \left(1 - \frac{|x - c|}{\varepsilon}\right)^+.$$

Тогда

$$P(|\zeta_n - c| \leq \varepsilon) \geq E f_\varepsilon(\zeta_n) \rightarrow E f_\varepsilon(c) = 1.$$

Перейдем ко второй части задачи. Поскольку $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, получаем, что $E f(\xi_n, c) \rightarrow E f(\xi, c)$. Для заданного $\varepsilon > 0$ выберем такие $M = M(\varepsilon)$, $\delta = \delta(\varepsilon)$, $n_0 = n_0(\delta, \varepsilon) > 0$, что при всех $n \geq n_0$ выполняются неравенства $\sup_k P(|\xi_k| > M) \leq \varepsilon$, $\sup_{x, y} |f(x, y) - f(x, c)| \leq \varepsilon$, $P(|\zeta_n - c| > \delta) \leq \varepsilon$,

где верхняя грань берется по всем таким парам x и y , что $|x| \leq M$, $|y - c| \leq \delta$. Тогда

$$|E f(\xi_n, \zeta_n) - E f(\xi_n, c)| \leq (1 + 4\|f\|_\infty)\varepsilon, \quad n \geq n_0.$$

В силу произвольности ε получаем искомую сходимость. $\square$

11. Показать, что $\xi_n \rightarrow 0$ п. н., если

$$\sum_n E|\xi_n| < \infty.$$

Решение. Пусть $\xi = \sum_n |\xi_n|$ — неотрицательная случайная величина со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$. По теореме Фубини $E\xi < \infty$, что, в частности, означает конечность ξ п. н. Отсюда следует, что с вероятностью единица $|\xi_n| \rightarrow 0$. Последнее возможно только при $\xi_n \rightarrow 0$. $\square$

12. Пусть $(\xi_n)_{n \geq 1}$ — последовательность одинаково распределенных случайных величин. Доказать, что справедливы следующие импликации:

$$\begin{aligned} E|\xi_1| < \infty &\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} P(|\xi_1| > \varepsilon n) < \infty, \quad \varepsilon > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} P(|\xi_n| > \varepsilon n) < \infty, \quad \varepsilon > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow P(|\xi_n| > \varepsilon n \text{ б. ч.}^1) = 0, \quad \varepsilon > 0 \Leftrightarrow \frac{\xi_n}{n} \rightarrow 0 \text{ п. н.} \end{aligned}$$

Решение. Утверждение вытекает из легко проверяемых неравенств

$$\varepsilon \sum_{n \geq 1} P(|\xi_1| > \varepsilon n) \leq E|\xi_1| \leq \varepsilon + \varepsilon \sum_{n \geq 1} P(|\xi_1| > \varepsilon n). \quad \square$$

13. Доказать, что если $\sum P(\xi_n > \varepsilon) < \infty$ для некоторого $\varepsilon > 0$, то $\overline{\lim} \xi_n \leq \varepsilon$ п. н.

⁰ Здесь и далее «б. ч» означает «бесконечно часто»

Решение. По лемме Бореля—Кантелли $P(\xi_n > \varepsilon \text{ б. ч.}) = 0$. Это и означает, что $\overline{\lim} \xi_n \leq \varepsilon$ п. н. $\square$

14. Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность случайных величин.

(а) Показать, что

$$\forall \varepsilon > 0: P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon \text{ б. ч.}) = 0 \Leftrightarrow \xi_n \rightarrow \xi \text{ п. н.}$$

(б) Доказать следующую импликацию:

$$\left(\exists (n_k): \xi_{n_k} = \xi, \quad \max_{n_{k-1} < n \leq n_k} |\xi_n - \xi_{n_{k-1}}| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \right) \Rightarrow \xi_n \rightarrow \xi,$$

где в качестве сходимости случайных величин берется сходимость п. н.

Решение. Утверждения следуют из свойств сходимости числовых последовательностей. $\square$

15. Определим « d -метрику» в множестве случайных величин, полагая

$$d(\xi, \eta) = E f(|\xi - \eta|)$$

для такой ограниченной возрастающей вогнутой функции f , что $f(0) = 0$, и отождествляя случайные величины, совпадающие п. н. (в частности, можно взять $f(x) = x/(1+x)$). Показать, что $d = d(\xi, \eta)$ действительно задает метрику и сходимость по вероятности эквивалентна сходимости в этой метрике.

Решение. В силу вогнутости функции f имеем

$$f(x+y) - f(x) \leq f(y) - f(0) = f(y), \quad x, y \geq 0,$$

что с учетом монотонности f обеспечивает неравенство треугольника для d . Далее, для всех $\varepsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned} f(\varepsilon) P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) &\leq E f(|\xi_n - \xi|) \leq \\ &\leq f(\varepsilon) P(|\xi_n - \xi| \leq \varepsilon) + \|f\|_\infty P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon), \end{aligned}$$

откуда легко вывести эквивалентность сходимостей $d(\xi_n, \xi) \rightarrow 0$ и $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$. $\square$

16. Показать, что не существует такой метрики в множестве случайных величин, что сходимость в ней эквивалентна сходимости п. н.

Решение. Допустим, что существует метрика ρ , задающая сходимость п. н. Рассмотрим какую-нибудь последовательность $(\xi_n)_{n \geq 1}$, для которой $\xi_n \xrightarrow{P} 0$, но $\xi_n \not\rightarrow 0$ п. н. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что для некоторой подпоследовательности $(n_k)_{k \geq 1}$ выполнено неравенство $\rho(\xi_{n_k}, 0) > \varepsilon$ и в то же время $\xi_{n_k} \xrightarrow{P} 0$. Согласно теореме 5 из В1.П.10 последовательность $(\xi_{n_k})_{k \geq 1}$ содержит подпоследовательность, сходя-

щуюся с вероятностью единица, поэтому неравенство $\rho(\xi_{n_k}, 0) > \varepsilon$ не может иметь место для всех k . Полученное противоречие доказывает искомое утверждение. $\square$

17. Пусть $\xi_{(n)} \preceq \xi_{n+1}$, $n \geq 1$, и $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$, где $\xi_{(n)} = \xi_1 \vee \dots \vee \xi_n$, а « $\preceq$ » означает стохастическое доминирование (см. задачу II.10.1). Доказать, что тогда $\xi_n \rightarrow \xi$ п. н.

Решение. Пусть $\eta = \lim_n \xi_{(n)}$ (предел определен всюду, так как $\xi_{(n)}(\omega)$ не убывает по n для каждого исхода ω). Имеют место импликации

$$\xi_{(n)} \rightarrow \eta \text{ п. н.} \Rightarrow \xi_{(n)} \xrightarrow{d} \eta \text{ и } \xi_{n+1} \xrightarrow{p} \xi \Rightarrow \xi_{n+1} \xrightarrow{d} \xi.$$

Следовательно (с учетом условия $\xi_{(n)} \preceq \xi_{n+1}$),

$$P(\eta > x) = \lim_n P(\xi_{(n)} > x) \leq \lim_n P(\xi_{n+1} > x) = P(\xi > x)$$

для любой точки x , где непрерывны обе функции $f(x) = P(\eta > x)$ и $g(x) = P(\xi > x)$. Функции f и g монотонны, а значит, непрерывны почти всюду по мере Лебега. Кроме того, f и g непрерывны слева в каждой точке. Таким образом, они определяются однозначно на любом всюду плотном множестве. Из этого следует, что $P(\eta > x) \leq P(\xi > x)$ при всех x , т. е. $\eta \preceq \xi$. С другой стороны, $\xi_{n_k} \rightarrow \xi$ п. н. для некоторой подпоследовательности (n_k) . Поэтому

$$\eta \geq \xi_{n_k} \rightarrow \xi \text{ п. н., } k \rightarrow \infty.$$

Последнее означает, что $P(\xi \leq \eta) = 1$, причем $\eta \preceq \xi$. Это возможно, только если $P(\xi = \eta) = 1$ (проверьте).

Итак, мы получили соотношения $\xi_{n_k} \rightarrow \xi$ и $\xi_{(n)} \rightarrow \xi$ п. н., которые, в свою очередь, приводят к равенству

$$\overline{\lim}_n \xi_n = \xi \text{ п. н.}$$

Покажем теперь, что $P(\zeta = \xi) = 1$ при $\zeta = \varliminf_n \xi_n$.

$$B = B_a = \{\zeta \leq a < \xi\} = \{\xi_{n+1} \leq a < \xi_{(n)} \text{ б. ч.}\}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

По условию дано, что

$$0 \leq P(\xi_{n+1} > a) - P(\xi_{(n)} > a) = P(\xi_{n+1} > a \geq \xi_{(n)}) - P(\xi_{(n)} > a \geq \xi_{n+1}).$$

Учитывая, что события $C_n = \{\xi_{n+1} > a \geq \xi_{(n)}\}$ попарно не пересекаются, получаем неравенства

$$\sum_{n \geq 1} P(\xi_{(n)} > a \geq \xi_{n+1}) \leq \sum_{n \geq 1} P(C_n) \leq 1 < \infty,$$

откуда в силу леммы Бореля-Кантелли следует, что $P(B_a) = 0$. В силу произвольности a это означает, что $\xi = \zeta$ п. н. и, следовательно, $P(\xi_n \rightarrow \xi) = 1$. $\square$

18. Пусть $(X_n)_{n \geq 1}$ — последовательность случайных величин, а $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

(а) Предполагая, что $p \geq 1$, установить, что

$$X_n \rightarrow 0 \text{ п. н. } \Rightarrow \frac{S_n}{n} \rightarrow 0 \text{ п. н. при } n \rightarrow \infty,$$

$$X_n \xrightarrow{L^p} 0 \Rightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow{L^p} 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

(b) Показать, что, вообще говоря,

$$X_n \xrightarrow{p} 0 \not\Rightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} 0.$$

Доказать, что достаточным условием для сходимости $S_n/n \xrightarrow{p} 0$ является соотношение

$$\max_{m < k \leq n} |X_k| \xrightarrow{p} 0, \quad m, n \rightarrow \infty, \quad m < n.$$

Решение. Для числовых последовательностей $\{x_n\}_{n \geq 1}$ имеем

$$x_n \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \rightarrow 0.$$

Это совместно с неравенством

$$\mathbb{E} \left| \frac{S_n}{n} \right|^p \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} |X_i|^p,$$

вытекающим из выпуклости функции $f(x) = |x|^p$, $p \geq 1$, влечет справедливость импликаций из п. (а).

Перейдем к п. (b). Пусть U — случайная величина, имеющая равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Положим

$$X_{2^n+k} = 2^{n+1} I((k-1)2^{-n} \leq U < k2^{-n}), \quad n \geq 1, \quad k = 1, \dots, 2^n.$$

Тогда $P(X_n \neq 0) \rightarrow 0$ и, следовательно, $X_n \xrightarrow{p} 0$. Однако с вероятностью единица

$$\frac{S_{2^n}}{2^n} \geq \frac{S_{2^n} - S_{2^{n-1}}}{2^n} = 1,$$

что, в частности, означает отсутствие сходимости $S_n/n \xrightarrow{p} 0$.

Если теперь

$$\max_{m < k \leq n} |X_k| \xrightarrow{p} 0, \quad m, n \rightarrow \infty, \quad m < n,$$

то для любых $\delta, \varepsilon > 0$ найдется такое $M = M(\delta, \varepsilon)$, что

$$P\left(\max_{m < k \leq n} |X_k| > \varepsilon\right) \leq \delta, \quad n > m \geq M.$$

Учитывая включение

$$\{|S_n| > 2\varepsilon n\} \subseteq \{|S_n - S_m| > \varepsilon n\} \cup \{|S_m| > \varepsilon n\},$$

приходим к цепочке неравенств

$$\begin{aligned} P(|S_n| > 2\varepsilon n) &\leq P(|S_n - S_m| > \varepsilon n) + P(|S_m| > \varepsilon n) \leq \\ &\leq P\left(\max_{m < k \leq n} |X_k| > \varepsilon\right) + P(|S_m| > \varepsilon n) \leq \\ &\leq \delta + P(|S_m| > \varepsilon n). \end{aligned}$$

Полагая $n \rightarrow \infty$, получаем оценку

$$\lim_n \overline{P}(|S_n| > 2\varepsilon n) \leq \delta.$$

В силу произвольности δ и ε из последнего неравенства следует сходимость $S_n/n \xrightarrow{p} 0$. $\square$

19. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство и $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$. Показать, что если мера P атомическая (см. задачу II.3.35), то $\xi_n \rightarrow \xi$ с вероятностью единица. Установите также, что если понятия сходимости по вероятности и п. н. для $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ совпадают, то мера P атомическая.

Замечание. Мера P заведомо является атомической, если Ω не более чем счетно.

Решение. Допустим, что $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$, однако $\xi_n \not\rightarrow \xi$ п. н., т. е. множество, на котором нет сходимости, имеет положительную меру. Выделим в этом множестве атом A положительной меры. Заметим, что $P(\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} \cap A) \rightarrow 0$ для любого $\varepsilon > 0$. Поскольку A есть атом, последнее возможно только в том случае, если $P(\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} \cap A) = 0$ начиная с некоторого n . Тем самым для каждого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\sum_{n \geq 1} P(\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} \cap A) < \infty,$$

и, значит, с вероятностью единица на A имеет место сходимость $\xi_n \rightarrow \xi$. Последнее противоречит определению A , и, следовательно, $\xi_n \rightarrow \xi$ п. н. всякий раз, когда $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$.

Перейдем теперь ко второму утверждению. Если мера P не является атомической, то она может быть представлена в виде $\alpha P_1 + (1 - \alpha)P_2$, где $\alpha \in [0, 1]$, а P_1 и P_2 — соответственно атомическая и неатомическая вероятностные меры с непересекающимися носителями Ω_1 и Ω_2 из $\mathcal{F}$ (см. замечание к задаче II.3.35). В силу замечания к задаче II.9.1 на $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ с алгеброй

$$\mathcal{F}_2 = \{B \cap \Omega_2 : B \in \mathcal{F}\}$$

можно построить случайную величину U с равномерным распределением. Доопределим U нулем на $\Omega \setminus \Omega_2$. Тогда, как нетрудно проверить, последовательность

$$I_{[0,1/2)}(U), \quad I_{[1/2,1)}(U), \quad I_{[0,1/3)}(U), \quad I_{[1/3,2/3)}(U), \quad I_{[2/3,1)}(U), \quad \dots$$

будет сходиться по мере P к нулю, однако не п. н. (так как это не будет выполняться для меры P_2). Это доказывает второе утверждение задачи. $\square$

20. (К лемме Бореля—Кантелли.) (а) Пусть $\Omega = (0, 1)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}((0, 1))$, P — мера Лебега. Рассмотрим события $A_n = (0, 1/n)$. Показать, что $\sum P(A_n) = \infty$, но каждое ω из $(0, 1)$ может принадлежать только *конечному* числу множеств $A_1, \dots, A_{[1/\omega]}$, т. е. $P(A_n \text{ б. ч.}) = 0$.

(б) Если $\sum P(|\xi_n| > \varepsilon) < \infty$ для всех $\varepsilon > 0$, то $\xi_n \rightarrow 0$ п. н. Привести пример таких случайных величин $(\xi_n)_{n \geq 1}$, что $\xi_n \rightarrow 0$ п. н., однако $\sum P(|\xi_n| > \varepsilon) = \infty$ для каждого $\varepsilon > 0$.

Решение. (а) Утверждение устанавливается прямой проверкой.

(б) Достаточно взять $\xi_n = nI_{A_n}$, где события A_n , $n \geq 1$, и соответствующее вероятностное пространство заданы в п. (а).

21. (См. [60].) Пусть $A_1, A_2, \dots$ — произвольная последовательность событий. Доказать следующий вариант второй леммы Бореля—Кантелли (*взвешенная версия теоремы Эрдёша—Реньи*):

(а) если $\sum_{n \geq 1} \alpha_n P(A_n) = \infty$ для некоторых $\alpha_n \geq 0$, то

$$P(A_n \text{ б. ч.}) \geq \overline{\lim}_n \frac{\left[\sum_{i=1}^n \alpha_i P(A_i) \right]^2}{\sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j P(A_i A_j)};$$

(б) если $\sum_{n \geq 1} \alpha_n P(A_n) = \infty$ для некоторых $\alpha_n \in [0, 1]$, то

$$P(A_n \text{ б. ч.}) \geq \overline{\lim}_n \frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j P(A_i) P(A_j)}{\sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j P(A_i A_j)}.$$

$\square$

Замечание. Из п. (b) при $\alpha_n \equiv 1$ следует, что если события $A_1, A_2, \dots$ попарно отрицательно коррелированы ($P(A_i A_j) - P(A_i)P(A_j) \leq 0$, $i \neq j$), то

$$P(A_n \text{ б. ч.}) = I\left(\sum_{n \geq 1} P(A_n) = \infty\right).$$

Решение. (a) Согласно взвешенному неравенству Чжуна—Эрдёша (см. задачу I.1.11) имеем

$$P(A_k \text{ б. ч.}) = \lim_k P\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} A_i\right) \geq \lim_k \overline{\lim}_n \frac{\left[\sum_{i=k}^n \alpha_i P(A_i)\right]^2}{\sum_{i,j=k}^n \alpha_i \alpha_j P(A_i A_j)} = \lim_k \overline{\lim}_n \frac{\|S_{kn}\|_1^2}{\|S_{kn}\|_2^2},$$

где $S_{kn} = \sum_{i=k}^n \alpha_i I_{A_i}$, а $\|\xi\|_p = (E|\xi|^p)^{1/p}$ — норма в пространстве L^p , $p = 1, 2$. Осталось показать, что выражения, стоящие под знаком $\overline{\lim}_k$ в правой части последнего неравенства, не зависят от k . Так как $\|S_{1n}\|_p \rightarrow \infty$, $p = 1, 2$, по неравенству треугольника

$$\left| \frac{\|S_{kn}\|_p}{\|S_{1n}\|_p} - 1 \right| \leq \frac{\|S_{1k}\|_p}{\|S_{1n}\|_p} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

и, следовательно,

$$\lim_n \frac{\|S_{kn}\|_1^2 / \|S_{kn}\|_2^2}{\|S_{1n}\|_1^2 / \|S_{1n}\|_2^2} = 1.$$

(b) Так как $\alpha_i^2 \leq \alpha_i$, имеем

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 P(A_i)^p = o\left(\left[\sum_{i=1}^n \alpha_i P(A_i)\right]^2\right), \quad p = 1, 2.$$

Учитывая указанное соотношение совместно с неравенством из п. (a), легко вывести искомую оценку. $\square$

22. Пусть $A_1, A_2, \dots$ — попарно независимые события и $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$. Доказать, что для $S_n = \sum_{k=1}^n I(A_k)$ справедливо следующее усиление второй леммы Бореля—Кантелли:

$$\lim_n \frac{S_n}{ES_n} = 1 \quad \text{п. н.}$$

Решение. Полагая $n_k = \inf\{n \geq 1 : ES_n \geq k^2\}$, с учетом того, что $DS_n \leq ES_n$, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} E \left| \frac{S_{n_k}}{ES_{n_k}} - 1 \right|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{ES_{n_k}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty,$$

так что (см. задачу II.10.11) с вероятностью единица

$$\frac{S_{n_k}}{ES_{n_k}} \rightarrow 1.$$

С другой стороны, S_n возрастает по n ,

$$\frac{(k+1)^2}{k^2+1} \leq \frac{ES_{n_{k+1}}}{ES_{n_k}} \leq \frac{(k+1)^2+1}{k^2}$$

и

$$\frac{S_{n_k}}{ES_{n_k}} \cdot \frac{ES_{n_k}}{ES_n} \leq \frac{S_n}{ES_n} \leq \frac{S_{n_{k+1}}}{ES_{n_{k+1}}} \cdot \frac{ES_{n_{k+1}}}{ES_n}$$

при $n_k \leq n < n_{k+1}$. Следовательно, с вероятностью единица

$$\frac{S_n}{ES_n} \rightarrow 1. \quad \square$$

23. Пусть $(\xi_n)_{n \geq 1}$ и $(\eta_n)_{n \geq 1}$ — две последовательности случайных величин, у которых совпадают все конечномерные распределения, т. е. $(\xi_1, \dots, \xi_n) \stackrel{d}{=} (\eta_1, \dots, \eta_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$. Доказать, что тогда и $\eta_n \xrightarrow{p} \eta$ для некоторой случайной величины η , распределение которой совпадает с распределением ξ .

Решение. Поскольку $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$, величины ξ_n образуют фундаментальную по вероятности последовательность, а значит, этим же свойством обладают η_n . Последнее обеспечивает существование величины η . Кроме того, $\xi_n \stackrel{d}{=} \eta_n$, поэтому $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ и $\eta_n \xrightarrow{d} \eta$. Таким образом, $Ef(\xi) = Ef(\eta)$ для любой ограниченной непрерывной функции f , и, следовательно, $\xi \stackrel{d}{=} \eta$. $\square$

24. Пусть $(X_n)_{n \geq 1}$ — такая последовательность попарно независимых случайных величин, что $X_n \xrightarrow{p} X$ для некоторой случайной величины X . Доказать, что X является вырожденной случайной величиной.

Решение. По условию $X_{2n} \xrightarrow{p} X$ и $X_{2n+1} \xrightarrow{p} X$. Следовательно, ввиду задач II.10.7 и II.10.9 с учетом непрерывности функции $x \vee y$ имеем

$$(X_{2n}, X_{2n+1}) \xrightarrow{p} (X, X) \quad \text{и} \quad X_{2n} \vee X_{2n+1} \xrightarrow{p} X.$$

В частности, $X_{2n} \vee X_{2n+1} \xrightarrow{d} X$. Значит, в любой точке $x \in \mathbb{R}$ непрерывности функции распределения $F(x) = P(X \leq x)$ выполнены соотношения

$$P(X_{2n} \leq x, X_{2n+1} \leq x) = P(X_{2n} \vee X_{2n+1} \leq x) \rightarrow F(x)$$

и

$$P(X_{2n} \leq x, X_{2n+1} \leq x) = P(X_{2n} \leq x)P(X_{2n+1} \leq x) \rightarrow F^2(x).$$

Тем самым, $F(x) = 0$ или $F(x) = 1$ для всех точек непрерывности x . Последнее возможно только для вырожденной величины X . $\square$

25. Показать, что для каждой последовательности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ можно найти такую последовательность констант $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots > 0$, что $\varepsilon_n \xi_n \rightarrow 0$ п. н.

Решение. Следует выбрать ε_n из условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\varepsilon_n \xi_n| \geq 1/n) < \infty$$

и воспользоваться леммой Бореля—Кантелли. $\square$

26. Пусть $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность случайных величин. Показать, что множество $\{\xi_n \rightarrow\}$, т. е. множество тех $\omega \in \Omega$, где $\xi_n(\omega)$ сходится, может быть представлено в следующем виде:

$$\{\xi_n \rightarrow\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} \left\{ \sup_{l \geq k} |\xi_l - \xi_k| \leq n^{-1} \right\}.$$

Соответственно множество $\{\xi_n \not\rightarrow\}$, где ξ_n расходится, представимо в виде

$$\{\xi_n \not\rightarrow\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} \left\{ \sup_{l \geq k} |\xi_l - \xi_k| > n^{-1} \right\}.$$

Решение. Указанные представления есть не что иное, как переформулировка логического выражения

$$\forall n \geq 1 \exists m \geq 1 \forall k \geq m \forall l \geq k: |\xi_k(\omega) - \xi_l(\omega)| \leq n^{-1}.$$

Последнее эквивалентно фундаментальности последовательности $\{\xi_n(\omega)\}_{n \geq 1}$, что, в свою очередь, равносильно сходимости $\xi_n(\omega)$. Аналогично доказывается представление множества $\{\xi_n \not\rightarrow\}$. $\square$

27. Привести пример такой последовательности случайных величин, что с вероятностью единица $\varlimsup_n \xi_n = \infty$, $\varliminf_n \xi_n = -\infty$, но тем не менее существует такая случайная величина ξ , что $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$.

Решение. Пусть $P(\xi = 0) = 1$. Рассмотрим величины

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \dots) = (\eta_{11}, \eta_{12}, \eta_{22}, \eta_{13}, \dots),$$

где $\eta_{ij} = j(-1)^{i-1} I_{(i/j, (i+1)/j]}(\eta)$, а величина η равномерно распределена на $[0, 1]$. Тогда ξ_n и есть искомая последовательность величин. $\square$

28. ([32]) Доказать следующий вариант первой леммы Бореля—Кантелли: если последовательность событий $A_1, A_2, \dots$ такова, что

$\lim_n P(A_n) = 0$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \setminus A_{n+1}) < \infty, \quad (*)$$

то $P(A_n \text{ б. ч.}) = 0$.

Решение. По первой лемме Бореля—Кантелли из условия (*) следует, что

$$P(A_n \setminus A_{n+1} \text{ б. ч.}) = 0.$$

С другой стороны, в силу условия $P(A_n) \rightarrow 0$ имеем

$$P(\varliminf A_n) = 0.$$

Для завершения доказательства осталось воспользоваться результатом задачи II.1.11. $\square$

29. В связи со второй леммой Бореля—Кантелли показать, что $P(A_n \text{ б. ч.}) = 1$, если и только если $\sum_n P(A_n \cap A) = \infty$ для каждого такого множества A , что $P(A) > 0$.

Решение. Из условия $P(A_n \text{ б. ч.}) = 1$ следует, что

$$P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) = 1, \quad n \geq 1.$$

Если $\sum_n P(A_n \cap A) < \infty$, то

$$P(A) = P\left(A \cap \bigcup_{k \geq n} A_k\right) \leq \sum_{k \geq n} P(A_k \cap A) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

и $P(A) = 0$. $\square$

30. (

citePtak63) Пусть события $A_1, A_2, \dots$ таковы, что $P(A_n \text{ б. ч.}) > 0$. Тогда

$$P\left(\bigcap_{k=1}^K A_{n_k}\right) > 0 \quad \text{при всех } K \geq 1$$

для некоторой подпоследовательности индексов (n_k) .

Решение. Пусть $A = \{A_n \text{ б. ч.}\}$. Тогда существует такое n_1 , что $P(A_{n_1} A) > 0$, иначе мы бы имели $P(A) = 0$. Далее, $A_{n_1} A = \{A_{n_1} A_n \text{ б. ч.}\}$. Применяя аналогичное рассуждение для $A_{n_1} A$, находим n_2 , для которого $P(A_{n_1} A_{n_2} \cdot A_{n_1} A) = P(A_{n_1} A_{n_2} A) > 0$, и т. д. Индексы (n_k) образуют искомую подпоследовательность. $\square$

31. Пусть события $A_1, A_2, \dots$ независимы и $P(A_n) < 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $P(A_n \text{ б. ч.}) = 1$, если и только если $P(\cup A_n) = 1$.

Решение. Необходимость условия $P(\cup A_n) = 1$ очевидна. Покажем, что оно также является достаточным. Имеем

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - P(A_n)) = 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0.$$

Учитывая неравенство $1 - P(A_n) > 0$, находим

$$1 - P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) = \prod_{n=k}^{\infty} (1 - P(A_n)) = 0.$$

Отсюда вытекает, что $P(A_n \text{ б. ч.}) = 1$. □

32. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые случайные величины,

$$P(\xi_n = 0) = n^{-1} \quad \text{и} \quad P(\xi_n = 1) = 1 - n^{-1}.$$

Пусть $A_n = \{\xi_n = 0\}$. Из свойств $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} P(\bar{A}_n) = \infty$ заключить, что $\lim_n \xi_n$ не существует п. н.

Решение. По лемме Бореля—Кантелли с вероятностью единица последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots$ содержит бесконечное число как нулей, так и единиц. Отсюда следует искомое свойство. □

33. Доказать теорему Егорова.

Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность таких случайных величин, что $\xi_n \rightarrow \xi$ п. н. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти такое множество $A_\varepsilon \in \mathcal{F}$ с $P(A_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$, что на нем имеет место равномерная сходимость $\xi_n(\omega) \rightarrow \xi(\omega)$, $\omega \in A_\varepsilon$.

Решение. По определению сходимости с вероятностью единица

$$\xi_n \rightarrow \xi \text{ п. н.} \Leftrightarrow \sup_{i \geq n} |\xi_i - \xi| \rightarrow 0 \text{ п. н.}$$

Поэтому $\sup_{i \geq n} |\xi_i - \xi| \xrightarrow{p} 0$ и, следовательно, существует последовательность индексов $n_k \uparrow \infty$, для которой

$$P\left(\sup_{i \geq n_k} |\xi_i - \xi| > k^{-1}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

На множестве

$$A_\varepsilon = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ \sup_{i \geq n_k} |\xi_i - \xi| \leq k^{-1} \right\}$$

имеет место равномерная сходимость $\xi_n(\omega) \rightarrow \xi(\omega)$, $\omega \in A_\varepsilon$. При этом вероятность события A_ε не меньше $1 - \varepsilon$. Действительно,

$$\begin{aligned} P(A_\varepsilon) &\geq 1 - P(\bar{A}_\varepsilon) \geq 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\sup_{i \geq n_k} |\xi_i - \xi| > k^{-1}\right) \geq \\ &\geq 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = 1 - \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

34. Утверждение теоремы Егорова делает естественным введение следующего понятия. Говорят, что последовательность измеримых функций $\{f_n\}_{n \geq 1}$ на пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ с конечной мерой μ сходится *почти равномерно* к функции f , если для *всякого* $\varepsilon > 0$ можно найти такое множество $A_\varepsilon \in \mathcal{F}$ с $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$, что $f_n(\omega) \rightarrow f(\omega)$ равномерно по всем $\omega \in \bar{A}_\varepsilon$ (обозначение: $f_n \rightrightarrows f$).

Показать, что из почти равномерной сходимости $f_n \rightrightarrows f$ следует и сходимость по мере $f_n \xrightarrow{\mu} f$, и сходимость п. н. $f_n \xrightarrow{\mu\text{-п. н.}} f$.

Решение. Вследствие конечности μ из сходимости μ -п. н. следует сходимость по мере. Поэтому достаточно доказать, что

$$f_n \rightrightarrows f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu\text{-п. н.}} f.$$

Итак, допустим, что $f_n \rightrightarrows f$. По определению на множестве $\bigcup_{\varepsilon > 0} \bar{A}_\varepsilon$ имеет место сходимость $f_n(\omega) \rightarrow f(\omega)$. Осталось заметить, что

$$\mu\left(\Omega \setminus \bigcup_{\varepsilon > 0} \bar{A}_\varepsilon\right) = \mu\left(\bigcap_{\varepsilon > 0} A_\varepsilon\right) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu(A_\varepsilon) = 0. \quad \square$$

35. Доказать *теорему Лузина*.

Любую $\mathcal{B}[a, b]$ -измеримую функцию $f = f(x)$ на $[a, b]$ можно сделать непрерывной, выбрасывая из $[a, b]$ подходящие открытые интервалы сколь угодно малой общей длины.

Вывести отсюда, что для *всякого* $\varepsilon > 0$ найдется такая *непрерывная* функция $f_\varepsilon = f_\varepsilon(x)$, что

$$\lambda(x \in [a, b]: f(x) \neq f_\varepsilon(x)) < \varepsilon,$$

где λ — лебегова мера. При этом можно гарантировать, что

$$\sup_{x \in [a, b]} |f_\varepsilon(x)| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Решение. Рассмотрим ступенчатые функции

$$f_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k 2^{-n} I([k-1]2^{-n} \leq f(x) < k 2^{-n}), \quad x \in [a, b], \quad n \geq 1.$$

Тогда $|f_n(x) - f(x)| \leq 2^{-n}$ на $[a, b]$. Фиксируем сколь угодно малое $\varepsilon > 0$. Вследствие задачи II.3.32 можно подобрать такие замкнутые множества

$$F_{nk} \subseteq \{x: f_n(x) = k2^{-n}\}$$

и $K_n \geq 1$, что $\lambda\left(\bigcup_{k=-K_n}^{K_n} F_{nk}\right) > b - a - \varepsilon 2^{-n}$. Поскольку F_{nk} не пересекаются по k и функция f_n постоянна на каждом F_{nk} , она непрерывна на $F_n = \bigcup_{k=-K_n}^{K_n} F_{nk}$, причем F_n замкнуто. Следовательно, f_n непрерывна на пересечении $F = \bigcap_n F_n$, которое также замкнуто.

Далее, $f_n \rightarrow f$ равномерно на F , поэтому функция f должна быть непрерывной на F . Дополнение к F открыто и, значит, представляется в виде объединения непересекающихся интервалов $\bigcup_n (a_n, b_n)$. Их общая длина равна

$$b - a - \lambda(F) \leq \sum_{n \geq 1} \varepsilon 2^{-n} = \varepsilon.$$

Второе утверждение очевидным образом следует из первого. А именно, для всякого $\varepsilon > 0$ функция $f = f(x)$ является непрерывной на множестве $[a, b] \setminus \bigcup_n (a_n, b_n)$, где $(a_n, b_n) \subset [a, b]$ — непересекающиеся по n интервалы, причем $\sum_n [b_n - a_n] < \varepsilon$. Тем самым f_ε можно задать формулой

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(x), & x \notin \bigcup_n (a_n, b_n), \\ f(a_n) + \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} (x - a_n), & x \in (a_n, b_n). \end{cases}$$

При этом если $|f(x)| \leq c$ на $[a, b]$, то аналогичное утверждение верно и для f_ε . $\square$

Замечание. С незначительными изменениями доказательство теоремы сохраняется, если рассматривать измеримые функции $f = f(x)$, определенные на некоторой открытой ограниченной области в $\mathbb{R}^n$.

Замечание. Следуя идеям Бореля и Хана, с помощью теоремы Лузина можно дать другое, эквивалентное определение измеримой на (a, b) функции и построить интеграл Лебега. А именно, назовем функцию $f = f(x)$ измеримой на (a, b) , если ее можно сделать непрерывной, выбрасывая из (a, b) подходящие открытые интервалы *сколь угодно малой* общей длины.

Зададим далее интеграл Лебега $\int_F f(x) dx$ сначала по замкнутому множеству F для функций f , непрерывных на F . В общем же случае

интеграл определен предельным переходом $\lim_n \int_{F_n} f(x) dx$, где общая длина дополнения к $F_n (\subset (a, b))$ стремится к нулю.

36. Следуя Банаху [30], установить с помощью теоремы Лузина, что если измеримая на $[0, 1]$ функция $f = f(x)$ такова, что

$$f(x+h) = f(x) + f(h), \quad 0 \leq x, h \leq 1, \quad x+h \leq 1,$$

то f непрерывна справа в нуле, и вывести отсюда, что

$$f(x) = f(1)x.$$

Решение. Заметим вначале, что $f(0) = f(0) + f(0) = 0$. Фиксируем малое $\varepsilon > 0$. Выберем по теореме Лузина замкнутое множество F с мерой Лебега $\lambda(F) > 1 - \varepsilon$, на котором f непрерывна. Если для любого малого h пересечение F и

$$F+h = \{x \in [0, 1]: x-h \in F\}$$

содержит хотя бы одну точку z , то в силу равномерной непрерывности функции f на F (которая следует из обычной непрерывности) с необходимостью получаем

$$|f(h) - f(0)| = |f(z) - f(z-h)| \leq \sup_{x, x+h \in F} |f(x+h) - f(x)| \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0.$$

Конечно, такая точка z найдется для любого $h < 1/3$, поскольку

$$\lambda(F) + \lambda(F+h) > 1,$$

если $\varepsilon < 1/3$. Таким образом, функция f непрерывна справа в нуле и, следовательно, везде, так как $|f(h) - f(0)| = |f(x+h) - f(x)|$.

Далее, очевидно, $f(n/m) = n f(1/m) = f(1)n/m$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$ ($m > n$), так что в силу непрерывности справа $f(x) = f(1)x$ для всех $x \in [0, 1]$. $\square$

37. Пусть функция $f = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, такова, что $\int_0^\infty |f(x)|^p dx < \infty$ для некоторого $p > 0$. Доказать, что имеет место следующее свойство непрерывности в L^p :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)|^p dx \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0.$$

Решение. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, для которого подберем такое $a > 0$, что

$$\int_{|x|>a} |f(x)|^p dx < \varepsilon.$$

Выберем далее $b > 0$, для которого

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_b(x)|^p dx < \varepsilon,$$

где $f_b(x) = f(x)I(|f(x)| \leq b)$. По теореме Лузина теперь найдется такая непрерывная функция $g = g(x)$, что $|g(x)| \leq b$, $|x| \leq 3a$ и

$$\lambda(x: |x| \leq 3a, f_b(x) \neq g(x)) < \frac{\varepsilon}{b}$$

(λ — мера Лебега). Применяя неравенство

$$|x + y|^p \leq c_p(|x|^p + |y|^p), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

справедливое для $c_p = 1$ при $p \in (0, 1)$ и $c_p = 2^{p-1}$ при $p \geq 1$, получаем оценки, выполненные при $|h| \leq a$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)|^p dx &= \\ &= \int_{|x| > 2a} |f(x+h) - f(x)|^p dx + \int_{-2a}^{2a} |f(x+h) - f(x)|^p dx \leq \\ &\leq 2c_p \varepsilon + 4c_p b \cdot \frac{\varepsilon}{b} + \int_{-2a}^{2a} |g(x+h) - g(x)|^p dx. \end{aligned}$$

Непрерывная на $[-3a, 3a]$ функция $g = g(x)$ равномерно непрерывна на этом отрезке, так что для достаточно малых h имеем

$$\int_{-2a}^{2a} |g(x+h) - g(x)|^p dx \leq \varepsilon.$$

Итак, для достаточно малых h имеем

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)|^p dx \leq (6c_p + 1)\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда следует искомое соотношение. $\square$

38. Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность случайных величин, заданных на полном вероятностном пространстве и таких, что $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$. Показать, что

$$\sigma(\xi_1, \xi_2, \dots) = \sigma(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi),$$

где $\sigma(X, Y, \dots)$ — σ -алгебра, порожденная случайными элементами $X, Y, \dots$ и содержащая все события нулевой вероятности.

Решение. Для некоторой подпоследовательности n_k имеем $\xi_{n_k} \rightarrow \xi$ п. н., поэтому

$$\{\xi \leq x\} \in \sigma(\xi_{n_1}, \xi_{n_2}, \dots) \subset \sigma(\xi_1, \xi_2, \dots), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Теперь с помощью теоремы о монотонных классах легко вывести искомое утверждение. $\square$

39. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — такие н. о. р. случайные величины, что $nP(|\xi_1| > \varepsilon f(n)) = o(1)$, $n \rightarrow \infty$, для некоторых $f(n) \rightarrow \infty$ и любого $\varepsilon > 0$. Показать, что

$$\frac{\xi_{n:n}}{f(n)} \xrightarrow{p} 0,$$

где $\xi_{n:n} = \max\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$.

Решение. При $\varepsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned} P(\xi_{n:n} > \varepsilon f(n)) &= 1 - [P(\xi_1 \leq \varepsilon f(n))]^n = \\ &= 1 - [1 + o(n^{-1})]^n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Далее, для достаточно большого n и такого $M > 0$, что $P(\xi_1 \leq -M) < 1$, получаем

$$\begin{aligned} P(\xi_{n:n} \leq -\varepsilon f(n)) &= [P(\xi_1 \leq -\varepsilon f(n))]^n \leq \\ &\leq [P(\xi_1 \leq -M)]^n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad \square \end{aligned}$$

40. Предположим, что

$$\xi_n \xrightarrow{p} \xi, \quad \eta_n \xrightarrow{p} \eta, \quad P(\xi_n \leq \eta_n) \rightarrow 1.$$

Показать, что тогда $P(\xi \leq \eta) = 1$.

Решение. Из того, что $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{p} \eta$, следует, что $\xi_{n_k} \rightarrow \xi$, $\eta_{n_k} \rightarrow \eta$ с вероятностью единица для некоторой подпоследовательности n_k . Отсюда получаем искомое равенство. $\square$

41. Пусть $(\xi_n)_{n \geq 1}$, $(\eta_n)_{n \geq 1}$ — две последовательности случайных величин, причем ξ_n не зависит от η_n для всех n и $P(\eta_n \geq 0) = 1$. Доказать импликацию

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi, \quad \xi_n \eta_n \xrightarrow{d} \xi, \quad P(\xi = 0) < 1 \Rightarrow \eta_n \xrightarrow{p} 1.$$

Решение. Покажем, что семейство η_n является относительно компактным, т. е.

$$\limsup_k \liminf_n P(|\eta_n| > k) = 0.$$

Допустим противное: $P(|\eta_{n_k}| > k) \geq \delta$ для некоторых $n_k \rightarrow \infty$ и $\delta > 0$. Выберем $\varepsilon > 0$ из условия $\liminf_n P(|\xi_n| > \varepsilon) = \gamma > 0$. Тогда, с одной стороны,

$$\frac{\xi_{n_k} \eta_{n_k}}{k} \xrightarrow{p} 0$$

и, с другой стороны,

$$P(|\xi_{n_k} \eta_{n_k}| > \varepsilon k) \geq P(|\xi_{n_k}| > \varepsilon, |\eta_{n_k}| > k) \geq \frac{\gamma \delta}{2} > 0$$

при больших k . Полученное противоречие доказывает относительную компактность семейства $(\eta_n)_{n \geq 1}$.

По теореме Прохорова из любой последовательности величин семейства (η_n) можно выбрать сходящуюся по распределению подпоследовательность (η_{n_k}) . Поэтому достаточно установить импликацию

$$\eta_{n_k} \xrightarrow{d} \eta \Rightarrow P(\eta = 1) = 1.$$

Из независимости величин ξ_{n_k} и η_{n_k} следует, что если $\xi_{n_k} \xrightarrow{d} \xi'$ и $\eta_{n_k} \xrightarrow{d} \eta'$, то $\xi_{n_k} \eta_{n_k} \xrightarrow{d} \xi \eta$, где $\xi \stackrel{d}{=} \xi'$, $\eta \stackrel{d}{=} \eta'$, ξ и η независимы. Отсюда, используя условие задачи, заключаем, что

$$\xi \stackrel{d}{=} \xi \eta \stackrel{d}{=} \dots \stackrel{d}{=} \xi \eta^n \stackrel{d}{=} \dots \stackrel{d}{=} \xi \cdot \begin{cases} 0, & \eta \in [0, 1), \\ 1, & \eta = 1, \\ \infty, & \eta > 1. \end{cases}$$

В последнем переходе мы воспользовались тем, что $P(\eta \geq 0) = 1$. Учитывая независимость величин ξ и η , легко установить, что $P(\eta = 1) = 1$. $\square$

42. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — неотрицательные случайные величины и σ -алгебры $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ таковы, что $E(\xi_n | \mathcal{F}_n) \xrightarrow{p} 0$. Показать, что тогда $\xi_n \xrightarrow{p} 0$.

Решение. При всех $\varepsilon > 0$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости имеем

$$P(\xi_n > \varepsilon) = EP(\xi_n > \varepsilon | \mathcal{F}_n) \leq E1 \wedge [\varepsilon^{-1} E(\xi_n | \mathcal{F}_n)] \rightarrow 0. \quad \square$$

43. ([64]) Показать, что в пространстве $C[0, 1]$ непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$ не существует такой метрики ρ , что сходимость $\rho(f_n, f) \rightarrow 0$ равносильна поточечной сходимости f_n к f . (Ср. с задачей П.10.16.)

Решение. Нам потребуется некоторое специальное множество непрерывных на $[0, 1]$ функций $\{f_{nm}\}_{m,n \geq 1}$, для построения которого нужно будет ввести несколько вспомогательных конструкций.

Назовем

$$\left\{ [x_{n-1}, x_n] : x_0 = a, x_n = \frac{x_{n-1} + b}{2}, n \geq 1 \right\}$$

нормальным разбиением полуинтервала $[a, b)$, $a < b$. Определим далее разбиения $P_1, P_2, \dots$, полагая, что: P_1 есть нормальное разбиение полуинтервала $[0, 1)$; P_{n+1} есть измельчение P_n , получаемое при нормальном разбиении всех элементов P_n ($n \geq 1$). Поскольку множество $P = \bigcup_{n \geq 1} P_n$

счетно, найдется биекция $l: P \rightarrow \mathbb{N}$.

Определим непрерывные на $[0, 1]$ функции $\{f_{nm}\}_{m,n \geq 1}$ следующим образом. Положим $f_{nm}(1) = 0$. Далее, на каждом полуинтервале $I = [a, b) \in P_n$ с нормальным разбиением $\{\{x_{k-1}, x_k\}\}_{k \geq 1}$ зададим график функции f_{nm} (и, значит, саму функцию f_{nm}) ломаной, последовательно соединяющей точки $(a, 0)$, $(x_m, 0)$, (x_{m+1}, c) , (x_{m+2}, c) , $(x_{m+3}, 0)$ и $(b, 0)$, где

$$c = \begin{cases} 1, & l(I) \leq m, \\ 1/l(I), & l(I) > m. \end{cases}$$

Так определенные функции $f_{nm} \rightarrow 0$ поточечно при $m \rightarrow \infty$.

Предположим, что указанная в условии метрика ρ существует. Тогда с необходимостью $\rho(f_{nm}, 0) \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$. Следовательно, найдутся такие индексы $\{m_n^*\}_{n \geq 1}$, что $\rho(f_{nm}, 0) < 1/n$ при $m > m_n^*$. Тем самым, для любой последовательности (m_n) , для которой $m_n > m_n^*$, выполнена поточечная сходимость f_{nm_n} к нулю.

Пусть I_1 — некоторый полуинтервал из P_1 . Выберем какое-нибудь m_1 из условия $m_1 > l(I_1) + m_1^*$. Тогда $f_{1m_1} = 1$ на замыкании I_2^c некоторого полуинтервала $I_2 \in P_2$, $I_2 \subseteq I_1$. Выберем теперь m_2 из условия $m_2 > l(I_2) + m_2^*$. Тогда $f_{2m_2} = 1$ на I_3^c для некоторого $I_3 \in P_3$, $I_3 \subseteq I_2$. Продолжая эту процедуру до бесконечности, получим вложенную последовательность непустых отрезков (I_n^c) и последовательность таких функций (f_{nm_n}) , что $m_n > m_n^*$ и $f_{nm_n} = 1$ на I_{n+1}^c ($n \geq 1$). Но это будет означать, что

$$f_{nm_n}(x) \rightarrow 1 \neq 0, \quad x \in \bigcap_{n \geq 1} I_n^c (\neq \emptyset),$$

т. е. функции f_{nm_n} не сходятся поточечно к нулю. Полученное противоречие доказывает несуществование метрики ρ . $\square$

44. Привести пример, показывающий, что можно найти такие случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$, что $\xi_n \rightarrow 0$ всюду, однако $E\xi_n = 1$ при всех $n \geq 1$.

Решение. Рассмотрим величины

$$\xi_n = n \cdot I_{(0,1]}(n\xi),$$

где ξ — случайная величина, равномерно распределенная на $[0, 1]$. Тогда $\xi_n \rightarrow 0$ всюду и $E\xi_n = 1$. $\square$

45. Пусть ξ — случайная величина, медиана μ которой однозначно определяется неравенством

$$P(\xi < \mu) \leq \frac{1}{2} \leq P(\xi \leq \mu).$$

Показать, что $\mu_n \rightarrow \mu$ для *любых* медиан μ_n случайных величин $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, удовлетворяющих двойному неравенству

$$P(\xi_n < \mu_n) \leq \frac{1}{2} \leq P(\xi_n \leq \mu_n).$$

Привести примеры, демонстрирующие, что последнее свойство, вообще говоря, *не выполнено*, когда μ не определено однозначно.

Решение. Множество точек непрерывности C_F функции распределения $F(x) = P(\xi \leq x)$ всюду плотно (поскольку множество точек разрыва *не более чем счетно*). Поэтому можно выбрать сколь угодно малое $\delta > 0$, для которого $\mu \pm \delta \in C_F$ и (в силу единственности медианы μ)

$$F(\mu - \delta) < \frac{1}{2} < F(\mu + \delta).$$

Так как по определению сходимости $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ имеем

$$P(\xi_n \leq \mu - \delta) \rightarrow F(\mu - \delta) \quad \text{и} \quad P(\xi_n < \mu + \delta) \rightarrow F(\mu + \delta),$$

получаем, что при достаточно больших n выполняются неравенства

$$P(\xi_n \leq \mu - \delta) < \frac{1}{2} < P(\xi_n < \mu + \delta).$$

Следовательно,

$$P(\xi_n \leq \mu - \delta) \leq P(\xi_n \leq \mu_n), \quad P(\xi_n < \mu_n) \leq P(\xi_n < \mu + \delta),$$

т. е. $\mu - \delta \leq \mu_n \leq \mu + \delta$. Отсюда следует сходимость $\mu_n \rightarrow \mu$. Если μ не определяется однозначно, то искомым контрпример ($\mu_n \not\rightarrow \mu$) легко построить, рассматривая $\xi_n = \xi$. $\square$

46. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность н. о. р. случайных величин, $P(\xi_1 > x) = \exp(-x)$, $x \geq 0$ (т. е. величины экспоненциально распределены). Показать, что

$$P(\xi_n > \alpha \ln n \text{ б. ч.}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha \leq 1, \\ 0, & \text{если } \alpha > 1. \end{cases}$$

Убедиться в том, что это утверждение допускает следующие уточнения:

$$P(\xi_n > \ln n + \alpha \ln \ln n \text{ б. ч.}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha \leq 1, \\ 0, & \text{если } \alpha > 1, \end{cases}$$

и, вообще, для любого $k \geq 1$ выполняется равенство

$$P(\xi_n > \ln n + \ln \ln n + \dots + \underbrace{\ln \dots \ln n}_{k \text{ раз}} + \alpha \underbrace{\ln \dots \ln n}_{k+1 \text{ раз}} \text{ б. ч.}) = \\ = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha \leq 1, \\ 0, & \text{если } \alpha > 1. \end{cases}$$

Решение. Согласно леммам Бореля—Кантелли

$$P(\xi_n > c_n \text{ б. ч.}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_n \exp(-c_n) = \infty, \\ 0, & \text{если } \sum_n \exp(-c_n) < \infty. \end{cases}$$

Отсюда, проверяя сходимость ряда $\sum_n \exp(-c_n)$ для различных c_n , легко получить искомые соотношения. $\square$

47. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — положительные н. о. р. случайные величины, имеющие такую функцию распределения $F = F(x)$, что

$$F(x) = \lambda x + o(x), \quad x \rightarrow 0,$$

при некотором $\lambda > 0$. Обозначая $\xi_{\min} = \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n$, показать, что

$$n\xi_{\min} \xrightarrow{d} \eta, \quad n \rightarrow \infty,$$

где η — экспоненциально распределенная случайная величина с параметром λ .

Решение. При фиксированном $x > 0$ имеем

$$P(n\xi_{\min} > x) = [P(n\xi_1 > x)]^n = \left(1 - \frac{\lambda x + o(1)}{n}\right)^n \rightarrow e^{-\lambda x}. \quad \square$$

48. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — невырожденные неотрицательные случайные величины,

$$E\xi_n^p < \infty, \quad n \geq 1, \quad \text{и} \quad C^p = \sup_n \frac{E\xi_n^p}{(E\xi_n)^p} < \infty \quad \text{для некоторого } p > 1.$$

Показать, что

$$\sum_n \xi_n < \infty \text{ п. н.} \Leftrightarrow \sum_n E\xi_n < \infty \Leftrightarrow \sum_n \|\xi_n\|_p < \infty.$$

Решение. Поскольку $E\xi_n \leq \|\xi_n\|_p \leq CE\xi_n$ для всех n , имеем

$$\sum_n E\xi_n < \infty \Leftrightarrow \sum_n (E\xi_n^p)^{1/p} < \infty.$$

Пусть теперь $\sum_n E\xi_n < \infty$. Тогда $E \sum_n \xi_n < \infty$ и, значит, $\sum_n \xi_n < \infty$ п. н. Предположим, что $\sum_n E\xi_n = \infty$. В силу задачи II.6.62 по неравенству Минковского

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^n \xi_i \geq \varepsilon \sum_{i=1}^n E\xi_i\right) &\geq (1-\varepsilon)^q \frac{\left(\sum_{i=1}^n E\xi_i\right)^q}{\left\|\sum_{i=1}^n \xi_i\right\|_p^q} \geq (1-\varepsilon)^q \frac{\left(\sum_{i=1}^n E\xi_i\right)^q}{\left(\sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_p\right)^q} \geq \\ &\geq \frac{(1-\varepsilon)^q}{C^q}, \end{aligned}$$

когда $\varepsilon \in (0, 1)$, а $q = p/(p-1)$. Другими словами,

$$P\left(\sum_n \xi_n = \infty\right) \geq \frac{1}{C^q} > 0.$$

Тем самым мы доказали равносильность сходимости ряда из ξ_n п. н. и в L^1 . $\square$

49. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые случайные величины с равномерным распределением на $[0, 1]$. Положим $\zeta_n = \xi_1 \dots \xi_n$ и рассмотрим ряд $\sum_{n \geq 1} z^n \zeta_n$. Показать, что радиус сходимости R этого ряда с вероятностью единица равен e .

Решение. Из курса анализа известно, что

$$1/R = \overline{\lim}_n |\zeta_n|^{1/n}.$$

Осталось воспользоваться соотношениями $|\zeta_n| = \zeta_n$ и

$$\frac{\ln \zeta_n}{n} = \frac{\ln \xi_1 + \dots + \ln \xi_n}{n} \rightarrow E \ln \xi_1 = -1 \text{ п. н.,}$$

последнее из которых вытекает из сходимости ряда

$$\sum_{n \geq 1} \frac{E(\ln \zeta_n - E \ln \zeta_n)^4}{n^4}. \quad \square$$

50. (Об устройстве цепных дробей, [21].) Пусть ω — действительное число и $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ — его цепная дробь (обрывающаяся на некотором a_n , если $\omega \in \mathbb{Q}$), иначе говоря,

$$[a_0; a_1, a_2, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}},$$

где $a_n = a_n(\omega)$ — целые числа, определяемые формулами

$$a_0(\omega) = [\omega], \quad a_1 = \left[\frac{1}{\{\omega\}} \right], \quad a_2 = \left[\frac{1}{\{1/\{\omega\}\}} \right], \quad a_3 = \left[\frac{1}{\{1/\{1/\{\omega\}\}\}} \right], \quad \dots,$$

а $[x]$ и $\{x\} = x - [x]$ — целая и дробная части числа x соответственно.

Каждый конечный кусок $[a_0; a_1, \dots, a_n]$ цепной дроби $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ определяет некоторое рациональное число p/q , где $p, q \in \mathbb{N}$ определены с точностью до умножения на целочисленную константу. Обычно выбирают некоторое *подходящее* представление

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}},$$

удовлетворяющее *закону образования подходящих дробей*

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad \text{и} \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad n \geq 1,$$

где $p_{-1} = 1, q_{-1} = 0$.

(а) Проверить, что такое представление действительно существует, причем

$$p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = (-1)^n, \quad n \geq 1,$$

если $\omega \in [0, 1)$.

(б) Доказать, что, каковы бы ни были натуральные числа $k_1, \dots, k_n$,

$$\{0 \leq \omega < 1 : a_1(\omega) = k_1, \dots, a_n(\omega) = k_n\}$$

есть полуинтервал, границы которого суть $[0; k_1, \dots, k_n]$ и $[0; k_1, \dots, k_n + 1]$. (Ср. с представлением в усиленном законе больших чисел Бореля, см. В2.IV.3.4.) Проверить, что длина наибольшего из всех таких полуинтервалов стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Тем самым бесконечная цепная дробь $[a_0(\omega); a_1(\omega), a_2(\omega), \dots]$ корректно определена как предел $\lim_n [a_0(\omega); a_1(\omega), \dots, a_n(\omega)]$ и равна ω .

(с) Проверить, что иррациональные числа представляются бесконечными цепными дробями, а рациональные — конечными.

Замечание. На множестве $\mathbb{P}$ иррациональных чисел в $[0, 1)$ можно ввести структуру метрического пространства, представляя их бесконечной цепной дробью и определяя расстояние

$$d([a_0; a_1, a_2, \dots], [b_0; b_1, b_2, \dots]) = \sum_{n \geq 1} \frac{I(a_n \neq b_n)}{2^n}.$$

При этом $(\mathbb{P}, d)$ окажется *полным* метрическим пространством.

Решение. (а) Такое представление следует определять индуктивно. А именно,

$$[a_0] = \frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0}, \quad [a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{p_0 a_1 + p_{-1}}{q_0 a_1 + q_{-1}} = \frac{p_1}{q_1},$$

где, конечно, отдельно приравниваются числители и знаменатели, причем $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$ (для удобства).

Пусть теперь определены подходящие дроби p_k/q_k для всех цепных дробей

$$[b_0; b_1, \dots, b_k]$$

длины $k+1 \leq n$. Тогда при всех $1 \leq k \leq n$ имеем

$$[a_0; a_1, \dots, a_k] = a_0 + \frac{1}{\frac{p'_{k-1}}{q'_{k-1}}} = \frac{p'_{k-1} a_0 + q'_{k-1}}{p'_{k-1}},$$

где $(p'_k/q'_k)_{k=0}^{n-1}$ — последовательность подходящих дробей для $[a_1; a_2, \dots, a_n]$ (и, как обычно, $p'_{-1} = 1$, $q'_{-1} = 0$). Прямой проверкой получаем, что равенства

$$p_k = p'_{k-1} a_0 + q'_{k-1}, \quad q_k = p'_{k-1}, \quad 0 \leq k \leq n,$$

задают последовательность подходящих дробей $(p_k/q_k)_{k=0}^n$ для дроби $[a_0; a_1, \dots, a_n]$. В самом деле, при $k \geq 2$ имеем

$$\begin{aligned} p_k &= p'_{k-1} a_0 + q'_{k-1} = (p'_{k-2} a_k + p'_{k-3}) a_0 + q'_{k-2} a_k + q'_{k-3} = \\ &= p_{k-1} a_k + p_{k-2}, \\ q_k &= p'_{k-1} = p'_{k-2} a_k + p'_{k-3} = q_{k-1} a_k + q_{k-2}. \end{aligned}$$

Если же $k = 1$, то (с учетом равенств $p_0 = p'_{-1} a_0 + q'_{-1} = a_0$, $q_0 = p'_{-1} = 1$)

$$\begin{aligned} p_1 &= p'_0 a_0 + q'_0 = a_1 a_0 + 1 = (1 * a_0 + 0) a_1 + 1 = p_0 a_1 + p_{-1}, \\ q_1 &= p'_0 = a_1 = 1 * a_1 + 0 = q_0 a_1 + q_{-1}. \end{aligned}$$

Тем самым мы построили подходящее представление для всех дробей длины $n+1$.

При этом, очевидно,

$$\begin{aligned} p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n &= p_n (a_n q_n + q_{n-1}) - (a_n p_n + p_{n-1}) q_n = \\ &= -(p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1}) \end{aligned}$$

и, кроме того, $p_{-1} q_0 - p_0 q_{-1} = 1$, т. е. $p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n = (-1)^n$.

(b) Рассмотрим все такие ω , что $a_1(\omega) = k_1, \dots, a_n(\omega) = k_n$. Условие $a_1(\omega) = [1/\omega] = k_1$ эквивалентно тому, что $k_1 \leq 1/\omega < k_1 + 1$ и

$$[0; k_1 + 1] = \frac{1}{k_1 + 1} < \omega \leq \frac{1}{k_1} = [0; k_1].$$

Далее, имеем $a_2(\omega) = a_1(\omega')$, где $\omega' \in [0, 1)$ определяется условием

$$\omega = \frac{1}{k_1 + \omega'}.$$

Поэтому $a_2(\omega) = k_2$ тогда и только тогда, когда $1/(k_2 + 1) < \omega' \leq 1/k_2$. Поскольку ω' как функция ω убывает по ω на $\{\omega: a_1(\omega) = k_1\}$, получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_2 + 1} < \omega' \leq \frac{1}{k_2} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow [0; k_1, k_2] = \frac{1}{k_1 + 1/k_2} \leq \omega < \frac{1}{k_1 + 1/(k_2 + 1)} = [0; k_1, k_2 + 1]. \end{aligned}$$

Рассуждая таким образом дальше, найдем, что

$$\{0 \leq \omega < 1: a_1(\omega) = k_1, \dots, a_n(\omega) = k_n\}$$

есть полуинтервал с концами

$$[0; k_1, \dots, k_n] = \lim_{m \rightarrow \infty} [0; k_1, \dots, k_n, m] = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{mp_n + p_{n-1}}{mq_n + q_{n-1}} = \frac{p_n}{q_n}$$

и

$$[0; k_1, \dots, k_n + 1] = [0; k_1, \dots, k_n, 1] = \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}},$$

где p_i, q_i ($i \leq n$) образованы по закону образования подходящих дробей. Длина этого интервала равна

$$\left| \frac{p_{n-1}q_n - q_{n-1}p_n}{q_n(q_n + q_{n-1})} \right| = \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})}.$$

Вследствие закона образования подходящих дробей $q_2 = k_2q_1 + q_0 \geq 2$, $q_3 = k_3q_2 + q_1 \geq 3, \dots, q_n \geq n$ и

$$\frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Следовательно, для всех $\omega \in [0, 1)$ имеем

$$|\omega - [0; a_1(\omega), \dots, a_n(\omega)]| \leq \frac{1}{n^2},$$

и, значит,

$$\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} [0; a_1(\omega), \dots, a_n(\omega)] = [0; a_1(\omega), a_2(\omega), \dots]$$

(с) Пусть число $\omega \in [0, 1)$ рационально и p/q — его несократимое представление. Тогда число $\omega' \in [0, 1)$, определенное равенством

$$\omega = \frac{1}{a_1(\omega) + \omega'},$$

будет также рациональным и будет иметь несократимое представление p'/q' , где $q' \leq q - 1$. Другими словами, цепная дробь $[0; a_1(\omega), a_2(\omega), \dots]$ оборвется через не более чем q шагов.

Если число ω иррационально, то оно не может быть представлено конечной цепной дробью, так как такая дробь всегда есть число рациональное. Поэтому (с учетом п. (b)) оно будет представляться бесконечной цепной дробью. $\square$

51. (О метрическом устройстве цепных дробей, [21].) Пусть

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0, 1), \mathcal{B}([0, 1)), \lambda),$$

где λ — мера Лебега. Пусть $\omega \in [0, 1)$ и $\omega = [0; a_1, a_2, \dots]$ — разложение числа ω в цепную дробь (см. задачу П.10.50). Обозначим $X_n(\omega) = [0; a_n, a_{n+1}, \dots]$, и пусть $F_n = F_n(x)$ — функция распределения величины X_n . В одном из писем к Лапласу Гаусс утверждал, что ему удалось установить вид предельного распределения X_n :

$$\lim_n F_n(x) = \frac{1}{\ln 2} \int_0^x \frac{du}{1+u}, \quad x \in [0, 1).$$

Доказательство Гаусса так нигде и не было опубликовано.

В данной задаче предлагается установить этот результат, следуя методу Р. О. Кузьмина.

(а) Показать вначале, что F_n , $n > 1$, удовлетворяют следующему функциональному уравнению (с $F_1(x) \equiv x$):

$$F_n(x) = \sum_{k \geq 1} \left[F_{n-1}\left(\frac{1}{k}\right) - F_{n-1}\left(\frac{1}{k+x}\right) \right];$$

здесь и далее x пробегает весь полуинтервал $[0, 1)$. Вывести отсюда, что каждой функции F_n отвечает некоторая плотность $f_n = f_n(x)$, причем такая, что (с $f_1(x) \equiv 1$)

$$f_n(x) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(k+x)^2} f_{n-1}\left(\frac{1}{k+x}\right).$$

(b) Установить, что полученное в п. (а) функциональное уравнение

$$f(x) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(k+x)^2} f\left(\frac{1}{k+x}\right)$$

имеет в числе своих решений все функции вида

$$f_a(x) = \frac{a}{1+x}, \quad a > 0.$$

Последнее, в частности, обеспечивает следующее свойство последовательности (f_n) : каковы бы ни были a, b , $0 < a < b$, и $n > 1$, справедлива импликация

$$\frac{a}{1+x} < f_{n-1}(x) < \frac{b}{1+x} \Rightarrow \frac{a}{1+x} < f_n(x) < \frac{b}{1+x}.$$

(с) Проверить, что сходимость

$$\lim_n f_n(x) = \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{1+x}$$

будет иметь место, если найдутся последовательности $(n_k) \subseteq (n)$, (a_k) и (b_k) , для которых при всех $k \geq 1$ выполняются неравенства

$$\frac{a_k}{1+x} < f_{n_k}(x) < \frac{b_k}{1+x}, \quad a_k < a_{k+1} < b_{k+1} < b_k,$$

и $b_k - a_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

(d) Дальнейшее доказательство основано на явном решении функционального уравнения на (f_n) (с произвольными f_n). А именно, $f_n(x) = I_n(f_1, x)$, где

$$I_n(f, x) = \sum_{(a_i)_{i \leq n}} f\left(\frac{p_n + x p_{n-1}}{q_n + x q_{n-1}}\right) \frac{1}{(q_n + x q_{n-1})^2},$$

$n > 1$, а суммирование ведется по всем $a_1, \dots, a_n \geq 1$ и при этом p_k/q_k , $k \geq 1$, — *подходящее* представление для $[0; a_1, \dots, a_k]$ (см. задачу II.10.50). Установить, что это действительно так.

(е) Имея явное решение из п. (d), надо лишь построить последовательности (n_k) , (a_k) и (b_k) , удовлетворяющие условиям п. (с). Для этого нам нужна какая-нибудь подходящая не зависящая от x оценка снизу величины $I_n(f, x)$ для произвольной непрерывной функции f при достаточно больших n .

«Нашупать» такую оценку можно, замечая, что при $x \in [0, 1)$ выполняется условие

$$\frac{p_n + x p_{n-1}}{q_n + x q_{n-1}} \in \left[\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} \right),$$

причем, как показывают результаты задачи II.10.50, все эти промежутки имеют длину

$$\frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})},$$

не пересекаются при различных $(a_1, \dots, a_n)$ и в сумме составляют $[0, 1)$.

С учетом этих замечаний предъявить какую-нибудь естественную нижнюю оценку для рассматриваемой суммы и с помощью нее построить искомые последовательности (n_k) , (a_k) и (b_k) .

Замечание. Ряд более тонких результатов получен в книге А. Я. Хинчина [21]. Про связь рассматриваемой задачи с эргодической теорией можно прочитать в книге [1].

Решение. (а) Первое соотношение вытекает из рассмотрений, фигурирующих в решении п. (b) задачи П.10.50. Второе соотношение проверяется по индукции с учетом следующего. Если при данном $n - 1$ ($n \geq 2$) у F_{n-1} на $[0, 1)$ существует ограниченная производная f_{n-1} , то ряд, задающий f_n , сходится равномерно на $[0, 1)$ к некоторой ограниченной функции. Поэтому ряд для F_n можно почленно дифференцировать и в результате будет получаться производная функции F_n (по теореме Вейерштрасса).

(b) Утверждение проверяется прямой подстановкой.

(c) Из условия следует, что $a_k \rightarrow a$ и $b_k \rightarrow a$ для некоторого $a > 0$, так что

$$\lim_n f_n(x) = \frac{a}{1+x}.$$

При этом $\int_0^1 f_n(x) dx = 1$ для всех $n \geq 1$, и, значит, a с необходимостью равно $1/\ln 2$.

(d) Применим индуктивные соображения. Пусть при $m = n - 1$ формула верна. Докажем ее для $m = n$. Имеем

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{a_n \geq 1} \frac{1}{(a_n + x)^2} f_{n-1}\left(\frac{1}{a_n + x}\right) = \\ &= \sum_{a_n \geq 1} \frac{1}{(a_n + x)^2} \sum_{(a_i)_{i \leq n-1}} f_1\left(\frac{p_{n-1} + p_{n-2}/(a_n + x)}{q_{n-1} + q_{n-2}/(a_n + x)}\right) \frac{1}{(q_{n-1} + q_{n-2}/(a_n + x))^2} = \\ &= \sum_{a_n \geq 1} \sum_{(a_i)_{i \leq n-1}} f_1\left(\frac{p_{n-1}a_n + p_{n-2} + xp_{n-1}}{q_{n-1}a_n + q_{n-2} + xq_{n-1}}\right) \frac{1}{(q_{n-1}a_n + q_{n-2} + xq_{n-1})^2} = \\ &= \sum_{(a_i)_{i \leq n}} f_1\left(\frac{p_n + xp_{n-1}}{q_n + xq_{n-1}}\right) \frac{1}{(q_n + xq_{n-1})^2}, \end{aligned}$$

где в последнем равенстве мы применили основное свойство *подходящих* дробей p_k/q_k , $n - 2 \leq k \leq n$.

(е) Функция f непрерывна, поэтому интегрируема по Риману. К тому же

$$\frac{1}{(q_n + xq_{n-1})^2} \geq \frac{1}{(q_n + q_{n-1})^2} \geq \frac{1}{2q_n(q_n + q_{n-1})}.$$

Поэтому

$$I_n(f, x) \geq \frac{1}{2} \sum_{(ai)_{i \leq n}} f\left(\frac{p_n + xp_{n-1}}{q_n + xq_{n-1}}\right) \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})},$$

где справа стоит не что иное, как интегральная сумма, сходящаяся к интегралу

$$\frac{1}{2} \int_0^1 f(u) du$$

при $n \rightarrow \infty$ (мы учли, что $\min_{(ai)_{i \leq n}} q_n(q_n + q_{n-1}) \rightarrow \infty$).

Итак, возьмем $f_1(x) \equiv 1$, и пусть $n_1 = 1$. Полагая $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, получаем

$$\frac{a_1}{1+x} < f_1(x) < \frac{b_1}{1+x},$$

где, как и раньше, x пробегает весь промежуток $[0, 1)$. Поскольку $f_a(x) = I_n(f_a, x)$ для всех (n, a) при $f_a(x) = a(1+x)^{-1}$, из полученной выше оценки следует, что

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{1+x} + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(f_1(u) - \frac{a_1}{1+u} \right) du - \delta &< f_n(x) < \\ &< \frac{b_1}{1+x} + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{b_1}{1+u} - f_1(u) \right) du + \delta, \end{aligned}$$

где $\delta > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым за счет увеличения n . Другими словами,

$$\frac{a_1}{1+x} < \frac{a_2}{1+x} < f_n(x) < \frac{b_2}{1+x} < \frac{b_1}{1+x}$$

при

$$a_2 = a_1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(f_1(u) - \frac{a_1}{1+u} \right) du - 2\delta,$$

$$b_2 = b_1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{b_1}{1+u} - f_1(u) \right) du + 2\delta.$$

Прямым подсчетом находим, что

$$b_2 - a_2 = (b_1 - a_1) \left(1 - \frac{\ln 2}{2} \right) + 4\delta.$$

Выбирая большое n , гарантируем, что

$$b_2 - a_2 < (b_1 - a_1) \left(1 - \frac{\ln 2}{4}\right).$$

Положим $n_2 = n$ для этого n . Отправляясь теперь от f_{n_2} вместо $f_{n_1} = f_1$ (функция $f_{n_2}(x) = I_{n_2}(f_{n_1}, x)$ будет непрерывна, так как f_{n_1} непрерывна), аналогичным образом построим n_3 и такую пару (a_3, b_3) , что

$$b_3 - a_3 < (b_2 - a_2) \left(1 - \frac{\ln 2}{4}\right) < (b_1 - a_1) \left(1 - \frac{\ln 2}{4}\right)^2.$$

Продолжая эти построения до бесконечности, получим последовательности (n_k) , (a_k) и (b_k) , которые будут удовлетворять всем требованиям из п. (с). $\square$

52. (См. [2].) Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые бернуллиевские величины, $P(\xi_n = 1) = p$ и $P(\xi_n = 0) = 1 - p$, $n \geq 1$, где p — некоторое фиксированное число из $(0, 1)$. Показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{2^n}$$

сходится п. н. к случайной величине с равномерным распределением на $[0, 1]$ при $p = 1/2$ и к некоторой величине с сингулярным распределением при $p \neq 1/2$.

(См. закон больших чисел.)

Решение. По теореме Фубини указанный ряд сходится п. н., так как все его слагаемые неотрицательны и

$$E \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \xi_n \leq \sum_{n \geq 1} 2^{-n} < \infty.$$

Пусть вначале $p = 1/2$. Надо установить, что величина $U = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \xi_n$ равномерно распределена на $[0, 1]$. Имеем

$$\{U < a\} = \{\xi_1 = a_1\} \cup \bigcup_{n \geq 2} \{\xi_n < a_n, \xi_i = a_i, 1 \leq i \leq n-1\},$$

где $a = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} a_n$ — «необрывающееся» двоичное разложение числа $a \in [0, 1]$, $\sum_{n \geq 1} a_n = \infty$ (в такой форме оно будет единственным). События, участвующие в последнем объединении, попарно не пересекаются, поэтому с учетом независимости величин ξ_n имеем

$$P(U < a) = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} I(a_n = 1) = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} a_n = a.$$

Следовательно, U равномерно распределено на $[0, 1]$.

Пусть λ_p — распределение (на $[0, 1]$) случайной величины $\sum_{n \geq 1} 2^{-n} \xi_n$, когда $P(\xi_n = 1) = p$. Мы только что показали, что $\lambda_{1/2}$ — мера Лебега. Кроме того, при любом $0 < p < 1$ имеем

$$P(\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \dots) = 0$$

для всякой последовательности $(x_n)_{n \geq 1}$ из нулей и единиц. В силу того что любое $x \in [0, 1]$ допускает не более двух различных двоичных разложений, получаем, что

$$\lambda_p(a: a = x) = 0,$$

и, значит,

$$\lambda_p(a: a \text{ допускает неединственное двоичное разложение}) = 0,$$

поскольку число всех a с неединственным разложением счетно (точнее говоря, это все двоично-рациональные числа $p/2^q$, $p, q \in \mathbb{N}$). Тем самым мера λ_p сосредоточена на точках a с единственным двоичным разложением $\sum_{n \geq 1} 2^{-n} a_n$. Для таких a можно, например, подсчитать вероятность (борелевского) события

$$\lambda_p\left(a: \overline{\lim}_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = q\right) = P\left(\overline{\lim}_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i = q\right)$$

для каждого фиксированного q , $0 < q < 1$. По усиленному закону больших чисел

$$\lambda_p\left(a: \overline{\lim}_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = q\right) = I(p = q).$$

Это означает, что мера λ_p , $p \neq 1/2$, сосредоточена на множестве с нулевой $\lambda_{1/2}$ -мерой. Другими словами, мера λ_p , $p \neq 1/2$, сингулярна по отношению к мере Лебега $\lambda_{1/2}$. Кроме того, как установлено выше, при $0 < p < 1$ мера λ_p непрерывна (без атомов). Таким образом, величина U сингулярна при $p \in (0, 1/2) \cup (1/2, 1)$. $\square$

Замечание. В доказательстве сингулярности можно вместо усиленного закона больших чисел применить обычный закон больших чисел. Рассуждения при этом полностью сохраняются, если обратиться к подходящей подпоследовательности частичных сумм $n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} a_i$.

53. (См. [77].) Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — н. о. р. случайные величины, $P(\xi_1 = 0) = P(\xi_1 = 2) = 1/2$. Показать, что

- (а) ряд $\sum_{n \geq 1} \frac{\xi_n}{3^n}$ сходится п. н. к некоторой случайной величине ξ ;
 (б) функция распределения величины ξ есть *канторова* функция (см. В.1.П.3);
 (с) найти $E\xi^n$ при всех $n \geq 1$.

Решение. (а) Поскольку $\xi_i \geq 0$ п. н. и

$$E \sum_{n \geq 1} \frac{\xi_n}{3^n} \leq 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{3^n} < \infty,$$

этот ряд сходится п. н.

(б) Почти для всех $\omega \in \Omega$ запись числа $\xi(\omega)$ в троичной системе счисления — это $0, \xi_1(\omega)\xi_2(\omega)\dots$ Среди ξ_i с нулевой вероятностью встречается цифра 1. Последнее означает, что функция распределения величины ξ постоянна на тех же промежутках, что и канторова функция. Легко установить, что значения этих двух функций также совпадают на указанных промежутках. Точки этих промежутков образуют всюду плотное множество на $[0, 1]$, и, значит, рассматриваемые функции совпадают всюду.

(с) Используя указанное разложение для ξ и независимость величин ξ_i , $i \geq 1$, получаем

$$\begin{aligned} E\xi^n &= \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{n_1, n_2, \dots, n_k > 0 \\ n_1 + n_2 + \dots + n_k = n}} \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k} \prod_{j=1}^k \frac{E\xi_{i_j}^{n_j}}{3^{i_j n_j}} = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{n_1, n_2, \dots, n_k > 0 \\ n_1 + n_2 + \dots + n_k = n}} \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k} \frac{1}{2^k} \frac{2^{n_1 + \dots + n_k}}{3^{i_1 n_1 + \dots + i_k n_k}}. \end{aligned}$$

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k} \frac{1}{3^{i_1 n_1 + \dots + i_k n_k}} &= \sum_{l_1, \dots, l_k \geq 1} \frac{1}{3^{l_1 \sum_{j=1}^k n_k + l_2 \sum_{j=2}^k n_k + \dots + l_k n_k}} = \\ &= \prod_{j=1}^k \left(\frac{1}{3^{\sum_{i=j}^k n_i}} + \frac{1}{3^{2 \sum_{i=j}^k n_i}} + \dots \right) = \prod_{j=1}^k \frac{3^{-\sum_{i=j}^k n_i}}{1 - 3^{-\sum_{i=j}^k n_i}} \end{aligned}$$

(рассматриваемые равенства справедливы в силу неотрицательности слагаемых). Таким образом, окончательно получаем

$$E\xi^n = \sum_{k=1}^n 2^{n-k} \sum_{\substack{n_1, n_2, \dots, n_k > 0 \\ n_1 + n_2 + \dots + n_k = n}} \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} \prod_{j=1}^k \frac{1}{3^{\sum_{i=j}^k n_i} - 1}. \quad \square$$

54. Пусть ξ_n , $n \geq 1$, — н. о. р. случайные величины, $P(\xi_1 = 1) = P(\xi_1 = -1) = 1/2$.

Из общих критериев сходимости рядов с независимыми слагаемыми следует, что ряд

$$\sum \frac{\xi_n}{n^\alpha}$$

сходится по распределению к некоторой случайной величине X_α тогда и только тогда, когда $\alpha > 1/2$. Установить, что X_α обязательно имеет плотность.

Решение. Мы докажем более общее утверждение:

случайная величина $X = \sum \lambda_n \xi_n$ (здесь $n \geq 1$) корректно определена при $\sum \lambda_n^2 < \infty$ и имеет плотность, когда

$$\lambda_n \ln \frac{1}{\lambda_n} = o\left(\sum_{k>n} \lambda_k^2\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

если (λ_n) — убывающая к нулю последовательность положительных чисел.

Сходимость ряда $\sum \lambda_n \xi_n$ п. н. следует из критерия Колмогорова. Характеристическая функция $X = \sum \lambda_n \xi_n$ есть не что иное, как

$$\varphi(t) = \prod_{n \geq 1} \cos \lambda_n t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Теперь достаточно установить, что $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)| dt = 2 \int_0^\infty |\varphi(t)| dt < \infty$, и воспользоваться формулой обращения для вычисления плотности. Замечая, что при $|t| \leq 1$ выполняется неравенство

$$\ln |\cos t| \leq \ln \left\{1 - \frac{t^2}{3}\right\} \leq -\frac{t^2}{3},$$

находим

$$|\varphi(t)| \leq \exp \left\{ -\frac{t^2}{3} \sum_{n: \lambda_n |t| < 1} \lambda_n^2 \right\}.$$

Считая, что $\lambda_1 < 1$, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\varphi(t)| dt &\leq \frac{1}{\lambda_1} + \sum_{n \geq 1} \int_{\lambda_n^{-1}}^{\lambda_{n+1}^{-1}} |\varphi(t)| dt \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda_1} + \sum_{n \geq 1} \int_{\lambda_n^{-1}}^\infty t \exp \left\{ -\frac{t^2}{3} \sum_{k>n} \lambda_k^2 \right\} dt \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda_1} + \sum_{n \geq 1} \frac{3}{2} \left[\sum_{k>n} \lambda_k^2 \right]^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{3\lambda_n^2} \sum_{k>n} \lambda_k^2 \right\}. \end{aligned}$$

По условию при достаточно больших n имеем

$$\begin{aligned} \left[\sum_{k>n} \lambda_k^2 \right]^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{3\lambda_n^2} \sum_{k>n} \lambda_k^2 \right\} &\leq \left\{ 3\lambda_n^2 \ln \frac{1}{\lambda_n} \right\}^{-1/2} \exp \left\{ -3 \ln \frac{1}{\lambda_n} \right\} = \\ &= \left\{ 3 \ln \frac{1}{\lambda_n} \right\}^{-1/2} \lambda_n^2, \end{aligned}$$

откуда уже следует, что $\int_0^\infty |\varphi(t)| dt < \infty$ и, значит, X имеет плотность. $\square$

55. Как доказано в В1.1.5.5, *полиномы Бернштейна*

$$B_n(x, f) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

дают равномерное приближение непрерывной функции $f = f(x)$ на отрезке $[0, 1]$. Если рассматривать не отрезок, а полупрямую $\mathbb{R}_+$, то аналогичным свойством обладают *ряды Саса—Мирокияна*

$$S_n(x, f) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!}.$$

А именно, если функция $f = f(x)$ непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}_+$, то

$$S_n(x, f) \rightarrow f(x), \quad n \rightarrow \infty,$$

равномерно на любом конечном отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$. Установить этот результат.

Решение. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — н. о. р. пуассоновские величины с параметром $x \geq 0$. Тогда $Z_n = X_1 + \dots + X_n$ ($n \geq 1$) есть пуассоновская величина с параметром nx . Следовательно,

$$S_n(x, f) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} = \mathbb{E} f\left(\frac{Z_n}{n}\right).$$

На любом конечном отрезке $[a, b]$ непрерывная функция $f = f(x)$ равномерно непрерывна, так что при всяком $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$ и

$$|f(x) - f(y)| \leq \delta(\varepsilon), \quad |x - y| \leq \varepsilon.$$

Для простоты считая, что функция f ограничена единицей, при $a \leq x \leq b$ получаем

$$\begin{aligned} |S_n(x, f) - f(x)| &\leq \left| \mathbb{E} f\left(\frac{Z_n}{n}\right) - f(x) \right| \leq \\ &\leq \mathbb{E} \left| f\left(\frac{Z_n}{n}\right) - f(x) \right| I\left(\left|\frac{Z_n}{n} - x\right| \leq \varepsilon\right) + 2\mathbb{P}\left(\left|\frac{Z_n}{n} - x\right| > \varepsilon\right) \leq \\ &\leq \delta(\varepsilon) + 2\mathbb{P}\left(\left|\frac{Z_n}{n} - x\right| > \varepsilon\right) \leq \delta(\varepsilon) + \frac{2\mathbb{E}|Z_n - nx|^2}{\varepsilon^2 n^2} = \\ &= \delta(\varepsilon) + \frac{2\mathbb{D}Z_n}{\varepsilon^2 n^2} = \delta(\varepsilon) + \frac{2x}{\varepsilon^2 n} \leq \delta(\varepsilon) + \frac{2|a| + 2|b|}{\varepsilon^2 n}. \end{aligned}$$

Отсюда уже легко вывести равномерную сходимость $S_n(x, f)$ к $f(x)$ на $[a, b]$ (для любого отрезка $[a, b]$). $\square$

Замечание. Вообще говоря, нельзя гарантировать равномерную сходимость $S_n(x, f)$ к $f(x)$ на всей полупрямой $\mathbb{R}_+$ (если $f(x)$ не имеет предела при $x \rightarrow \infty$). Убедимся в этом на следующем примере. Возьмем какую-нибудь четную на $\mathbb{R}$ периодическую функцию $f = f(x)$ с периодом единица. Например, пусть $f(x) = \cos(2\pi x)$.

Пусть Y_n — пуассоновская величина с параметром n^2 ($n \geq 1$). Тогда, как доказано выше (с учетом периодичности f),

$$|S_n(n, f) - f(n)| = \left| \mathbb{E} f\left(\frac{Y_n}{n}\right) - f(n) \right| = \left| \mathbb{E} f\left(\frac{Y_n - n^2}{n}\right) - 1 \right|.$$

Согласно центральной предельной теореме (см. теорему 3 из В1.III.3)

$$\frac{Y_n - n^2}{n} = \frac{Y_n - \mathbb{E}Y_n}{\sqrt{\mathbb{D}Y_n}} \xrightarrow{d} \xi \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

так что

$$\begin{aligned} |S_n(n, f) - f(n)| &= 1 - \mathbb{E} f\left(\frac{Y_n - n^2}{n}\right) \rightarrow \\ &\rightarrow 1 - \mathbb{E} f(\xi) = 1 - \mathbb{E} \cos(2\pi\xi) = 1 - e^{-2\pi^2} > 0. \end{aligned}$$

§ 11. Гильбертово пространство случайных величин с конечным вторым моментом

1. Пусть X, Y — независимые случайные величины, а $h = h(x, y)$ — борелевская функция, $\mathbb{E}|h(X, Y)|^2 < \infty$. Доказать, что п. н. имеет место представление

$$h(X, Y) = \mathbb{E}h(X, Y) + \sum_{m \geq 1} a_m f_m(X) + \sum_{n \geq 1} b_n g_n(Y) + \sum_{m, n \geq 1} c_{mn} f_m(X) g_n(Y)$$

для некоторых констант (a_m) , (b_n) и (c_{mn}) и некоторых ортонормированных систем $(f_m(X))$ и $(g_n(Y))$, $E f_n(X) = E g_m(Y) = 0$, $m, n \geq 1$. (Все рассматриваемые ряды сходятся в L^2 .) При этом

$$E|h(X, Y)|^2 = |Eh(X, Y)|^2 + \sum_{m \geq 1} a_m^2 + \sum_{n \geq 1} b_n^2 + \sum_{m, n \geq 1} c_{mn}^2.$$

Решение. Пусть $(f_n)_{n \geq 0}$ и $(g_m)_{m \geq 0}$ суть полные ортонормированные системы функций (т. е. образуют базис) в пространствах

$$L^2(X) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: E|f(X)|^2 < \infty\}$$

и

$$L^2(Y) = \{g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: E|g(Y)|^2 < \infty\}$$

относительно скалярных произведений $(f, F) = E f(X)F(X)$ и $(g, G) = E g(Y)G(Y)$, причем $f_0 \equiv 1$ и $g_0 \equiv 1$ (проверьте, что такие системы найдутся). При таком задании

$$E f_n(X) = 0, \quad E g_m(Y) = 0, \quad m, n \geq 1.$$

К тому же $(h_{mn})_{m, n \geq 0} = (f_m(x)g_n(y))_{m, n \geq 0}$ есть полная ортонормированная система функций в пространстве

$$L^2(X, Y) = \{h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: E|h(X, Y)|^2 < \infty\}$$

со скалярным произведением $(h, H) = E h(X, Y)H(X, Y)$. Действительно, ортонормированность указанных систем вытекает из независимости X и Y , так, например, при всех $m, n \geq 1$ имеем

$$E|f_m(X)g_n(Y)|^2 = E|f_m(X)|^2 E|g_n(Y)|^2 = 1.$$

Осталось проверить, что их линейные комбинации всюду плотны в $L^2(X, Y)$. Последнее вытекает из того, что индикатор $I_B(x, y)$ любого борелевского множества B из $\mathbb{R}^2$ можно приблизить произведением вида $f(x)g(y)$ (см. задачу II.12.7). Таким образом, любая такая величина $Z = h(X, Y)$, что $E|h(X, Y)|^2 < \infty$, разлагается в ряд Фурье

$$Z = \sum_{m, n \geq 0} (h, h_{mn}) f_m(X) g_n(Y),$$

сходящийся в $L^2 = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Этот ряд Фурье и дает искомое представление (при подстановке $f_0 \equiv g_0 \equiv 1$). $\square$

2. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — перестановочные случайные величины, т. е. совместное распределение каждой группы случайных величин, состоящей из j элементов с разными индексами $X_{i_1}, \dots, X_{i_j}$, зависит лишь от

j и не зависит от конкретного выбора значений $i_1, \dots, i_j$. Показать, что

$$DX_1 \geq \begin{cases} (n-1)|\operatorname{cov}(X_1, X_2)|, & \operatorname{cov}(X_1, X_2) < 0, \\ \operatorname{cov}(X_1, X_2), & \operatorname{cov}(X_1, X_2) \geq 0. \end{cases}$$

Для фиксированных ρ и σ^2 , удовлетворяющих неравенствам $\rho < 0$, $\sigma^2 + (n-1)\rho \geq 0$, построить такие гауссовские перестановочные величины $X_1, \dots, X_n$, что

$$EX_1 = 0, \quad DX_1 = \sigma^2, \quad \operatorname{cov}(X_1, X_2) = \rho.$$

Построить аналогичные примеры, предполагая, что $\rho \geq 0$, $\sigma^2 \geq \rho$.

Решение. Утверждение первой части задачи вытекает из соотношений

$$\begin{aligned} D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) &= nDX_1 + n(n-1)\operatorname{cov}(X_1, X_2) \geq 0, \\ \frac{D(X_1 - X_2)}{2} &\geq DX_1 - \operatorname{cov}(X_1, X_2) \geq 0. \end{aligned}$$

Перейдем ко второй части задачи. Рассмотрим случай $\rho < 0$. Построим вначале такие гауссовские перестановочные величины $\{Z_i\}_{i=1}^n$, что

$$EZ_1 = 0, \quad DZ_1 = n-1, \quad \operatorname{cov}(Z_1, Z_2) = -1.$$

Возьмем н. о. р. гауссовские величины $\{\xi_{ij}, 1 \leq i < j \leq n\}$, $\xi_{11} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Рассмотрим кососимметричную матрицу $U = (U_{ij})_{i,j=1}^n$, $U_{ij} = \xi_{ij}$, $i < j$, и определим Z_i , $1 \leq i \leq n$, как сумму по i -й строке матрицы U . Такие Z_i , $1 \leq i \leq n$, удовлетворяют всем нужным свойствам. Пусть, далее, $\{Y_i\}_{i=1}^{2n}$ — н. о. р. гауссовские величины, $Y_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Тогда искомые величины X_i , $1 \leq i \leq n$, можно задать равенством

$$X_i = \sqrt{\sigma^2 + (n-1)\rho} Y_i + \sqrt{-\rho} Z_i.$$

(Предполагается, что величины $\{Y_i\}_i = 1^{2n}$ не зависят от $\{Z_i\}_{i=1}^n$.) В случае $\rho \geq 0$ следует взять

$$X_i = \sqrt{\sigma^2 - \rho} Y_i + \sqrt{\rho} Y_{n+i}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad \square$$

3. Показать, что если $\xi = \text{l.i.m.} \xi_n$, то $\|\xi_n\| \rightarrow \|\xi\|$.

Решение. Утверждение следует из неравенства треугольника

$$\left| \|\xi\| - \|\xi_n\| \right| \leq \|\xi - \xi_n\|. \quad \square$$

4. Показать, что если $\xi = \text{l.i.m.} \xi_n$ и $\eta = \text{l.i.m.} \eta_n$, то $(\xi_n, \eta_n) \rightarrow (\xi, \eta)$.

Решение. Для вывода искомой сходимости нужно заметить, что

$$2(\xi_n, \eta_n) = \|\xi_n + \eta_n\|^2 - \|\xi_n\|^2 - \|\eta_n\|^2 \rightarrow \|\xi + \eta\|^2 - \|\xi\|^2 - \|\eta\|^2 = 2(\xi, \eta).$$

Последнее следует из предыдущей задачи, а также из того, что $\text{l.i.m.} (\xi_n + \eta_n) = \xi + \eta$. $\square$

5. Показать, что норма $\|\cdot\|$ удовлетворяет *равенству параллелограмма*:

$$\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2 = \frac{\|\xi + \eta\|^2}{2} + \frac{\|\xi - \eta\|^2}{2}.$$

Решение. Для вывода указанных соотношений оказывается полезной формула $\|\zeta\|^2 = (\zeta, \zeta)$. $\square$

6. Пусть $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ — семейство *ортогональных* случайных величин. Показать, что для них справедлива *теорема Пифагора*:

$$\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|^2.$$

Решение. Очевидно, что

$$\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \right|^2 = \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \xi_i^2 + \sum_{i \neq j} \mathbb{E} \xi_i \xi_j = \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \xi_i^2. \quad \square$$

7. Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — комплекснозначные случайные величины с конечными моментами второго порядка. Доказать *неравенство Селберга*

$$\sum_{i=1}^n \frac{|(\xi, \xi_i)|^2}{\sum_{j=1}^n |(\xi_i, \xi_j)|} \leq \mathbb{E} |\xi|^2,$$

из которого, в частности, вытекает *неравенство Бесселя*

$$\sum_{i=1}^n \frac{|(\xi, \xi_i)|^2}{\mathbb{E} |\xi_i|^2} \leq \mathbb{E} |\xi|^2,$$

справедливое для ортогональных случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$.

Решение. Для любых $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ по неравенству Коши—Буняковского имеем

$$\mathbb{E} |\xi|^2 \geq \frac{\left| \left(\xi, \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i \right) \right|^2}{\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i \right|^2} \geq \frac{\left| \sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_i (\xi, \xi_i) \right|^2}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\alpha_i \alpha_j| \cdot |(\xi_i, \xi_j)|} \geq \frac{\left| \sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_i (\xi, \xi_i) \right|^2}{\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \sum_{j=1}^n |(\xi_i, \xi_j)|},$$

где мы также учли, что

$$|\alpha_i \alpha_j| \leq \frac{|\alpha_i|^2 + |\alpha_j|^2}{2}.$$

Выбирая

$$\alpha_i = \frac{(\xi, \xi_i)}{\sum_{j=1}^n |(\xi_i, \xi_j)|},$$

приходим к искомому неравенству. $\square$

8. (См. [58].) Пусть X, Y, Z — комплекснозначные случайные величины с конечными вторыми моментами, причем $E|Z|^2 = 1$. Доказать следующий вариант *неравенства Блаттера* (см. [38]):

$$\left| (X, Z)(Z, Y) - \frac{(X, Y)}{2} \right| \leq \frac{\|X\| \|Y\|}{2}.$$

Вывести отсюда *неравенство Бруиджна*

$$|(X, Y)|^2 \leq \frac{EY^2}{2} (E|X|^2 + |EX^2|),$$

справедливое при $P(Y \in \mathbb{R}) = 1$.

Решение. По неравенству Коши—Буняковского

$$|(X - 2(X, Z)Z, Y)|^2 \leq E|X - 2(X, Z)Z|^2 \cdot E|Y|^2.$$

Для завершения доказательства достаточно воспользоваться соотношениями

$$(X - 2(X, Z)Z, Y) = (X, Y) - 2(X, Z)(Z, Y), \quad E|X - 2(X, Z)Z|^2 = E|X|^2.$$

Из неравенства Блаттера при $Y = \bar{X}$ и $P(Z \in \mathbb{R}) = 1$ следует, что

$$|(X, Z)|^2 = |(X, Z)(Z, \bar{X})| \leq \frac{\|X\| \|\bar{X}\|}{2} + \frac{|(X, \bar{X})|}{2} = \frac{E|X|^2 + |EX^2|}{2}.$$

Заменяя в последней оценке Z на $Y/\|Y\|$, получаем неравенство Бруиджна. $\square$

9. (*Лемма Шура.*) Пусть $c = c(x, y)$ — ограниченная борелевская функция на $\mathbb{R}^2$, а X, Y — независимые случайные величины, $EX^2 = EY^2 = 1$. Доказать, что

$$|Ec(X, Y)XY|^2 \leq \sup_x E|c(x, Y)| \sup_y E|c(X, y)|.$$

Решение. По неравенству Коши—Буняковского

$$|Ec(X, Y)XY|^2 \leq E|c(X, Y)|X^2 \cdot E|c(X, Y)|Y^2.$$

Кроме того, в силу теоремы Фубини

$$E|c(X, Y)|X^2 = E(x^2 E|c(x, Y)|)|_{x=X} \leq \sup_x E|c(x, Y)|EX^2 = \sup_x E|c(x, Y)|.$$

Аналогично устанавливается, что $E|c(X, Y)|Y^2 \leq \sup_y E|c(X, y)|$. $\square$

10. Пусть X, Y, Z — независимые случайные величины, а $f = f(x, y)$, $g = g(y, z)$, $h = h(z, x)$ — ограниченные борелевские функции на $\mathbb{R}^2$. Доказать, что

$$|Ef(X, Y)g(Y, Z)h(Z, X)|^2 \leq Ef^2(X, Y)Eg^2(Y, Z)Eh^2(Z, X).$$

Решение. Положим для краткости $\xi = f(X, Y)$, $\eta = g(Y, Z)$ и $\zeta = h(Z, X)$. Тогда (с учетом *условного* неравенства Коши—Буняковского и задачи II.7.14)

$$\begin{aligned} |E\xi\eta\zeta|^2 &= |E(\xi E[\eta\zeta|X, Y])|^2 \leq E\xi^2 E|E[\eta\zeta|X, Y]|^2 \leq \\ &\leq E\xi^2 E(E[\eta^2|X, Y] E[\zeta^2|X, Y]) = \\ &= Ef(X, Y)^2 E[(Eg(y, Z)^2)|_{y=Y} (Eh(Z, x)^2)|_{x=X}] = \\ &= Ef(X, Y)^2 E(Eg(y, Z)^2)|_{y=Y} \cdot E(Eh(Z, x)^2)|_{x=X} = \\ &= Ef^2(X, Y)Eg^2(Y, Z)Eh^2(Z, X). \end{aligned} \quad \square$$

11. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — ортогональные случайные величины и $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$.

(а) Показать, что если $\sum E\xi_n^2 < \infty$, то найдется такая случайная величина

$$S = \sum_n \xi_n = \text{l.i.m. } S_n,$$

что $ES^2 < \infty$, т. е. $\lim_n \|S_n - S\|^2 = \lim_n E|S_n - S|^2 = 0$.

(б) Пользуясь *неравенством Радемахера—Меньшова*

$$E \max_{m < k \leq m+n} |S_k - S_m|^2 \leq (\log n)^2 \sum_{i=m+1}^{m+n} E\xi_i^2,$$

где $\log x = \log_2 4x$ для $x > 0$, установить *теорему Радемахера—Меньшова*, утверждающую, что $S_n \rightarrow S$ п. н., если $\sum E\xi_n^2 \log^2 n < \infty$.

Решение. (а) Достаточно воспользоваться тем, что согласно задаче II.11.6 справедливо равенство

$$\|S_n - S_m\|^2 = \sum_{i=m+1}^n \|\xi_i\|^2, \quad m < n.$$

(b) По неравенству Коши—Буняковского

$$\left[\mathbb{E} \sum_{n=0}^{\infty} |S_{2^{n+1}} - S_{2^n}|^2 \right] \leq C \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 \mathbb{E} |S_{2^{n+1}} - S_{2^n}|^2 = \\ = C \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 \sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \mathbb{E} \xi_i^2 < \infty,$$

где $C = \sum_{n \geq 1} n^{-2}$. Следовательно, $\sum_{n=0}^{\infty} |S_{2^{n+1}} - S_{2^n}|$ сходится с вероятностью единица, и с учетом п. (a) заключаем, что $S_{2^n} \rightarrow S$ п. н. Кроме того, для всех $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{P} \left(\max_{2^n < k \leq 2^{n+1}} |S_k - S_{2^n}| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n \geq 0} \mathbb{E} \max_{2^n < k \leq 2^{n+1}} |S_k - S_{2^n}|^2 \leq \\ \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n \geq 0} (n+2)^2 \sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \mathbb{E} \xi_i^2 < \infty,$$

что (благодаря лемме Бореля—Кантелли) гарантирует сходимость $\max_{2^n < k \leq 2^{n+1}} |S_k - S_{2^n}| \rightarrow 0$ п. н. Теперь легко установить, что $S_n \rightarrow S$ п. н. $\square$

12. Показать, что функции Радемахера R_n могут быть определены следующим образом:

$$R_n(x) = \text{sign}(\sin 2^n \pi x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Решение. Утверждение устанавливается элементарной проверкой. $\square$

13. Доказать, что для $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и любой σ -подалгебры $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ справедливо неравенство

$$\|\xi\| \geq \|\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})\|,$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\xi = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})$ п. н.

Решение. Искомое неравенство следует из того, что

$$\mathbb{E} \xi^2 - \mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})]^2 = \mathbb{E}[\xi - \mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})]^2. \quad \square$$

14. Доказать, что если $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mathbb{E}(X|Y) = Y$, $\mathbb{E}(Y|X) = X$, то $X = Y$ п. н.

Решение. По свойству повторных математических ожиданий

$$\mathbb{E}(X - Y)^2 = \mathbb{E}[X - \mathbb{E}(Y|X)]X - \mathbb{E}[\mathbb{E}(X|Y) - Y]Y = 0. \quad \square$$

15. Пусть X, Y — независимые случайные величины, $EX^2, EY^2 < \infty$. Показать, что для всякой такой величины Z , что $EZ^2 < \infty$ и $EZ = 0$, выполняется неравенство

$$E|E(Z|X)|^2 + E|E(Z|Y)|^2 \leq EZ^2.$$

Решение. Случайная величина $E(Z|X)$ есть проекция Z на линейное подпространство (в гильбертовом пространстве L^2)

$$L_X^2 = \{f(X): f \text{ — борелевская функция, } E|f(X)|^2 < \infty, \ Ef(X) = 0\}$$

(мы учли, что $EE(Z|X) = EZ = 0$). Аналогично $E(Z|Y)$ — это проекция Z на линейное подпространство

$$L_Y^2 = \{g(Y): g \text{ — борелевская функция, } E|g(Y)|^2 < \infty, \ Eg(Y) = 0\}.$$

Пространства L_X^2 и L_Y^2 взаимно ортогональны, поэтому сумма квадратов длин проекций Z на L_X^2 и L_Y^2 не превосходит квадрата длины Z (т. е. EZ^2). Последнее равносильно искомому неравенству. $\square$

16. Даны три последовательности $(\mathcal{E}_n)$, $(\mathcal{F}_n)$ и $(\mathcal{G}_n)$ σ -подалгебр алгебры $\mathcal{F}$. Пусть ξ — случайная величина, $E\xi^2 < \infty$, и предположим, что для каждого n выполняются условия

$$\mathcal{E}_n \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{G}_n \quad \text{и} \quad \text{l.i.m. } E(\xi|\mathcal{E}_n) = \eta, \quad \text{l.i.m. } E(\xi|\mathcal{G}_n) = \eta.$$

Доказать, что тогда и $\text{l.i.m. } E(\xi|\mathcal{F}_n) = \eta$.

Решение. Искомое соотношение обеспечивается оценкой

$$E[E(\xi|\mathcal{F}_n) - E(\xi|\mathcal{E}_n)]^2 \leq E[E(\xi|\mathcal{G}_n) - E(\xi|\mathcal{E}_n)]^2. \quad \square$$

17. Пусть $f = f(x)$ — борелевская функция, определенная на $\mathbb{R}_+$ и такая, что

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{-\lambda x} f(x) dx = 0 \quad \text{для всех } \lambda \in \mathbb{N}.$$

Показать, что $f = 0$ п. н. относительно меры Лебега.

Решение. Сделаем замену переменных

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{-\lambda x} f(x) dx = \int_0^1 z^{\lambda-1} g(z) dz, \quad g(z) = f(-\ln z).$$

Функция $g(z)$ ортогональна на отрезке $[0, 1]$ всем многочленам. Многочлены образуют плотное множество в пространстве $C[0, 1]$, которое, в свою очередь, образует всюду плотное множество в

$$L^2([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \mu),$$

где μ — мера Лебега. Отсюда заключаем, что $g = 0$, а значит, $f = 0$ п. н. относительно меры Лебега. $\square$

18. Пусть случайная величина ξ равномерно распределена на $[-1, 1]$. Показать, что

(а) оптимальные (в среднеквадратическом смысле) оценки ξ^2 по ξ и ξ по ξ^2 задаются соответственно формулами

$$E(\xi^2|\xi) = \xi^2, \quad E(\xi|\xi^2) = 0;$$

(б) соответствующие оптимальные линейные оценки определяются формулами

$$\hat{E}(\xi^2|\xi) = 1/3, \quad \hat{E}(\xi|\xi^2) = 0.$$

Решение. (а) Поскольку величина ξ^2 измерима относительно $\sigma(\xi)$, получаем, что $E(\xi^2|\xi) = \xi^2$. Величина ξ симметрична, поэтому ξ^2 не зависит от $\text{sign } \xi$, $E(\text{sign } \xi) = 0$ и $E(\xi|\xi^2) = |\xi|E(\text{sign } \xi|\xi^2) = 0$.

(б) Оптимальная линейная оценка $\hat{E}(\eta|\xi) = a^* + b^*\xi$ определяется из экстремальной задачи

$$E(\eta - a - b\xi)^2 \rightarrow \min_{a,b},$$

т. е. оптимальные значения имеют вид

$$a^* = E\eta - b^*E\xi, \quad b^* = \text{cov}(\xi, \eta)/D\xi.$$

Прямым подсчетом a^* и b^* получаем указанные соотношения. $\square$

19. Пусть $Y, X_1, X_2, \dots$ — случайные величины в L^2 . Пусть также X_i ($i \geq 1$) не лежит в замыкании линейной оболочки в L^2 величин X_j , $j \neq i$ (условие релевантности фактора X_i). Определим $\beta_{1p}, \dots, \beta_{pp}$ как решение следующей задачи прогноза:

$$E(Y - b_1X_1 - \dots - b_pX_p)^2 \rightarrow \min,$$

где $\min$ берется по всем $b_1, \dots, b_p \in \mathbb{R}$.

(а) Доказать, что при каждом i выполняется условие

$$\beta_{ip} \rightarrow \beta_i, \quad p \rightarrow \infty,$$

для некоторого $\beta_i \in \mathbb{R}$.

(б) Пункт (а) позволяет ввести формальный ряд $\langle \sum_{i \geq 1} \beta_i X_i \rangle$, отвечающий проекции величины Y на замыкание в L^2 линейной оболочки величин $X_1, X_2, \dots$. Предложить метод восстановления этой проекции по указанному формальному ряду.

(с) Найти β_i в случае, когда $Y = X_0$ и $X_{i-1} = e_{i-1} + e_i$, $i \geq 1$, для некоторых н. о. р. случайных величин $e_0, e_1, \dots$, $Ee_0 = 0$ и $Ee_0^2 = 1$.

Решение. (а) В силу выпуклости функции

$$f(b_1, \dots, b_p) = E(Y - b_1X_1 - \dots - b_pX_p)^2$$

коэффициенты β_{ip} можно найти из условий первого порядка ($f' = 0$):

$$(\beta_{1p}, \dots, \beta_{pp}) = (E\bar{X}_p\bar{X}_p^\top)^{-1}E\bar{X}_pY,$$

где $\bar{X}_p = (X_1, \dots, X_p)$ (матрица $E\bar{X}\bar{X}^\top$ невырождена, иначе бы нарушалось условие релевантности каждого фактора).

Обозначим через $P(Z; U, V, \dots)$ проекцию величины Z в L^2 на замыкание линейной оболочки величин $U, V, \dots$. При таком определении $P(Y; X_1, \dots, X_p)$ есть не что иное, как $\beta_{1p}X_1 + \dots + \beta_{pp}X_p$. Пусть, далее,

$$R_{ip} = X_i - P(X_i; X_j, j \neq i, j \leq p) \quad \text{и} \quad R_i = X_i - P(X_i; X_j, j \neq i).$$

Имеем (с учетом ортогональности R_{ip} и $(X_j, j \neq i, j \leq p)$)

$$\begin{aligned} P(Y; X_1, \dots, X_p) &= P(Y; R_{ip}, X_j, j \neq i, j \leq p) = \\ &= P(Y; R_{ip}) + P(Y; X_j, j \neq i, j \leq p) = \\ &= \frac{EYR_{ip}}{ER_{ip}^2} R_{ip} + P(Y; X_j, j \neq i, j \leq p) = \beta_{1p}X_1 + \dots + \beta_{pp}X_p. \end{aligned}$$

Другими словами, $\beta_{ip} = EYR_{ip}/ER_{ip}^2$. При $p \rightarrow \infty$ имеем

$$E|R_{ip} - R_i|^2 = E|P(X_i; X_j, j \neq i, j \leq p) - P(X_i; X_j, j \neq i)|^2 \rightarrow 0,$$

и по условию $ER_i^2 > 0$, поэтому

$$\beta_{ip} = \frac{EYR_{ip}}{ER_{ip}^2} \rightarrow \frac{EYR_i}{ER_i^2} = \beta_i.$$

(b) Метод состоит в следующем. Сначала следует ортонормировать систему $(X_i)_{i \geq 1}$ по методу Грама—Шмидта так, чтобы в получившейся ортонормированной системе $(Z_i)_{i \geq 1}$ каждое Z_i представлялось в виде $\alpha_{1i}X_1 + \dots + \alpha_{ii}X_i$, а затем уже найти искомую проекцию $\sum_{i \geq 1} \gamma_i Z_i$, вычисляя γ_i по формуле $\gamma_i = \lim_p \gamma_{ip}$, где $(\gamma_{1p}, \dots, \gamma_{pp})$ — решение треугольной системы линейных уравнений

$$\gamma_{ip}\alpha_{ii} + \gamma_{(i+1)p}\alpha_{i(i+1)} + \gamma_{pp}\alpha_{ip} = \beta_i, \quad 1 \leq i \leq p.$$

(с) Интуитивный ответ выглядит следующим образом:

$$Y = e_0 + e_1 = e_0 + X_1 - e_2 = e_0 + X_1 - X_2 + e_3 = \dots$$

$$\dots = \ll \sum_{i \geq 1} (-1)^{i+1} X_i \gg + e_\infty + e_0,$$

где величина e_∞ ортогональна e_0 и всем $X_1, X_2, \dots$. Докажем справедливость этого представления. Ортогонализуем систему из X_i :

$$Z_1 = X_1, \quad \mathbb{E}Z_1^2 = 2,$$

$$Z_2 = X_2 - \frac{\mathbb{E}Z_1 X_2}{\mathbb{E}Z_1^2} Z_1 = X_2 - \frac{\mathbb{E}X_1 X_2}{2} X_1 = X_2 - \frac{X_1}{2}, \quad \mathbb{E}Z_2^2 = \frac{3}{2},$$

$$Z_3 = X_3 - \frac{\mathbb{E}Z_2 X_3}{\mathbb{E}Z_2^2} Z_2 = X_3 - \frac{\mathbb{E}X_2 X_3}{\mathbb{E}Z_2^2} Z_2 = X_3 - \frac{2Z_2}{3} = X_3 - \frac{2X_2}{3} + \frac{X_1}{3},$$

$$\mathbb{E}Z_3^2 = \mathbb{E}X_3^2 - \mathbb{E}\left(\frac{2Z_2}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}.$$

$$Z_4 = X_4 - \frac{\mathbb{E}Z_3 X_4}{\mathbb{E}Z_3^2} Z_3 = X_4 - \frac{\mathbb{E}X_3 X_4}{\mathbb{E}Z_3^2} Z_3 = X_4 - \frac{3Z_3}{4} = X_4 - \frac{3X_3}{4} + \frac{2X_2}{4} - \frac{X_1}{4},$$

$$\dots$$

$$Z_n = X_n - \frac{(n-1)X_{n-1}}{n} + \frac{(n-2)X_{n-2}}{n} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{X_1}{n}, \quad \mathbb{E}Z_n^2 = \frac{n+1}{n}, \dots$$

(мы учли, что $\mathbb{E}X_n Z_i = \mathbb{E}X_n X_i = 0$ при $i \leq n-2$). Проекцию Y на $(X_n)_{n \geq 1}$ теперь можно определить рядом Фурье

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\mathbb{E}YZ_n}{\mathbb{E}Z_n^2} Z_n = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)} \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{n-i} i}{n} X_i.$$

Переставляя знаки суммы в последнем выражении, находим коэффициенты β_i (именно так и следует искать β_i , как было показано в п. (а)):

$$\beta_i = i \sum_{n=i}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-i-1}}{n(n+1)} = (-1)^{i+1} i \sum_{n=i}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right] = (-1)^{i+1}. \quad \square$$

§ 12. Характеристические функции

1. Пусть X — такая случайная величина, что $\mathbb{E}e^{sX} < \infty$, $s \in \mathbb{R}$ и

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathbb{E}e^{(s+it)X}| dt < \infty, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Последнее при $s = 0$ гарантирует наличие у X плотности $f = f(x)$. В этих условиях предложить какой-нибудь способ получения верхних оценок для f на $\mathbb{R}$.

Решение. Конечность Ee^{sX} эквивалентна тому, что функция $e^{sx}f(x)$ задает плотность некоторой конечной меры на $\mathbb{R}$, отвечающую характеристической функции $Ee^{(s+it)X}$. Поэтому по формуле обращения

$$e^{sx}f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} Ee^{(s+it)X} dt.$$

Следовательно,

$$f(x) \leq \inf_s \frac{e^{-sx}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |Ee^{(s+it)X}| dt. \quad \square$$

Замечание. С помощью предложенной верхней оценки $f = f(x)$ в работе [89] (см. также [27]) получена весьма точная оценка плотности $f = f(x)$ случайного гармонического ряда $X = \sum \pm \frac{1}{n}$ (знаки $+$ и $-$ выбираются равновероятно и независимо для разных n) вида

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\ln f(x)}{e^{|x|}} = -\frac{e^{2\gamma}\pi}{4},$$

где $\gamma = \lim \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right]$ — константа Эйлера. Из этого можно вывести, что при случайной расстановке знаков перед членами гармонического ряда практически невозможно получить большое число.

2. Пусть X — случайная величина с плотностью $f = f(x)$ и характеристической функцией $\varphi = \varphi(t)$. Доказать формулу суммирования Пуассона

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n),$$

предполагая для простоты, что $X \stackrel{d}{=} -X$ и ряд

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$$

задает дифференцируемую в нуле функцию (данный ряд сходится в L^1 на любом конечном отрезке).

Подбирая подходящим образом величину X , установить следующее тождество:

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi}{t}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi t}, \quad t > 0,$$

которое для *тета-функции Якоби*

$$\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi t}$$

принимает вид $\sqrt{t}\theta(t) = \theta(t^{-1})$, $t > 0$.

Решение. В силу симметричности X имеем $\varphi(t) = \varphi(-t)$, $t > 0$, поэтому предел

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} \sum_{n=-M}^N \varphi(2\pi n)$$

существует тогда и только тогда, когда существует предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \varphi(2\pi n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^N \varphi(2\pi n) \right].$$

По определению характеристической функции $\varphi(t)$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N \varphi(2\pi n) &= \sum_{n=-N}^N \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi nx} f(x) dx = \sum_{n=-N}^N \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_k^{k+1} e^{i2\pi nx} f(x) dx = \\ &= \sum_{n=-N}^N \int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi n(x+k)} f(x+k) dx = \\ &= \sum_{n=-N}^N \int_0^1 e^{i2\pi nx} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k) dx = \int_0^1 \sum_{n=-N}^N e^{i2\pi nx} g(x) dx = \\ &= g(0) + \int_0^1 \frac{\sin(2N+1)\pi x}{\sin \pi x} [g(x) - g(0)] dx, \end{aligned}$$

где мы также использовали то, что

$$\sum_{n=-N}^N e^{i2\pi nx} = 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos 2\pi nx.$$

Функция $g(x)$ является периодической (с периодом 1) и дифференцируемой в нуле. Поэтому $g(0) = g(1)$ и

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{\sin \pi x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{\pi x} = \frac{g'(0)}{\pi}, \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(0)}{\sin \pi x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{\pi(1-x)} = -\frac{g'(1)}{\pi} = -\frac{g'(0)}{\pi}. \end{aligned}$$

Следовательно, функция

$$h(x) = \frac{g(x) - g(0)}{\sin \pi x}$$

абсолютно интегрируема. В силу задачи П.12.33 имеем

$$\int_0^1 \sin(2N+1)\pi x \cdot h(x) dx \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует требуемая формула суммирования Пуассона.

Для вывода искомого соотношения для $\theta = \theta(t)$, $t > 0$, надо взять $X \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{t}{2\pi}\right)$. Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi}{t}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi t}. \quad \square$$

3. (См. [57].) Доказать *теорему Марцинкевича*
Функция $\varphi(t) = e^{P(t)}$ с многочленом $P(t)$ может быть характеристической только в том случае, если $\deg P(t)$ не больше двух.

Решение. Если $e^{P(t)} = \mathbb{E}e^{itX}$, $t \in \mathbb{R}$, для некоторой случайной величины X , то $e^{P(-iz)} = \mathbb{E}e^{zX}$, $z \in \mathbb{C}$. Последнее нетрудно установить, проверив вначале, что у X имеются моменты всех порядков (как производные функции $e^{P(t)}$ в нуле с точностью до постоянного множителя). При этом ряд

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}X^n}{n!} z^n$$

всегда будет сходиться и задавать $\mathbb{E}e^{zX} = e^{P(-iz)}$.

Заметим, что $e^{P(-iz)} = \mathbb{E}e^{zX}$ есть действительное число, если $z \in \mathbb{R}$. Тем самым $P(-iz) = \sum_{k=1}^d a_k z^k$ — многочлен с действительными коэффициентами a_k (здесь $d = \deg P$, $a_d \neq 0$ и $P(0) = 0$). Элементарное неравенство

$$\operatorname{Re} \sum_{k=1}^d a_k (s + it)^k = \ln |\mathbb{E}e^{(s+it)X}| \leq \ln \mathbb{E}|e^{(s+it)X}| = \ln \mathbb{E}e^{sX} = \sum_{k=1}^d a_k s^k,$$

справедливое при $s, t \in \mathbb{R}$, в полярных координатах записывается в виде

$$\sum_{k=1}^d a_k r^k \cos k\theta \leq \sum_{k=0}^d a_k r^k \cos^k \theta,$$

где $r \geq 0$ и $\theta \in [0, 2\pi)$. Деля на r^d и затем переходя к пределу при $r \rightarrow \infty$, получаем, что

$$a_d \cos d\theta \leq a_d \cos^d \theta.$$

Рассматривая разложение $\cos x$ в окрестности нуля, получаем, что при малых θ выполняется неравенство

$$a_d \left(1 - \frac{d^2 \theta^2}{2}\right) \leq a_d \left(1 - d \frac{\theta^2}{2}\right),$$

следовательно, $a_d > 0$ (если $d > 1$), и, значит, $\cos d\theta \leq \cos^d \theta$. В частности, при $\theta = 2\pi/d$ выполняется неравенство

$$1 \leq \cos^d \frac{2\pi}{d}.$$

Это может быть только в двух случаях: $d = 1$ и $d = 2$. $\square$

4. Если в окрестности нуля характеристическая функция $\varphi = \varphi(t)$ совпадает с некоторой целой функцией $f = f(t)$, т. е. с функцией, разлагающейся на $\mathbb{R}$ в ряд $\sum_{n \geq 0} c_n t^n$, $c_n \in \mathbb{C}$, то $\varphi \equiv f$ на $\mathbb{R}$. Доказать это утверждение.

Замечание. Данное утверждение в ряде случаев позволяет сводить вычисление характеристических функций на $\mathbb{R}$ к некоторой окрестности нуля. Выбирая достаточно малую окрестность, можно добиться, чтобы в ней рассматриваемые функции были отличны от нуля, и тем самым можно однозначно определить их логарифмы граничным условием в нуле.

Решение. Коэффициенты c_n с необходимостью совпадают с

$$\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} = \frac{i^n \mathbf{E} X^n}{n!},$$

где X — случайная величина с характеристической функцией φ . Следовательно, ряд

$$\sum_{k \geq 0} \frac{i^k \mathbf{E} X^k}{k!} t^k$$

сходится на $\mathbb{R}$. К тому же для всех $n \geq 1$ имеем

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{i^k \mathbf{E} X^k}{k!} t^k + R_n(t) t^{2n},$$

где

$$|R(t)| \leq \frac{3 \mathbf{E} X^{2n}}{(2n)!}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем, что на $\mathbb{R}$ справедливо соотношение

$$\varphi(t) = \sum_{k \geq 0} \frac{i^k \mathbb{E} X^k}{k!} t^k = \sum_{n \geq 0} c_n t^n = f(t). \quad \square$$

5. Пусть X и Y — независимые случайные величины, $f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$, $g(x) = g_1(x) + i g_2(x)$, где $f_k(x)$, $g_k(x)$ — борелевские функции, $k = 1, 2$. Показать, что если $\mathbb{E}|f(X)| < \infty$, $\mathbb{E}|g(Y)| < \infty$, то

$$\mathbb{E}|f(X)g(Y)| < \infty \quad \text{и} \quad \mathbb{E}f(X)g(Y) = \mathbb{E}f(X) \cdot \mathbb{E}g(Y).$$

Замечание. По определению если $h(x) = u(x) + i v(x)$, где $u(x)$, $v(x)$ — борелевские функции со значениями в $\mathbb{R}$, то

$$\mathbb{E}h(X) = \mathbb{E}u(X) + i \mathbb{E}v(X), \quad \mathbb{E}|h(X)| = \mathbb{E}\sqrt{u^2(X) + v^2(X)}.$$

Решение. Утверждение следует из аналогичного результата для борелевских функций $f(x)$ и $g(x)$ со значениями в $\mathbb{R}$ (см. задачи II.5.4 и II.6.9), а также из того, что $(a + ib)(c + id) = ac - bd + i(ad + bc)$ для всех $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. $\square$

6. Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ и $\mathbb{E}\|X\|^n < \infty$, где $\|X\| = \sqrt{\sum X_i^2}$. Показать, что

$$\varphi(t) = \mathbb{E}e^{i(t, X)} = \sum_{k=0}^n \frac{i^k \mathbb{E}(t, X)^k}{k!} + o(1) \cdot \|t\|^n, \quad \|t\| \rightarrow 0,$$

где $t \in \mathbb{R}^n$.

Решение. Разлагая $\cos x$ и $\sin x$ в сумму степеней x с остаточным членом в форме Тейлора, можно получить различные верхние оценки модуля разности

$$\left| e^{ix} - \sum_{k=0}^n \frac{i^k x^k}{k!} \right|,$$

справедливые для всякого вещественного x . Например, оценить сверху величинами $3|x|^{n+1}$, $3|x|^n$ и, значит, $3|x|^n \cdot |x| \wedge 1$. Но тогда

$$\begin{aligned} \left| \varphi(t) - \sum_{k=0}^n \frac{i^k \mathbb{E}(t, X)^k}{k!} \right| &\leq 3\mathbb{E}[|(t, X)|^n \cdot |(t, X)| \wedge 1] \leq \\ &\leq 3\|t\|^n \mathbb{E}[\|X\|^n \cdot |(t, X)| \wedge 1]. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что $\mathbb{E}[\|X\|^n \cdot |(t, X)| \wedge 1] \rightarrow 0$ при $\|t\| \rightarrow 0$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости. $\square$

7. Пусть μ и ν — две вероятностные меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, причем такие, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(t,x)} d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(t,x)} d\nu$$

для всех $t \in \mathbb{R}^n$. Доказать, что $\mu = \nu$.

Решение. Меры μ и ν на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ определяются своими значениями на «прямоугольниках» вида $(a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n]$. Поэтому достаточно доказать равенство $\mu = \nu$ только на этих множествах.

Заметим теперь, что мера любого «прямоугольника» $(a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n]$ может быть получена как предел интегралов ограниченных непрерывных функций вида

$$f_\varepsilon(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^n \varphi_\varepsilon(x_j, a_j, b_j)$$

при $\varepsilon \downarrow 0$, где при $0 < \varepsilon < b - a$ непрерывная по $x \in \mathbb{R}$ функция $\varphi_\varepsilon(x, a, b)$ задается так: она равна нулю при $x > b + \varepsilon$ и $x < a$, единице при $x \in [a + \varepsilon, b]$ и является линейной на оставшихся промежутках.

Воспользуемся следующим фундаментальным результатом (вытекающим из теоремы Стоуна—Вейрштрасса): всякая непрерывная на отрезке $[-\pi K, \pi K]$ функция $f = f(x)$ может быть равномерно приближена на этом отрезке линейными комбинациями тригонометрических экспонент вида $e^{ikx/K}$, $k = 1, 2, \dots$. Таким образом, при каждом $1 \leq j \leq n$ справедливо неравенство

$$\sup_{|x_j| \leq \pi K} |\varphi_\varepsilon(x_j, a_j, b_j) - L_j(x_j, \varepsilon)| \leq \varepsilon,$$

где $L_j(x_j, \varepsilon)$ — указанная линейная комбинация экспонент. Рассматривая разложение

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^n \varphi_\varepsilon(x_j, a_j, b_j) - L_1(x_1, \varepsilon) \prod_{j=2}^n \varphi_\varepsilon(x_j, a_j, b_j) + \\ + L_1(x_1, \varepsilon) \prod_{j=2}^n \varphi_\varepsilon(x_j, a_j, b_j) - \dots - \prod_{j=1}^n L_j(x_j, \varepsilon) \end{aligned}$$

и учитывая, что функция φ_ε ограничена единицей и, значит, L_j ограничена величиной $1 + \varepsilon$, получаем, что на $[-\pi K, \pi K]^n$ выполняется неравенство

$$\left| f_\varepsilon(x_1, \dots, x_n) - \prod_{j=1}^n L_j(x_j, \varepsilon) \right| \leq n(1 + \varepsilon)^n \varepsilon.$$

По условию задачи

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n L_j(x_j, \varepsilon) d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n L_j(x_j, \varepsilon) d\nu.$$

Функция $\prod_{j=1}^n L_j(x_j, \varepsilon)$ ограничена на $[-\pi K, \pi K]^n$ (величиной $(1 + \varepsilon)^n$) и является периодической на $\mathbb{R}^n$ по каждому x_j (с периодом $2\pi K$), следовательно, она ограничена на $\mathbb{R}^n$.

Итак, комбинируя полученные оценки, заключаем, что

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon d\mu - \int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon d\nu \right| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon d\mu - \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n L_j(x_j, \varepsilon) d\mu \right| + \\ &+ \left| \int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon d\nu - \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n L_j(x_j, \varepsilon) d\nu \right| \leq \\ &\leq 2n(1 + \varepsilon)^n \varepsilon + \int_{\mathbb{R}^n \setminus [-\pi K, \pi K]^n} \left| f_\varepsilon - \prod_{j=1}^n L_j(x_j, \varepsilon) \right| d\mu + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n \setminus [-\pi K, \pi K]^n} \left| f_\varepsilon - \prod_{j=1}^n L_j(x_j, \varepsilon) \right| d\nu \leq \\ &\leq 2n(1 + \varepsilon)^n \varepsilon + 2(1 + \varepsilon)^n \int_{\mathbb{R}^n \setminus [-\pi K, \pi K]^n} d\mu + 2(1 + \varepsilon)^n \int_{\mathbb{R}^n \setminus [-\pi K, \pi K]^n} d\nu. \end{aligned}$$

Выбирая достаточно большое K , мы можем гарантировать, что

$$\mu(\mathbb{R}^n \setminus [-\pi K, \pi K]^n) + \nu(\mathbb{R}^n \setminus [-\pi K, \pi K]^n) \leq \varepsilon,$$

и, значит,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon d\mu - \int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon d\nu \right| \leq (2n + 4)(1 + \varepsilon)^n \varepsilon.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем равенство $\mu(\Pi) = \nu(\Pi)$ для произвольного фиксированного «прямоугольника» $\Pi = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n]$, откуда уже следует, что $\mu = \nu$. $\square$

8. Пусть $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ — две характеристические функции некоторых случайных величин X и Y .

(а) Выяснить, что может означать равенство

$$f(\varphi(t)) = g(\psi(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

для некоторых аналитических в круге $B_r = \{x: |x| < r\}$, $r > 1$, функций $f = f(x)$ и $g = g(x)$ в терминах распределений X и Y .

(b) Предположим, что $\phi = \phi(t)$ — характеристическая функция случайной величины Z , $P(Z \leq 0) = 1$. Пусть также $P(Y > 0) = 1$. Выяснить, что может означать равенство

$$f(\varphi(t)) = g(\psi(t)) + h(\phi(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

для некоторых аналитических в круге $B_r = \{x: |x| < r\}$, $r > 1$, функций $f = f(x)$, $g = g(x)$ и $h = h(x)$ для распределений X и Y .

Решение. Пусть при $x \in B_r$ имеют место разложения

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n x^n, \quad h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n x^n.$$

(a) Указанное в задаче равенство переписывается в виде

$$\sum_{n: f_n \geq 0} f_n [\varphi(t)]^n - \sum_{n: g_n < 0} g_n [\psi(t)]^n = - \sum_{n: f_n < 0} f_n [\varphi(t)]^n + \sum_{n: g_n \geq 0} g_n [\psi(t)]^n$$

или

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\nu;$$

здесь меры μ и ν задаются следующим образом (при $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$):

$$\mu(B) = \sum_{n: f_n \geq 0} f_n P\left(\sum_{i=1}^n X_i \in B\right) - \sum_{n: g_n < 0} g_n P\left(\sum_{i=1}^n Y_i \in B\right),$$

где $X_1, X_2, \dots$ и $Y_1, Y_2, \dots$ — независимые копии величин X и Y соответственно. Меры μ и ν с необходимостью являются конечными мерами, поскольку

$$\mu(\mathbb{R}) + \nu(\mathbb{R}) = \sum_{n \geq 1} (|f_n| + |g_n|) < \infty$$

(последний ряд сходится в силу конечности сумм $\sum_{n \geq 1} f_n (r+1)^n 2^{-n}$ и $\sum_{n \geq 1} g_n (r+1)^n 2^{-n}$, равных $f((r+1)/2)$ и $g((r+1)/2)$ соответственно).

Таким образом, $\mu = \nu$ (см. задачу II.12.7). $\square$

9. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — н. о. р. случайные величины с характеристической функцией $\varphi = \varphi(t)$, а $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \geq 1$. Обозначим

$$\tau = \inf\{n \geq 1: S_n > 0\}.$$

Установить, что

$$1 - \mathbb{E} e^{itS_\tau} s^\tau = \exp \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathbb{E} e^{itS_n} I(S_n > 0) \right\}.$$

Доказательство провести по следующим шагам.

(а) Получить соотношение, связывающее $\varphi(t)$,

$$\psi(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} s^{n-1} \mathbb{E} e^{itS_n} I(\tau = n) \quad \text{и} \quad \phi(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} s^{n-1} \mathbb{E} e^{itS_n} I(\tau > n),$$

где $|s| < 1$ и $t \in \mathbb{R}$.

(б) Вывести искомое соотношение, применяя те же рассуждения, что и в задаче II.12.8(б).

Решение. Поскольку $\{\tau \geq n\} \in \sigma(X_1, \dots, X_{n-1})$ при $n > 1$ и $\{\tau \geq 1\} = \Omega$, случайный вектор $(S_{n-1}, I(\tau \geq n))$ не зависит от величины X_n . Следовательно,

$$\begin{aligned} \psi(s, t) + \phi(s, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} s^{n-1} \mathbb{E} e^{itS_n} I(\tau \geq n) = \\ &= \varphi(t) \sum_{n=1}^{\infty} s^{n-1} \mathbb{E} e^{itS_{n-1}} I(\tau > n-1) = \varphi(t)[1 + s\phi(s, t)] \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\ln[1 - s\varphi(t)] = \ln[1 - s\psi(s, t)] - \ln[1 + s\phi(s, t)].$$

Функции $\psi(s, t)$ и $\phi(s, t)$ являются характеристическими функциями конечных мер

$$\mu(B) = \sum_{n=1}^{\infty} s^{n-1} \mathbb{P}(S_n \in B, \tau = n)$$

и

$$\nu(B) = \sum_{n=1}^{\infty} s^{n-1} \mathbb{P}(S_n \in B, \tau > n), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

При этом мера μ сосредоточена на $\{x: x > 0\}$, а мера ν — на $\{x: x \leq 0\}$. Рассуждая, как при решении задачи II.12.8(б), при достаточно маленьких s ($|s| < \varepsilon$) получаем

$$\sum_{n \geq 1} \frac{s^n}{n} \mathbb{E} e^{itS_n} I(S_n > 0) = \ln[1 - s\psi(s, t)],$$

или

$$1 - \mathbb{E} e^{itS_\tau} s^\tau = \exp \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathbb{E} e^{itS_n} I(S_n > 0) \right\}.$$

Функции, стоящие в правой и левой частях последнего равенства, аналитичны в области $|s| < 1$, т. е. разлагаются в ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$.

Указанные ряды совпадают при $|s| < \varepsilon$ и, значит, при $|s| < 1$, ч. т. д. $\square$

10. Пусть μ — вероятностная мера на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ с функцией распределения $F = F(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, и характеристической функцией $\varphi = \varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$.

Установить справедливость *многомерной формулы обращения*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{k=1}^n \left[I_{(a_k, b_k)} + \frac{I_{\{a_k\}} + I_{\{b_k\}}}{2} \right] d\mu = \\ = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[-c, c]^n} \prod_{k=1}^n \frac{e^{-it_k a_k} - e^{-it_k b_k}}{it_k} \varphi(t) dt \end{aligned}$$

для всех $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, где $t = (t_1, \dots, t_n)$.

Замечание. Если при всех k , $1 \leq k \leq n$, точки a_k, b_k являются точками непрерывности маргинальных функций распределения $F_k(x_k)$, полученных из $F(x_1, \dots, x_n)$, то

$$\mu((a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{k=1}^n \left[I_{(a_k, b_k)} + \frac{I_{\{a_k\}} + I_{\{b_k\}}}{2} \right] d\mu.$$

Решение. Искомое соотношение устанавливается совершенно аналогично одномерному случаю. Поэтому мы лишь наметим основные этапы доказательства.

1. Подставляя $\varphi(t)$ в виде $\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(t, x)} d\mu$ и используя теорему Фубини, следует вывести соотношение

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[-c, c]^n} \prod_{k=1}^n \frac{e^{-it_k a_k} - e^{-it_k b_k}}{it_k} \varphi(t) dt = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{k=1}^n \Psi_c(x_k, a_k, b_k) d\mu,$$

где

$$\Psi_c(x, a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^c [\sin t(x - a) - \sin t(x - b)] \frac{dt}{t}.$$

2. Заметим далее, что, поскольку (см. задачу П.6.76)

$$\int_s^t \frac{\sin v}{v} dv \rightarrow \pi$$

при $s \rightarrow -\infty$ и $t \rightarrow \infty$, справедливо соотношение

$$\Psi_c(x, a, b) \rightarrow I_{(a,b)}(x) + \frac{I(x=a) + I(x=b)}{2}, \quad c \rightarrow \infty.$$

3. Используя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, можно установить, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{k=1}^n \Psi_c(x_k, a_k, b_k) d\mu \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{k=1}^n \left[I_{(a_k, b_k)} + \frac{I_{\{a_k\}} + I_{\{b_k\}}}{2} \right] d\mu. \quad \square$$

11. Пусть $\varphi_k = \varphi_k(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $k \geq 1$, — характеристические функции. Показать, что, каковы бы ни были неотрицательные числа λ_k , $\sum \lambda_k = 1$, функция $\varphi = \sum \lambda_k \varphi_k$ является характеристической.

Решение. Функция φ является характеристической для смеси распределений μ_k , отвечающих φ_k . Иначе говоря, при всех $t \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d \sum \lambda_k \mu_k. \quad \square$$

12. Если $\varphi(t)$ — характеристическая функция некоторой случайной величины ξ , то будут ли $\operatorname{Re} \varphi(t)$, $\operatorname{Im} \varphi(t)$, $\overline{\varphi(t)}$, $|\varphi(t)|$ и $|\varphi(t)|^2$ также характеристическими функциями?

Решение. Имеем $\operatorname{Re} \varphi(t) = (Ee^{it\xi} + Ee^{-it\xi})/2 = Ee^{it\xi X}$, $t \in \mathbb{R}$, где случайная величина X не зависит от ξ и $P(X=1) = P(X=-1) = 1/2$. Кроме того, $\overline{\varphi(t)} = Ee^{it(-\eta)}$ и $|\varphi(t)|^2 = Ee^{it(\xi-\eta)}$, $t \in \mathbb{R}$, где η — независимая копия величины ξ . Функция $\operatorname{Im} \varphi(t)$ всегда не является характеристической, так как $\operatorname{Im} \varphi(0) = 0$.

Покажем, что функция $|\varphi(t)|$, вообще говоря, не является характеристической. Положим $\varphi(t) = \cos t$ (характеристическая функция бернуллиевской величины, принимающей значения $-1, 1$ с вероятностями $1/2$). Тогда функция $|\varphi(t)|$ дифференцируема в нуле вплоть до второго порядка. Если бы функция $|\cos t|$ была характеристической, то согласно теореме 1 из В1.П.12 это бы означало, что она дифференцируема всюду, что, очевидно, не так. $\square$

13. Доказать справедливость формул, приведенных для характеристических функций в таблицах 4 и 5 из В1.П.12.

Решение. Для первых пяти дискретных распределений характеристические функции находятся элементарным подсчетом.

В случае отрицательно-биномиального распределения ($C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n}$, $k = n, n+1, \dots$ и $n = 1, 2, \dots$) полезно заметить, что для $|z| < 1$ выполняется равенство

$$\sum_{k=n}^{\infty} C_{k-1}^{n-1} z^{k-n} = \frac{1}{(1-z)^n}.$$

При отыскании характеристической функции $\varphi(t)$ нормального распределения $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ полезно заметить, что (при $m = 0, \sigma^2 = 1$) согласно теории функций комплексного переменного

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx - x^2/2} dx = \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_L e^{-z^2/2} dz = \\ &= \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2/2} dz = e^{-t^2/2}, \end{aligned}$$

где $L = \{z: \operatorname{Im} z = -t\}$.

Аналогичный прием можно использовать и в случае гамма-распределения.

Для вычисления характеристической функции $\varphi(t)$ распределения Коши удобно применить теорию вычетов: если $t > 0$, то

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx} \theta dx}{\pi(x^2 + \theta^2)} = \int_L f(z) dz,$$

где

$$L = \{z: \operatorname{Im} z = 0\} \quad \text{и} \quad f(z) = \frac{e^{itz}}{\pi(z^2 + \theta^2)}.$$

По теореме Коши о вычетах и лемме Жордана (см. [10, т. 1])

$$\int_L f(z) dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{i\theta} f = e^{-t\theta}.$$

Аналогично $\varphi(t) = e^{t\theta}$ при $t < 0$. В итоге $\varphi(t) = e^{-\theta|t|}$. $\square$

14. Пусть φ, ϕ, ψ — характеристические функции и $\psi\varphi \equiv \psi\phi$. Следует ли отсюда, что $\varphi \equiv \phi$?

Решение. Нет, не следует. Согласно теореме Поля функции

$$\psi(t) = (1 - |t|)^+, \quad \varphi(t) = (1 - |t/2|)^+, \quad \phi(t) = \begin{cases} (1 - |t/2|)^+, & |t| \leq 1, \\ (3 - |t|)^+/4, & |t| > 1, \end{cases}$$

являются характеристическими и $\psi\varphi \equiv \psi\phi$, однако $\varphi(t) \neq \phi(t)$ при $t \in (1, 3)$ (выше, как обычно, $x^+ = x \vee 0$). $\square$

15. Пусть ξ — целочисленная случайная величина и $\varphi_\xi(t)$ — ее характеристическая функция. Показать, что

$$P(\xi = n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \varphi_\xi(t) dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Решение. По теореме Фубини

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \varphi_\xi(t) dt = E \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\xi-n)t} dt = 2\pi P(\xi = n). \quad \square$$

16. Показать, что в пространстве

$$L^2 = L^2([-\pi, \pi], \mathcal{B}([-\pi, \pi]))$$

с мерой Лебега система функций $\left\{ \frac{e^{i\lambda n}}{\sqrt{2\pi}}, n \in \mathbb{Z} \right\}$ образует ортонормированный базис.

Решение. Можно провести доказательство по следующей схеме:

(а) по $\varepsilon > 0$ найти такое $c > 0$, что

$$\|\varphi - f\|_{L^2} < \varepsilon, \quad f(x) = \varphi(x)I(|\varphi(x)| \leq c);$$

(б) по теореме Лузина (см. задачу II.10.35) найти такую непрерывную функцию $f_\varepsilon(x)$, что $|f_\varepsilon(x)| \leq c$ и

$$\mu\{x \in [-\pi, \pi]: f_\varepsilon(x) \neq f(x)\} < \varepsilon;$$

тогда $\|f - f_\varepsilon\|_{L^2} \leq 2c\sqrt{\varepsilon}$;

(с) найти такую непрерывную функцию $g_\varepsilon(x)$, что $g_\varepsilon(-\pi) = g_\varepsilon(\pi)$ и $\|g_\varepsilon - f_\varepsilon\|_{L^2} \leq \varepsilon$;

(д) по теореме Вейерштрасса найти такую функцию

$$h_\varepsilon(x) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{ikx},$$

что

$$\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |g_\varepsilon(x) - h_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon$$

и, значит, $\|g_\varepsilon - h_\varepsilon\|_{L^2} \leq \varepsilon$.

Из пп. (а)–(д) следует, что конечные суммы вида $\sum_{k=-n}^n a_k e^{ikx}$ образуют плотное множество в L^2 , т. е. система $\left\{ \frac{e^{i\lambda n}}{\sqrt{2\pi}}, n \in \mathbb{Z} \right\}$ образует (ортонормированный) базис. $\square$

17. Показать, что всякая характеристическая функция $\varphi = \varphi(t)$ для любых s и t удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(t-s)| \geq |\varphi(s)\varphi(t)| - [1 - |\varphi(s)|^2]^{1/2}[1 - |\varphi(t)|^2]^{1/2}.$$

Решение. Согласно теореме Бохнера—Хинчина матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & \varphi(-t) & \varphi(-s) \\ \varphi(t) & 1 & \varphi(t-s) \\ \varphi(s) & \varphi(s-t) & 1 \end{pmatrix}$$

неотрицательно определена и, следовательно, имеет неотрицательный определитель. Прямой проверкой с учетом равенства $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$ убеждаемся, что он равен

$$1 + \varphi(t)\overline{\varphi(s)}\overline{\varphi(t-s)} + \overline{\varphi(t)}\varphi(s)\varphi(t-s) - |\varphi(t)|^2 - |\varphi(s)|^2 - |\varphi(t-s)|^2,$$

или

$$\begin{aligned} (1 - |\varphi(t)|^2) \cdot (1 - |\varphi(s)|^2) &\geq |\varphi(t-s) - \varphi(t)\overline{\varphi(s)}|^2 \geq \\ &\geq (|\varphi(t-s)| - |\varphi(t)\varphi(s)|)^2. \end{aligned}$$

Последнее обеспечивает искомую оценку. $\square$

18. (а) В теореме Бохнера—Хинчина предполагается, что рассматриваемая неотрицательно определенная функция $\varphi(t)$ является *непрерывной*. Доказать, что *непрерывность в нуле функции* $\varphi(t)$ уже обеспечивает непрерывность на всей числовой оси. Вывести это, установив неравенство

$$|\varphi(t) - \varphi(s)|^2 \leq 2[1 - \operatorname{Re} \varphi(t-s)],$$

справедливое при $\varphi(0) = 1$.

(б) Доказать также следующий результат Рисса, показывающий, в какой степени можно вообще отказаться от предположения непрерывности.

Пусть $\varphi = \varphi(t)$ — комплекснозначная измеримая по Лебегу функция, и пусть $\varphi(0) = 1$. Тогда функция $\varphi = \varphi(t)$ является положительно определенной в том и только том случае, когда она совпадает (почти всюду относительно лебеговой меры на числовой прямой) с некоторой характеристической функцией.

Решение. (а) Для доказательства достаточно установить указанное неравенство. Рассуждая, как в задаче II.12.17, получаем, что

$$(1 - |\varphi(t)|^2) \cdot (1 - |\varphi(s)|^2) \geq |\varphi(t)\overline{\varphi(s)} - \varphi(t-s)|^2.$$

С другой стороны, из неотрицательности функции

$$f(x) = |\lambda|^2 + \varphi(t)\lambda + \overline{\varphi(t)\lambda} + 1 = |\varphi(t)|^2 x^2 + 2|\varphi(t)|^2 x + 1, \\ \lambda = \overline{\varphi(t)} x, \quad x \in \mathbb{R},$$

вытекает неравенство $|\varphi(t)|^2 \leq 1$ (так как дискриминант квадратного трехчлена $f(x)$ не положителен). Два последних неравенства гарантируют, что матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{1 - |\varphi(t)|^2}{\varphi(t)\overline{\varphi(s)} - \varphi(t-s)} & \frac{\overline{\varphi(t)}\varphi(s) - \overline{\varphi(t-s)}}{1 - |\varphi(s)|^2} \end{pmatrix}$$

неотрицательно определена, откуда следует, что

$$1 - |\varphi(t)|^2 + 1 - |\varphi(s)|^2 + \overline{\varphi(t)}\varphi(s) - \overline{\varphi(t-s)} + \varphi(t)\overline{\varphi(s)} - \varphi(t-s) \geq 0,$$

или

$$2[1 - \operatorname{Re} \varphi(t-s)] \geq |\varphi(t) - \varphi(s)|^2.$$

(b) Если функция $\varphi(t)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi n} \int_{-n}^n (1 - |t|/2n) e^{-itx} \varphi(t) dt = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi n} \int_{[-n,n]^2} e^{-i(t-s)x} \varphi(t-s) dt ds \geq 0. \quad \square$$

19. (Критерий Хинчина.) Показать, что характеристическая функция $\varphi = \varphi(t)$ любого абсолютно непрерывного распределения с плотностью $f = f(x)$ представляется в виде

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} \phi(t+s) \overline{\phi(s)} ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

для некоторой комплекснозначной функции ϕ , удовлетворяющей условию $\int_{\mathbb{R}} |\phi(s)|^2 ds = 1$. Предположить для простоты, что

$$\int_{\mathbb{R}} \sqrt{f(x)} dx < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}} dt \left| \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \sqrt{f(x)} dx \right| < \infty.$$

Решение. Положим

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \sqrt{f(x)} dx.$$

Вследствие формулы обращения (для конечных мер с плотностью $g(x) = \sqrt{f(x)}$, $x \in \mathbb{R}$), а также теоремы Фубини имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dt \int_{\mathbb{R}} \phi(t+s) \overline{\phi(s)} ds &= \\ &= 2\pi \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-isx} \overline{\phi(s)} ds \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(t+s)x} \phi(t+s) dt = \\ &= 2\pi \sqrt{f(x)/(2\pi)} \cdot \sqrt{f(x)/(2\pi)} = f(x), \end{aligned}$$

откуда следует утверждение задачи. $\square$

20. (а) Доказать, что если $\varphi(t)$ есть характеристическая функция, то таковой же является функция $\exp[\lambda(\varphi(t) - 1)]$ для каждого $\lambda > 0$.

(б) Используя равенство

$$C_\alpha \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1 - e^{-x}}{x^{1+\alpha}} dx = 1,$$

справедливое для некоторого положительного C_α , доказать *теорему Шёнберга*: если функция $\exp[-a\psi(t)]$ характеристическая для всех $a > 0$ и некоторого $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, то таковой же является и функция $\exp[-a\psi(t)^\alpha]$ для любых $\alpha \in [0, 1]$, $a > 0$.

Решение. (а) Пусть $\eta, \xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые случайные величины, причем η распределено по закону Пуассона с параметром λ , а ξ_n имеет своей характеристической функцией $\varphi(t)$. Тогда, как нетрудно проверить, $\exp[\lambda(\varphi(t) - 1)]$ есть характеристическая функция величины $\sum_{i=1}^{\eta} \xi_i$, где сумма по пустому множеству считается равной нулю.

(б) С учетом п. (а) функция

$$\exp[\lambda(\exp\{-a\psi(t)\} - 1)], \quad a, \lambda > 0,$$

также является характеристической. Кроме того, имеем

$$C_\alpha \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1 - \exp(-xy)}{x^{1+\alpha}} dx = y^\alpha, \quad y \geq 0.$$

Положим $y = a^{1/\alpha} \psi(t)$ и рассмотрим данный интеграл как предел римановых сумм. Учитывая теперь, что произведение двух характеристических функций снова является характеристической функцией, видим, что функция $\varphi(t) = \exp[-a\psi(t)^\alpha]$ неотрицательно определена (как предел таких же функций).

Поскольку функция $\exp[-\psi(t)]$ характеристическая, функция $\psi(t)$ непрерывна в нуле, поэтому функция $\varphi(t)$ также непрерывна в нуле,

а значит, по теореме Бохнера—Хинчина она является характеристической. $\square$

21. Какие из функций

$$\varphi(t) = \exp(-|t|^\alpha), \quad \alpha \in (0, 2],$$

$$\varphi(t) = \exp(-|t|^\alpha), \quad \alpha > 2,$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{(1 + |t|^\alpha)^\beta}, \quad \alpha \in (0, 2], \beta > 0,$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{(1 + |t|^\alpha)^\beta}, \quad \alpha > 2, \beta > 0,$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} (1 - |t|)^\beta, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1, \end{cases} \quad \beta \geq 1,$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} (1 - |t|)^\beta, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1, \end{cases} \quad \beta \in (0, 1),$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - |t|^3, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1, \end{cases}$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1/2, \\ 1/(4|t|), & |t| > 1/2, \end{cases}$$

являются характеристическими?

Решение. У функций $\exp(-|t|^\alpha)$ и $(1 + |t|^\alpha)^{-\beta}$ при $\alpha > 2$, а также у функции $1 - |t|^3 \wedge 1$ в точке $t = 0$ вторая производная существует и равна нулю. Ввиду того что

$$E\xi^2 = -\varphi''_\xi(0) = 0 \Rightarrow \xi = 0 \text{ п. н.},$$

они не являются характеристическими. Функции

$$(1 - |t|)^\beta \cdot I(|t| \leq 1), \quad \beta \geq 1, \quad (1 - |t|)I(|t| \leq 1/2) + \frac{1(I(|t| > 1/2))}{4|t|}$$

удовлетворяют всем условиям теоремы Пойа, поэтому являются характеристическими.

Докажем, что функция $\varphi(t) = (1 - |t|)^\beta \cdot I(|t| \leq 1)$ не является характеристической при $\beta \in (0, 1)$. Допустим противное. Тогда $\varphi(t) = Ee^{it\xi}$ и при малом $h > 0$ имеем

$$h^\beta = |\varphi(1) - \varphi(1 - h)| \leq E|e^{ih\xi} - 1| \leq Eh|\xi| \cdot I(h|\xi| \leq 1) + 2P(h|\xi| > 1).$$

Согласно задаче II.12.31 имеем $E|\xi|^\gamma < \infty$ при $\gamma \in (0, 1)$. Отсюда следует, что

$$h^\beta \leq Eh|\xi| \cdot I(h|\xi| \leq 1) + 2P(h|\xi| > 1) \leq 3h^\gamma E|\xi|^\gamma.$$

Выбирая теперь $\gamma > \beta$ и переходя к пределу при $h \rightarrow 0$, приходим к противоречию.

Используя теорему Шонберга (см. задачу II.12.20), а также то, что $\exp(-at^2)$ при $a \geq 0$ — это характеристическая функция гауссовского закона $\mathcal{N}(0, 2a)$, получаем, что функция $\exp(-|t|^\alpha)$ при $\alpha \in (0, 2]$ также является характеристической.

Далее, $(1 + |t|^\alpha)^{-\beta}$ при $\alpha \in (0, 2]$ — это характеристическая функция случайной величины $\xi\eta$, где ξ и η независимы, ξ имеет характеристическую функцию $\exp(-|t|^\alpha)$, а плотность η пропорциональна $x^{\alpha\beta-1} \exp(-x^\alpha)I(x \geq 1)$. Действительно, тогда $Ee^{it\xi\eta}$ пропорционально

$$\int_{x \geq 1} e^{-(1+|t|^\alpha)x^\alpha} x^{\alpha\beta-1} dx = \frac{1}{\alpha\beta(1+|t|^\alpha)^\beta} \int_{y \geq 1} e^{-y^{1/\beta}} dy. \quad \square$$

22. Доказать, что функция

$$\varphi(t) = \begin{cases} \sqrt{1-t^2}, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1, \end{cases}$$

не является характеристической.

Является ли функция $\varphi(t) = \frac{\sin t}{t}$ характеристической?

Решение. Если $\varphi(t) = \sqrt{1-t^2} \cdot I(|t| \leq 1) = Ee^{it\xi}$ — характеристическая функция для некоторой величины ξ , то у ξ существует второй момент $E\xi^2 = -\varphi''(0)$. Отсюда следует, что функция $\varphi(t)$ дифференцируема при любом $t \in \mathbb{R}$. Однако это не так (например, при $t = 1$), поэтому указанная функция не характеристическая.

Функция $\varphi(t) = \frac{\sin t}{t}$ — это характеристическая функция случайной величины, имеющей равномерное распределение на $[-1, 1]$. $\square$

23. Пусть $\varphi = \varphi(t)$ — характеристическая функция невырожденного распределения $F = F(x)$. Показать, что если $\varphi \in C^{2n}$, $n \geq 1$, то функция $\varphi^{(2n)}(t)/\varphi^{(2n)}(0)$ также является характеристической.

Решение. Из невырожденности распределения следует, что $\varphi^{(2n)}(0) \neq 0$. Теперь утверждение вытекает из равенства

$$\frac{\varphi^{(2n)}(t)}{\varphi^{(2n)}(0)} = \frac{\int_{\mathbb{R}} x^{2n} e^{itx} dF(x)}{\int_{\mathbb{R}} x^{2n} dF(x)} = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dG(x),$$

где функция распределения G пропорциональна $\int_{-\infty}^x y^{2n} dF(y)$. $\square$

24. Пусть $\varphi(t)$ — характеристическая функция. Показать, что следующие функции также являются характеристическими:

$$\int_0^1 \varphi(ut) du, \quad \int_{\mathbb{R}_+} e^{-u} \varphi(ut) du.$$

Решение. Если $\varphi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi}$, то

$$\int_0^1 \varphi(ut) du = \mathbb{E}e^{it\xi\eta}, \quad \int_{\mathbb{R}_+} e^{-u} \varphi(ut) du = \mathbb{E}e^{it\xi\zeta},$$

где η, ζ не зависят от ξ , случайная величина η имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, а ζ — экспоненциальное распределение с параметром 1. $\square$

25. Показать, что для каждого $n \geq 1$ функции

$$\varphi_n(t) = \frac{e^{it} - \sum_{k=0}^{n-1} (it)^k / k!}{(it)^n / n!}$$

являются характеристическими.

Решение. Указанная функция — это характеристическая функция случайной величины с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} n(1-x)^{n-1}, & x \in [0, 1], \\ 0, & x \notin [0, 1]. \end{cases} \quad \square$$

26. Пусть $\varphi_n(t)$ — характеристическая функция случайной величины, равномерно распределенной на $(-n, n)$. Показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases}$$

Решение. Утверждение вытекает из формулы

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin(nt)}{nt}. \quad \square$$

27. Пусть X и Y — независимые случайные величины с характеристическими функциями $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ и функциями распределения $F = F(x)$ и $G = G(x)$. Для функций $f = f(t)$ и $g = g(t)$ со значениями в $\mathbb{C}$ обозначим через $M(f, g)$ предел (при $T \rightarrow \infty$) интегралов

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \overline{g(t)} dt,$$

когда он существует. Показать, что

$$M(\varphi, e^{itx}) = \lim_T \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-itx} \varphi(t) dt = F(x) - F(x-), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$M(\varphi, \psi) = \sum_{-\infty < x < \infty} [F(x) - F(x-)][G(x) - G(x-)].$$

В частности,

$$M(\varphi, \varphi) = \sum_{-\infty < x < \infty} [F(x) - F(x-)]^2,$$

и функция распределения $F = F(x)$ является непрерывной в том и только том случае, когда $M(\varphi, \varphi) = 0$.

Решение. По теореме Фубини

$$M(\varphi, e^{itx}) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-itx} \varphi(t) dt = \mathbb{E} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{it(X-x)} dt = \mathbb{E} \frac{\sin T(X-x)}{T(X-x)}.$$

Последнее выражение по теореме Лебега о мажорируемой сходимости стремится к

$$\mathbb{P}(X - x = 0) = F(x) - F(x-),$$

когда $T \rightarrow \infty$. Далее, поскольку $\varphi(t)\overline{\psi(t)} = \mathbb{E}e^{it(X-Y)}$, по доказанному (см. также задачу II.8.57) получаем

$$\begin{aligned} M(\varphi, \psi) &= M(\varphi\overline{\psi}, 1) = \mathbb{P}(X - Y = 0) = \\ &= \sum_{-\infty < x < \infty} [F(x) - F(x-)][G(x) - G(x-)]. \quad \square \end{aligned}$$

28. В данной задаче предлагается, следуя работе [70], установить неравенство

$$1 - \operatorname{Re} \varphi(nt) \leq n[1 - \operatorname{Re}^n \varphi(t)] \leq n^2[1 - \operatorname{Re} \varphi(t)], \quad (*)$$

справедливое для всех $n \geq 1$, $t \in \mathbb{R}$ и характеристической функции $\varphi = \varphi(t)$ любой случайной величины ξ . Доказательство провести по следующим шагам.

(а) Вначале установить, что при $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{\sin nx}{\sin x} \right| \leq n.$$

(б) С помощью последней оценки показать, что при каждом $x \in \mathbb{R}$ (и $n \geq 1$) выполняется неравенство

$$1 - \cos nx \leq n(1 - \cos^n x).$$

(с) Вывести, что неравенство (*) верно для четных n .

(d) Доказать, что при $n(1 - a^n) < 2$ и $|a| \leq 1$ выполняются неравенства

$$x^n \geq a^n + na^{n-1}(x - a), \quad |x| \leq 1,$$

а из этого получить неравенство (*) при нечетных n .

(е) Доказать также, что для всех $n \geq 1$ и $t \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$1 - |\varphi(nt)|^2 \leq n^2[1 - |\varphi(t)|^2].$$

Решение. (а) Указанную оценку легко получить по индукции, замечая, что

$$\left| \frac{\sin(n+1)x}{\sin x} \right| = \left| \frac{\sin nx}{\sin x} \cos x + \cos nx \right| \leq \left| \frac{\sin nx}{\sin x} \right| + 1.$$

(b) Надо показать, что $f(x) = n \cos^n x - \cos nx \leq n - 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и $n \geq 1$. Производная функции f равна

$$\begin{aligned} f'(x) &= -n^2 \cos^{n-1} x \sin x + n \cos nx \sin nx = \\ &= n \sin x \left[\frac{\sin nx}{\sin x} \cos nx - n \cos^{n-1} x \right] \end{aligned}$$

и обращается в нуль либо при $\sin x = 0$, т. е. $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, — в этих точках искомое неравенство выполнено тривиальным образом, — либо при

$$\frac{\sin nx}{\sin x} = n \frac{\cos^{n-1} x}{\cos nx}.$$

В последнем случае в силу п. (а) имеем

$$f(x) = n \cos^n x - \cos nx = \frac{\sin nx \cos x}{\sin x} - \cos nx = \frac{\sin(n-1)x}{\sin x} \leq n - 1.$$

Таким образом, мы доказали требуемое неравенство во всех точках, где $f'(x) = 0$, и, в частности, во всех точках экстремума, а значит, и при всех $x \in \mathbb{R}$.

(с) Применяя оценку из п. (b), по неравенству Йенсена получаем (для четных n)

$$n[E \cos \xi]^n \leq nE \cos^n \xi \leq E \cos nx + n - 1,$$

что эквивалентно искомому неравенству.

(d) Неравенство

$$x^n \geq a^n + na^{n-1}(x - a), \quad |x| \leq 1,$$

равносильно тому, что функция $g(x) = x^n$, $|x| \leq 1$, лежит ниже касательной в точке $x = a$, где n нечетно, $n(1 - a^n) \leq 2$ и $|a| \leq 1$. Последнее (в силу вогнутости функции g при $x \leq 0$ и выпуклости при $x > 0$) эквивалентно тому, что $a \geq b$, где $b \in (0, 1]$ — такая точка, касательная в которой проходит через точку $(-1, g(-1)) = (-1, -1)$, т. е.

$$-1 = b^n + nb^{n-1}(-1 - b) \quad \text{или} \quad nb^n - n = b^n - nb^{n-1} + 1 - n.$$

Осталось заметить, что при $n \geq 3$ (случай $n = 1$ тривиален)

$$b^n - nb^{n-1} + 1 - n = b^{n-1}(b - n) + 1 - n < -2.$$

Следовательно, $a \geq b$ (так как $na^n - n \geq -2$).

Установим теперь неравенство (*) при нечетных n . Если

$$n[1 - \operatorname{Re}^n \varphi(t)] \geq 2,$$

то неравенство тривиально. Если же $n[1 - (\operatorname{Re} \varphi(t))^n] < 2$, то согласно полученной оценке

$$(\cos t\xi)^n \geq a^n + na^{n-1}(\cos t\xi - a), \quad |x| \leq 1$$

при $a = \operatorname{Re} \varphi(t)$. Если теперь взять среднее от обеих частей равенства, то получим, что

$$\mathbb{E}(\cos t\xi)^n \geq (\mathbb{E} \cos t\xi)^n = a^n.$$

Далее следует рассуждать так же, как в п. (с).

(е) Результат вытекает из неравенства (*), поскольку $|\varphi(t)|^2$ есть характеристическая функция случайной величины $\xi - \eta$, где η — независимая копия величины ξ . $\square$

29. Показать, что всякая характеристическая функция $\varphi = \varphi(t)$ удовлетворяет следующим неравенствам (при всех $t \in \mathbb{R}$):

$$|\operatorname{Im} \varphi(t)|^2 \leq \frac{1 - \operatorname{Re} \varphi(2t)}{2}, \quad |\operatorname{Re} \varphi(t)|^2 \leq \frac{1 + \operatorname{Re} \varphi(2t)}{2};$$

$$|\varphi(t) - \varphi(s)|^2 \leq 2[1 - \operatorname{Re} \varphi(t - s)];$$

$$\frac{1}{2s} \left| \int_{t-s}^{t+s} \varphi(u) du \right| \leq (1 + \operatorname{Re} \varphi(s))^{1/2}, \quad s > 0.$$

Последние два неравенства называют *неравенствами Райкова*.

Решение. Пусть везде далее $\varphi(t) = \mathbb{E}e^{itX}$, $t \in \mathbb{R}$. По неравенству Ляпунова имеем

$$|\operatorname{Im} \varphi(t)|^2 \leq \mathbb{E} \sin^2 tX = \frac{\mathbb{E}(1 - \cos 2tX)}{2} = \frac{1 - \operatorname{Re} \varphi(2t)}{2}.$$

Аналогично выводится неравенство для $|\operatorname{Re} \varphi(t)|^2$. Вновь применяя неравенство Ляпунова, получаем

$$|\varphi(t) - \varphi(s)|^2 \leq \mathbb{E}|e^{i(t-s)X} - 1|^2 = 2\mathbb{E}[1 - \cos((t-s)X)] = 2[1 - \operatorname{Re} \varphi(t-s)].$$

Пусть случайная величина U не зависит от X и имеет равномерное распределение на $[-s, s]$. Тогда по теореме Фубини

$$\begin{aligned} \frac{1}{2s} \left| \int_{t-s}^{t+s} \varphi(u) du \right| &= |\mathbb{E} e^{i(t+U)X}| = \left| \mathbb{E} e^{itX} \frac{\sin sX}{sX} \right| \leq \\ &\leq \left(\mathbb{E} \frac{\sin^2 sX}{s^2 X^2} \right)^{1/2} \leq (1 + \mathbb{E} \cos sX)^{1/2} = (1 + \operatorname{Re} \varphi(s))^{1/2}, \end{aligned}$$

где мы также воспользовались неравенством

$$\frac{\sin^2 x}{x^2} \leq 1 + \cos x, \quad \text{или} \quad \cos^2 x + x^2 \cos x + x^2 - 1 \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Последнее вытекает из оценок

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \geq 1 - x^2,$$

а также из того, что квадратный трехчлен $f(y) = y^2 + x^2 y + x^2 - 1$ имеет корни -1 и $1 - x^2$. $\square$

30. Пусть X — случайная величина с характеристической функцией $\varphi = \varphi(t)$. Показать, что

(а) если $|\varphi(t_n)| = 1 + o(t_n^2)$ для некоторых $t_n \rightarrow 0$, то $X = a$ п. н. для некоторого $a \in \mathbb{R}$;

(б) если $|\varphi(t_n)| = 1 + O(t_n^2)$ для некоторых $t_n \rightarrow 0$, то $\mathbb{E}X^2 < \infty$.

Решение. (а) Имеем $|\varphi(t_n)|^2 = 1 + o(t_n^2)$. Кроме того, $|\varphi(t)|^2$ есть характеристическая функция величины $X - Y$, где Y — независимая копия величины X . Также имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_n \frac{1 - |\varphi(t_n)|^2}{t_n^2} = \lim_n \mathbb{E} t_n^{-2} [1 - \cos t_n(X - Y)] = \\ &= \lim_n \mathbb{E} \frac{1}{2} \left[\frac{\sin t_n(X - Y)/2}{t_n(X - Y)/2} \right]^2 (X - Y)^2 \geq \mathbb{E} \frac{(X - Y)^2}{2}. \end{aligned}$$

Другими словами, $X = Y$ п. н., причем X и Y независимы. Это возможно, только когда $X \equiv a$ для некоторой константы $a \in \mathbb{R}$.

(б) Рассуждая, как при доказательстве п. (а), находим

$$\mathbb{E} \frac{(X - Y)^2}{2} \leq C,$$

где $C > 0$ таково, что $1 - |\varphi(t_n)|^2 \leq Ct_n^2$, $n \geq 1$. По теореме Фубини $E(X - Y)^2 = E f(Y)$, где $f(y) = E(X - y)^2$ конечно P_Y -п. н. при всех $y \in \mathbb{R}$, а P_Y — распределение величины Y . Следовательно, и EX^2 должно быть конечным. $\square$

31. Пусть ξ — случайная величина с характеристической функцией $\varphi = \varphi(t)$. Показать, что при $0 < \alpha < 2$ соотношение

$$r^\alpha P(|\xi| > r) = O(1), \quad r \rightarrow \infty,$$

эквивалентно тому, что

$$|\varphi(t)| = 1 + O(|t|^\alpha), \quad t \rightarrow 0. \quad (*)$$

При этом в случае $\alpha = 2$ ограничение на $\varphi(t)$ является (лишь) достаточным условием.

Убедиться также в том, что при $0 < \alpha < 2$ выполняются условия

$$r^\alpha P(|\xi| > r) = o(1), \quad r \rightarrow \infty \Leftrightarrow |\varphi(t)| = 1 + o(|t|^\alpha), \quad t \rightarrow 0.$$

Замечание. С помощью небольшой модификации приведенного ниже доказательства можно уточнить приведенный результат следующим образом:

$$r^\alpha P(|\xi| > r) = O(1) \Leftrightarrow n[1 - |\varphi(tn^{-1/\alpha})|] = O(1),$$

$$r^\alpha P(|\xi| > r) = o(1) \Leftrightarrow n[1 - |\varphi(tn^{-1/\alpha})|] = o(1),$$

где мы полагаем, что $0 < \alpha < 2$, $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$, $n \rightarrow \infty$ и $r \rightarrow \infty$.

Решение. Докажем необходимость условия (*). Пусть η — независимая копия величины ξ . Тогда

$$|\varphi(t)|^2 = E e^{it(\xi - \eta)} = E \cos(t(\xi - \eta)), \quad P(|\xi - \eta| > r) \leq 2P(|\xi| > r/2) \leq \frac{C}{r^\alpha}$$

для некоторой константы $C > 0$ при всех $r > 0$ и $t \in \mathbb{R}$. Отсюда с учетом неравенства $1 - \cos x \leq 2(x^2 \wedge 1)$ получаем

$$\begin{aligned} 0 \leq 1 - |\varphi(t)| &\leq 1 - |\varphi(t)|^2 = E[1 - \cos(t(\xi - \eta))] \leq 2E[t^2(\xi - \eta)^2 \wedge 1] = \\ &= 2 \int_0^1 P(|t(\xi - \eta)| > \sqrt{x}) dx \leq 2C|t|^\alpha \int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha/2}} = O(|t|^\alpha), \quad t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Пусть теперь $r^\alpha P(|\xi| > r) = o(1)$. Тогда для фиксированного $\delta > 0$ при всех $r > N = N(\delta)$ имеем

$$P(|\xi - \eta| > r) \leq 2P(|\xi| > r/2) \leq \frac{\delta}{r^\alpha}.$$

Как и выше,

$$0 \leq 1 - |\varphi(t)| \leq 2 \int_0^1 \mathbf{P}(|t(\xi - \eta)| > \sqrt{x}) dx \leq \\ \leq 2C|t|^\alpha \int_0^{t^2 N^2} \frac{dx}{x^{\alpha/2}} + 2\delta|t|^\alpha \int_{t^2 N^2}^1 \frac{dx}{x^{\alpha/2}},$$

где, очевидно, $|t|^\alpha \int_0^{t^2 N^2} x^{-\alpha/2} dx = o(|t|^\alpha)$ и

$$2\delta|t|^\alpha \int_{t^2 N^2}^1 \frac{dx}{x^{\alpha/2}} \leq \frac{2\delta|t|^\alpha}{1 - \alpha/2}.$$

В силу произвольности δ получаем $|\varphi(t)| = 1 + o(|t|^\alpha)$.

Установим теперь достаточность условия (*). Заметим вначале, что

$$1 - |\varphi(t)|^2 = (1 - |\varphi(t)|)(1 + |\varphi(t)|) = O(|t|^\alpha).$$

Поэтому при $\varepsilon = r^{-1} > 0$ справедлива оценка

$$\mathbf{P}(\varepsilon[\xi - \eta] > 1) \leq C \mathbf{E} \left(1 - \frac{\sin \varepsilon[\xi - \eta]}{\varepsilon[\xi - \eta]} \right) = C \int_0^1 [1 - |\varphi(\varepsilon t)|^2] dt = O(\varepsilon^\alpha),$$

где $C = \sup_{y \geq 1} (1 - \sin y/y)^{-1}$. Аналогичное верно для $\mathbf{P}(\varepsilon[\xi - \eta] < -1)$.

Воспользуемся теперь элементарной оценкой

$$\mathbf{P}(|\xi - \mu(\eta)| > a) \leq 2\mathbf{P}(|\xi - \eta| > a), \quad a > 0,$$

где $\mu(\eta)$ — произвольная медиана величины η . Из этой оценки с учетом соотношения $\mathbf{P}(\varepsilon|\xi - \eta| > 1) = O(\varepsilon^\alpha)$ легко вывести, что $\mathbf{P}(\varepsilon|\xi| > 1) = O(\varepsilon^\alpha)$ (везде $\varepsilon \rightarrow 0$).

Точно так же устанавливается, что $\mathbf{P}(\varepsilon|\xi| > 1) = o(\varepsilon^\alpha)$ при $|\varphi(t)| = 1 + o(|t|^\alpha)$. $\square$

32. (а) Пусть ξ и η — н. о. р. случайные величины с нулевым средним и конечной дисперсией. Доказать, что если

$$\xi \stackrel{d}{=} \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}, \quad (*)$$

то величина ξ является гауссовской.

(б) Показать, что результат п. (а) остается в силе, если

$$\xi \stackrel{d}{=} a\xi + b\eta$$

для некоторых $a, b > 0$.

(с) Убедиться, что в п. (а) условия центрированности и конечности дисперсии величины ξ уже обеспечиваются соотношением (*).

Решение. (а) Воспользуемся центральной предельной теоремой. При $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\xi \stackrel{d}{=} \frac{\xi_1 + \xi_2}{\sqrt{2}} \stackrel{d}{=} \dots \stackrel{d}{=} \frac{\xi_1 + \dots + \xi_{2^{2n}}}{2^n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, E\xi^2),$$

где $\xi_1, \xi_2, \dots$ являются независимыми копиями величины ξ . Из этого следует, что ξ имеет распределение $\mathcal{N}(0, E\xi^2)$.

(b) Пусть $\varphi(t)$ — характеристическая функция величины ξ . Заметим, что $a^2 + b^2 = 1$, поскольку $D\xi = D(a\xi + b\eta) = (a^2 + b^2)D\xi$. Тогда

$$\xi \stackrel{d}{=} a\xi + b\eta \Leftrightarrow \varphi(at)\varphi(bt) = \varphi(t).$$

Итерируя последнее равенство, получаем

$$\prod_{k=0}^n \varphi(a^k b^{n-k} t)^{C_n^k} = \varphi(t).$$

Пусть для определенности $D\xi = 1$. Тогда $\ln \varphi(t) = -t^2/2 + o(t^2)$, $t \rightarrow 0$, так как $E\xi = 0$ и $E\xi^2 = 1$. Осталось показать, что при росте n выполняется соотношение

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \exp \left[-\frac{t^2}{2} \sum_{k=0}^n C_n^k a^{2k} b^{2n-2k} + o(1) \right] = \\ &= \exp \left[-\frac{t^2}{2} (a^2 + b^2)^n + o(1) \right] = e^{-t^2/2}, \end{aligned}$$

проверку чего оставляем читателю.

(с) Если $E\xi^2 < \infty$, то $E\xi = \sqrt{2}E\xi = 0$. Докажем, что $E\xi^2 < \infty$. В силу задачи II.12.30 достаточно показать, что $|\varphi(2^{-n})| = 1 + O(2^{-2n})$. Последнее вытекает из равенств

$$\ln |\varphi(1)| = 2^{2n} \ln |\varphi(2^{-n})|. \quad \square$$

33. Показать, что если функция распределения $F = F(x)$ имеет плотность $f = f(x)$, то ее характеристическая функция $\varphi = \varphi(t)$ обладает тем свойством, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0.$$

Решение. Имеем

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} e^{itx - i\pi} f(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} e^{ity} f(y + \pi/t) dy,$$

и согласно задаче II.10.37 получаем, что

$$\begin{aligned} |\varphi(t)| &= \frac{1}{2} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{itx} [f(x + \pi/t) - f(x)] dx \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |f(x + \pi/t) - f(x)| dx \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad \square \end{aligned}$$

34. В дополнение к задаче II.12.33 установить следующее *неравенство Ван дер Корпента*.

Пусть X — случайная величина со значениями в $[a, \infty)$ ($a \in \mathbb{R}$). Если функция распределения $F = F(x)$ величины X является гладкой и вогнутой на $[a, \infty)$, то при всех $t \in \mathbb{R}$

$$|\varphi(t)| \leq \frac{2F'_+(a)}{|t|},$$

где $\varphi = \varphi(t)$ — характеристическая функция величины X , а $F'_+(a)$ — правая производная функции F в точке a .

Доказать этот результат, используя неравенство Абеля из задачи II.6.24 и представление из задачи II.9.1.

Решение. Согласно задаче II.9.1 имеем

$$\varphi(t) = \mathbb{E} e^{itX} = \int_0^1 e^{itG(x)} dx,$$

где $G = F^{-1}$ — гладкая выпуклая возрастающая функция. Кроме того, по неравенству Абеля с учетом возрастания функции $g = G' = 1/(F' \circ G)$ получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 e^{itG(x)} dx \right| &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\varepsilon}^1 \frac{e^{itG(x)}}{g(x)} g(x) dx \right| \leq \\ &\leq \sup_x \frac{1}{g(x)} \cdot \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_y \left| \int_{\varepsilon}^1 e^{itG(x)} g(x) I(1 \leq yg(x)) dx \right| \leq \\ &\leq \sup_{u > a} F'(u) \cdot \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{z \in [\varepsilon, 1]} \left| \int_z^1 e^{itG(x)} g(x) dx \right| \leq \\ &\leq F'_+(a) \cdot \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{z \in [\varepsilon, 1]} \frac{|e^{itG(1)} - e^{itG(z)}|}{|t|} \leq \frac{2F'_+(a)}{|t|}. \quad \square \end{aligned}$$

35. В данной задаче предлагается, следуя книге [40], установить, что

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |\varphi(t)| = 1 \quad (*)$$

для характеристической функции $\varphi(t)$ произвольной дискретной величины ξ .

Для доказательства надо вначале рассмотреть *ядро Фейера*

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{|j| \leq k} e^{ijt}, \quad n \geq 1, \quad t \in \mathbb{R},$$

и убедиться, что $F_n(t) \geq 0$ при всех t , а далее показать, что если ξ принимает значения $0, x_1, x_2, \dots$ с вероятностями $p_0, p_1, p_2, \dots$, то

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |\varphi(t)| \geq \lim_T \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t) \overline{K_N(t, n)} dt \geq p_0 + \frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^N p_k,$$

где $K_N(t, n) = \prod_{k=1}^N F_n(x_k t)$, $n, N \geq 1$, и, переходя к пределу при $n, N \rightarrow \infty$, установить, что имеет место равенство (*).

Замечание. Другой способ доказательства приведенного утверждения основан на рассмотрении элементарных свойств *почти периодических функций* вида $\sum_{k \geq 1} p_k e^{ix_k t}$ (см. [37, с. 44]).

Решение. Ядро Фейера допускает представления вида

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(k+1/2)t}{\sin t/2} = \frac{1}{n} \left[\frac{\sin nt/2}{\sin t/2} \right]^2,$$

поскольку для всех $t \in \mathbb{R}$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} \sum_{|j| \leq k} e^{ijt} &= 1 + 2 \sum_{j=1}^k \cos jt = \frac{\sin(k+1/2)t}{\sin t/2}, \\ \sum_{k=0}^{n-1} \sin(kt + t/2) &= \frac{(\sin nt/2)^2}{\sin t/2}. \end{aligned}$$

При этом, конечно, $F_n(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Имеем

$$K_N(t, n) = \prod_{k=1}^N F_n(x_k t) = 1 + \frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^N e^{-ix_k t} + R_N(t, n),$$

где остаток $R_N(t, n)$ есть взвешенная сумма экспонент вида e^{iat} с положительными весами.

Далее, поскольку $\varphi(t) = \sum_{k \geq 1} p_k e^{ix_k t}$, где $p_k \geq 0$ ($k \geq 1$) и $\sum_{k \geq 1} p_k = 1 < \infty$, получаем, что

$$\lim_T \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t) e^{iat} dt = \begin{cases} p_k, & a = -x_k, \\ 0, & a \notin \{-x_k\}_{k \geq 1}. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\lim_T \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t) K_N(t, n) dt = p_0 + \frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^N p_k + K,$$

где величина

$$K = \lim_T \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t) R_N(t, n) dt$$

неотрицательна, так как $R_N(t, n)$ есть линейная комбинация экспонент вида e^{iat} с положительными коэффициентами. Иными словами, мы доказали нижнюю оценку рассматриваемого в условии предела.

Осталось заметить, что для всех $M > 0$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \lim_T \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t) K_N(t, n) dt &= \lim_T \frac{1}{T} \int_M^T \varphi(t) K_N(t, n) dt \leq \\ &\leq \sup_{t > M} |\varphi(t)| \lim_T \frac{1}{T} \int_M^T K_N(t, n) dt = \\ &= \sup_{t > M} |\varphi(t)| \lim_T \frac{1}{T} \int_0^T K_N(t, n) dt = \sup_{t > M} |\varphi(t)|. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $M \rightarrow \infty$, получаем верхнюю оценку указанного в условии предела. $\square$

36. Функция $\phi = \phi(\lambda)$, $\lambda > 0$, называется *вполне монотонной*, если существуют производные $\phi^{(n)}(\lambda)$ всех порядков $n \geq 0$ при каждом $\lambda > 0$ и $(-1)^n \phi^{(n)}(\lambda) \geq 0$. Доказать следующий критерий Бернштейна.

Функция $\phi = \phi(\lambda)$ на $(0, \infty)$ есть преобразование Лапласа некоторой вероятностной меры μ на $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$, т. е. $\phi(\lambda) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\lambda x} d\mu$, в том и только том случае, когда эта

функция является вполне монотонной и $\phi(0+) = 1$.

При установлении достаточности, следуя работе [82] (см. также [99], с. 3), доказательство провести следующим образом.

(а) Предположив, что $\phi(\infty) = 0$, представить $\phi(\lambda)$ в виде (для каждого $n \geq 1$)

$$\phi(\lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{(-1)^n \phi^{(n)}(u)}{(n-1)!} (u-\lambda)^{n-1} du.$$

(b) Доказать, что функция

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n \phi^{(n)}(n/x)}{n!} (n/x)^{n+1}$$

является плотностью на $\mathbb{R}_+$, причем

$$\phi(\lambda) = \int_0^{n/\lambda} \left(1 - \frac{\lambda x}{n}\right)^{n-1} f_n(x) dx.$$

(с) Вывести из п. (b) предельным переходом, что $\phi(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} d\mu$ для некоторой вероятностной меры μ на $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$.

(d) Рассмотреть случай $\phi(\infty) > 0$.

Решение. Для доказательства *необходимости* следует заметить, что если $\phi(\lambda) = \mathbb{E}e^{-\lambda X}$, $\lambda > 0$, то при всех $n \geq 0$ (и $\lambda > 0$) выполняется соотношение

$$(-1)^n \phi^{(n)}(\lambda) = \mathbb{E}X^n e^{-\lambda X} \geq 0.$$

Существование всех производных легко вывести из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости (см. задачу II.6.49). Кроме того, вновь применяя теорему Лебега, находим, что $\mathbb{E}e^{-\lambda t} \rightarrow 1 = \phi(0+)$, $\lambda \downarrow 0$.

Докажем *достаточность*.

(а) По формуле Тейлора при $n = 1, 2, \dots$ для всех $a > 0$ имеем

$$\phi(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i \phi^{(i)}(a)}{i!} (a-\lambda)^i + \int_{\lambda}^a \frac{(-1)^n \phi^{(n)}(u)}{(n-1)!} (u-\lambda)^{n-1} du. \quad (*)$$

Если теперь $a > \lambda$, то все слагаемые (и подынтегральное выражение) неотрицательны. Поэтому

$$\int_{\lambda}^{\infty} \frac{(-1)^n \phi^{(n)}(u)}{(n-1)!} (u-\lambda)^{n-1} du \leq \phi(\lambda).$$

Полагая последовательно $n = 1, 2, \dots$ и переходя к пределу при $a \rightarrow \infty$ в формуле (*), получаем, что существуют пределы

$$l_n = \lim_a \frac{(-1)^{n-1} \phi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (a-\lambda)^{n-1} = \lim_a \frac{(-1)^{n-1} \phi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} a^{n-1},$$

так как существуют пределы соответствующих интегралов

$$\lim_a \int_{\lambda}^a \frac{(-1)^n \phi^{(n)}(u)}{(n-1)!} (u-\lambda)^{n-1} du = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{(-1)^n \phi^{(n)}(u)}{(n-1)!} (u-\lambda)^{n-1} du.$$

Пределы l_n необходимым образом равны нулю, поскольку $\phi(\infty) = 0$ и

$$\phi(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} l_{i+1} + \int_{\lambda}^{\infty} \frac{(-1)^n \phi^{(n)}(u)}{(n-1)!} (u-\lambda)^{n-1} du.$$

(b) Утверждение вытекает из п. (a) (если сделать замену переменных $u = n/x$ с учетом того, что $f_n(x) \geq 0$ и $\phi(0+) = \int_{\mathbb{R}_+} f_n(x) dx = 1$).

(c) Теорема Хелли утверждает, что каковы бы ни были функции распределения F_n , $n \geq 1$, найдется такая подпоследовательность $(n_k) \subseteq (n)$, что $F_{n_k}(x) \rightarrow F(x)$ для некоторой обобщенной функции распределения F , $0 \leq F(-\infty) \leq F(\infty) \leq 1$, и всех точек $x \in \mathbb{R}$, в которых F непрерывна.

Пусть $F_n = F_n(x)$ — функции распределения, отвечающие плотностям f_n ($n \geq 1$), а (n_k) — подпоследовательность, фигурирующая в теореме Хелли. Заметим, что

$$\lim_n \left(1 - \frac{\lambda x}{n}\right)^{n-1} I(\lambda x \leq n) = e^{-\lambda x}$$

равномерно по $x \geq 0$. Отсюда можно вывести, что

$$\phi(\lambda) = \int_0^{n_k/\lambda} \left(1 - \frac{\lambda x}{n_k}\right)^{n_k-1} dF_{n_k}(x) \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dF(x),$$

так что $\phi(\lambda)$ есть преобразование Лапласа для конечной меры μ , индуцируемой функцией F . Эта мера должна быть вероятностной, поскольку $\mu(\mathbb{R}_+) = \phi(0+) = 1$.

(d) Нетрудно видеть, что

$$\psi(\lambda) = \frac{\phi(\lambda) - \phi(\infty)}{1 - \phi(\infty)}, \quad \lambda > 0,$$

— вполне монотонная функция, $\psi(0+) = 1$ и $\psi(\infty) = 0$. Следовательно, по доказанному $\psi(\lambda) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\lambda x} d\mu$ для некоторой вероятностной меры μ .

Тогда $\phi(\lambda) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\lambda x} d\nu$, где вероятностная мера ν задается формулой

$$\nu = \phi(\infty)\delta_{\{0\}} + (1 - \phi(\infty))\mu.$$

□

37. (а) Пусть X — случайная величина, $Ee^{-X} < \infty$. Предположим, что

$$\int_{\mathbb{R}} |\phi(1 - it)| dt < \infty,$$

где $\phi(z) = Ee^{-zX}$ при всех таких $z \in \mathbb{C}$, что $\operatorname{Re} z = 1$. Доказать, что X имеет непрерывную плотность $f = f(x)$, равную

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{z: \operatorname{Re} z = 1} e^{xz} \phi(z) dz.$$

(b) Предполагая, что для некоторой величины X выполняется равенство

$$e^{-\sqrt{2z}} = Ee^{-zX}$$

при всех таких $z \in \mathbb{C}$, что $\operatorname{Re} z > 0$ (выбирается та ветвь $\sqrt{2z}$, которая при $z \in \mathbb{R}$, $z > 0$, является положительной функцией), доказать, что X имеет плотность, и найти ее.

Решение. (а) Рассмотрим конечную меру $Q(B) = Ee^{-X}I(X \in B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Тогда $\varphi(t) = \phi(1 - it) = Ee^{itX}e^{-X}$ есть не что иное, как характеристическая функция меры Q . Следовательно (по формуле обращения), Q имеет непрерывную плотность

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \phi(1 - it) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{z: \operatorname{Re} z = 0} e^{xz} \phi(1 + z) dz.$$

Итак, мера Q абсолютно непрерывна относительно меры Лебега λ . Другими словами, если $\lambda(B) = 0$ для некоторого борелевского множества B , то $Q(B) = Ee^{-X}I(X \in B) = 0$ и, значит, $P(X \in B) = 0$, т. е. X с необходимостью имеет плотность $f = f(x)$. Плотности f и g должны быть связаны соотношением $e^{-x}f(x) = g(x)$ (почти всюду по мере Лебега). Переопределим плотность f так, чтобы результирующая плотность была непрерывной функцией. Тогда

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{z: \operatorname{Re} z = 0} e^{x(1+z)} \phi(1 + z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{z: \operatorname{Re} z = 1} e^{xz} \phi(z) dz.$$

(b) Для указанной ветви $\sqrt{2z}$ имеем

$$|e^{-\sqrt{2-2it}}| = e^{-\operatorname{Re} \sqrt{2-2it}} = \exp\left\{-\sqrt{|t|} + o(\sqrt{|t|})\right\}, \quad |t| \rightarrow \infty,$$

поэтому

$$\int_{\mathbb{R}} |e^{-\sqrt{2-2it}}| dt < \infty.$$

Следовательно, ввиду п. (а) величина X имеет непрерывную плотность $f = f(x)$, причем

$$f(x) = 0, \quad x \leq 0,$$

так как $Ee^{-\lambda X} = e^{-\sqrt{2}\lambda} \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \infty$. Пусть, далее, $x > 0$. Тогда (см. п. (а))

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{z: \operatorname{Re} z=1} e^{xz - \sqrt{2}z} dz.$$

Рассмотрим направленный замкнутый контур Γ_n^ε ($n \geq 2, 0 < \varepsilon < 1$) в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, идущий по прямым:

$$(1, -n) \rightarrow (1, n) \rightarrow (-n, \varepsilon) \rightarrow (\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow (\varepsilon, -\varepsilon) \rightarrow (-n, -\varepsilon) \rightarrow (1, -n).$$

В силу голоморфности функции $e^{xz - \sqrt{2}z}$, стоящей под знаком указанного интеграла и определенной в области $D = \{z: -z \notin \mathbb{R}_+\}$, имеем

$$\int_{\Gamma_n^\varepsilon} e^{xz - \sqrt{2}z} dz = 0. \quad (*)$$

Рассмотрим отрезок $(1, n) \rightarrow (-n, 0)$ (обозначим его A_n), длина которого есть $O(n)$ и на котором

$$\begin{aligned} |e^{xz - \sqrt{2}z}| &= e^{x \operatorname{Re} z - \operatorname{Re} \sqrt{2}z} \leq \\ &\leq \exp \left\{ - \left(\frac{xn}{\sqrt{2}} + o(n) \right) \wedge \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \cos \frac{3\pi}{8} + o(\sqrt{n}) \right) \right\}, \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

(мы разбили A_n на две равных по длине части и учли, что $\operatorname{Re} \sqrt{2}z \geq 0$ в D). Следовательно,

$$\left| \int_{A_n} e^{xz - \sqrt{2}z} dz \right| \rightarrow 0.$$

Аналогично, обозначая через B_n отрезок $(-n, 0) \rightarrow (1, -n)$, находим, что

$$\left| \int_{B_n} e^{xz - \sqrt{2}z} dz \right| \rightarrow 0.$$

Таким образом, переходя в формуле (*) к пределу сначала при $\varepsilon \rightarrow 0$, а затем при $n \rightarrow \infty$, находим, что

$$\int_{z: \operatorname{Re} z=1} e^{xz - \sqrt{2}z} dz - \int_{-\infty}^0 e^{xu + i\sqrt{2}|u|} du + \int_{-\infty}^0 e^{xu - i\sqrt{2}|u|} du = 0,$$

или

$$\begin{aligned}
 \int_{z: \operatorname{Re} z=1} e^{xz-\sqrt{2}z} dz &= 2i \int_0^{\infty} e^{-xu} \sin \sqrt{2u} du = \\
 &= 2i \int_0^{\infty} e^{-\frac{xv^2}{2}} \sin v d\frac{v^2}{2} = \frac{2i}{x} \int_0^{\infty} e^{-\frac{xv^2}{2}} \cos v dv = \\
 &= \frac{i\sqrt{2\pi}}{x^{3/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{iv} \frac{\sqrt{x}e^{-\frac{xv^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dv = \frac{i\sqrt{2\pi}}{x^{3/2}} Ee^{\frac{i\xi}{\sqrt{x}}} = \frac{i\sqrt{2\pi}e^{-\frac{1}{2x}}}{x^{3/2}},
 \end{aligned}$$

где $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Итак, требуемая в п. (b) плотность $f(x)$ задается формулой

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2x}}}{\sqrt{2\pi x^3}} I(x \geq 0). \quad \square$$

38. Если $\xi \sim \mathcal{N}(0, v)$, $v > 0$, то

$$Ee^{-\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u} \frac{e^{-\frac{u^2}{2v}}}{\sqrt{2\pi v}} du = e^{\frac{v}{2}}.$$

Вычислить интеграл ($u > 0$)

$$\int_0^{\infty} e^{-v} \frac{e^{-\frac{u^2}{2v}}}{\sqrt{2\pi v}} dv.$$

Решение. Преобразование Буля $x \rightarrow x - \lambda/x$, $x \neq 0$ ($\lambda > 0$), сохраняет меру Лебега на $\mathbb{R}$ (см. задачу II.6.103). Поэтому

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} e^{-v} \frac{e^{-\frac{u^2}{2v}}}{\sqrt{2\pi v}} dv &= \sqrt{2} \int_0^{\infty} e^{-z^2} \frac{e^{-\frac{u^2}{2z^2}}}{\sqrt{\pi}} dz = \frac{e^{-\sqrt{2}u}}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(z-\frac{u}{\sqrt{2}z})^2}}{\sqrt{\pi}} dz = \\
 &= \frac{e^{-\sqrt{2}u}}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} dz = \frac{e^{-\sqrt{2}u}}{\sqrt{2}}. \quad \square
 \end{aligned}$$

39. Пусть X — случайная величина с такой характеристической функцией $\varphi = \varphi(t)$, что $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)| dt < \infty$. Используя тот факт, что $\psi(t) = (1 - |t|)^+$ есть характеристическая функция распределения, имеющего плотность

$$g(x) = \frac{1 - \cos x}{\pi x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

доказать, что X имеет ограниченную непрерывную плотность, задаваемую формулой

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Решение. Пусть Y — случайная величина, не зависящая от X и имеющая плотность $g(x)$. Тогда плотность $f_{\sigma} = f_{\sigma}(x)$ величины $X + \sigma Y$ ($\sigma > 0$) равна

$$f_{\sigma}(x) = \mathbb{E} \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{x-X}{\sigma}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, $X + \sigma Y \xrightarrow{d} X$, $\sigma \rightarrow 0$, и, значит,

$$\int_a^b \mathbb{E} \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{x-X}{\sigma}\right) dx \rightarrow \mathbb{P}(a < X \leq b)$$

для всех точек непрерывности $a < b$ функции распределения X . Прямым подсчетом (с помощью теоремы Фубини) получаем, что для каждого $x \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi_{\sigma}(t) dt = \mathbb{E} \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma|t| \leq 1} e^{it(X-x)} (1 - \sigma|t|) dt = \mathbb{E} \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{x-X}{\sigma}\right),$$

где $\varphi_{\sigma}(t) = (1 - \sigma|t|)^+ \varphi(t)$ — характеристическая функция величины $X + \sigma Y$. Заметим теперь, что для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется условие

$$\int_{\sigma|t| \leq 1} e^{-itx} (1 - \sigma|t|) \varphi(t) dt \rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi(t) dt,$$

причем

$$\left| \int_{\sigma|t| \leq 1} e^{-itx} (1 - \sigma|t|) \varphi(t) dt \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)| dt < \infty.$$

Применяя, наконец, теорему Лебега о мажорируемой сходимости, заключаем, что

$$\int_a^b \mathbb{E} \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{x-X}{\sigma}\right) dx \rightarrow \int_a^b \frac{dx}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi(t) dt = \mathbb{P}(a < X \leq b) \geq 0 \quad (*)$$

(a и b определены выше). Отсюда следует, что случайная величина X имеет плотность $f(x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi(t) dt$. Эта функция ограничена

и непрерывна (тем самым она должна быть неотрицательной в силу условия (*)). $\square$

40. Пусть X — случайная величина с плотностью $f = f(x)$ и характеристической функцией $\varphi = \varphi(t)$. Предположим, что выполнено любое из условий

$$(a) \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|^2 dt < \infty \quad \text{или} \quad (b) \int_{\mathbb{R}} f^2(x) dx < \infty.$$

Применяя формулу обращения из задачи II.12.39, доказать, что справедлива *формула Планшереля*:

$$\int_{\mathbb{R}} f^2(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|^2 dt \quad (< \infty).$$

Решение. Пусть выполнено условие (a). Заметим, что $\psi(t) = |\varphi(t)|^2$, $t \in \mathbb{R}$, есть характеристическая функция величины $X - Y$, где Y — независимая копия величины X . В свою очередь, плотность величины $X - Y$ равна

$$g(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x - z) f(x) dx,$$

где рассматриваемый интеграл конечен для почти всех (по мере Лебега) $z \in \mathbb{R}$. Поскольку $\psi(t)$ — абсолютно интегрируемая функция, по формуле обращения получаем

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itz} \psi(t) dt$$

при $z \in \mathbb{R}$ почти всюду по мере Лебега, откуда, в частности, следует, что почти всюду

$$|g(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\psi(t)| dt < \infty.$$

Покажем, что из этого неравенства следует условие (b). Вследствие задачи II.10.37 имеем

$$g_c(z) = \int_{\mathbb{R}} f_c(x - z) f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f_c(x) f(x + z) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f_c(x) f(x) dx = g_c(0),$$

когда $z \rightarrow 0$, а $f_c(x) = f(x)I(f(x) \leq c)$, $c > 0$. Действительно, при $z \rightarrow 0$ имеем

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f_c(x) [f(x + z) - f(x)] dx \right| \leq c \int_{\mathbb{R}} |f(x + z) - f(x)| dx \rightarrow 0.$$

Далее, $g_c(z) \leq g(z)$ и

$$g_c(0) \uparrow g(0), \quad c \uparrow \infty,$$

поэтому если для некоторых $z_n \rightarrow 0$ величины $g(z_n)$ равномерно ограничены некоторым $M > 0$, то $g(0) = \int_{\mathbb{R}} f^2(x) dx \leq M$.

Итак, можно изначально считать, что выполнено условие (b). Если это так, то g — ограниченная непрерывная функция, так как в этом случае по неравенству Коши—Буняковского (см. также задачу II.10.37)

$$\sup_z g^2(z) \leq \int_{\mathbb{R}} f^2(x-z) dx \int_{\mathbb{R}} f^2(x) dx = g(0)^2 < \infty,$$

$$|g(u) - g(v)|^2 \leq g(0) \int_{\mathbb{R}} |f(x-u) - f(x-v)|^2 dx \rightarrow 0, \quad u \rightarrow v.$$

Рассмотрим теперь величину $X - Y + \sigma Z$, где $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ не зависит от X, Y . Ее характеристическая функция и плотность соответственно равны

$$\varphi_{\sigma}(t) = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} |\varphi(t)|^2, \quad h(z) = \mathbb{E} g(z - \sigma Z),$$

где $t, z \in \mathbb{R}$. Поэтому $\int_{\mathbb{R}} |\varphi_{\sigma}(t)| dt < \infty$ и $h(z)$ непрерывна по z , так что по формуле обращения имеем

$$h(z) = \mathbb{E} g(z - \sigma Z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itz} \varphi_{\sigma}(t) dt$$

везде и, в частности, при $z = 0$. Переходя теперь к пределу при $\sigma \rightarrow 0$ и применяя теорему Лебега о мажорируемой сходимости (функция g ограничена и непрерывна), получаем искомое равенство. $\square$

Замечание. При выводе формулы Планшереля, в частности, было установлено, что если функция

$$g(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x-z) f(x) dx, \quad z \in \mathbb{R}$$

(свертка плотности $f(x)$ с $f(-x)$), равномерно ограничена при $z \in \{z_1, z_2, \dots\}$, $z_n \rightarrow 0$, то $g(z)$ есть ограниченная непрерывная на $\mathbb{R}$ функция. Интересно отметить, что существуют такие плотности $f(x)$, для которых функция $g(z)$ разрывна в каждой точке. К примеру,

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} h(x - q_n), \quad \text{где} \quad h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & x \in (0, 1], \\ 0, & x \notin (0, 1], \end{cases}$$

$\{q_1, q_2, \dots\} = \mathbb{Q}$. Функция $f(x)$ действительно является плотностью, так как $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$ и $f(x) \geq 0$, и, значит, $f(x) < \infty$ почти всюду по

мере Лебега. К тому же свертка $g(z)$ также конечна почти всюду по мере Лебега (это следует из теоремы Фубини). Однако очевидно, что $g(z) = \infty$ при $z \in \mathbb{Q}$. Следовательно, g разрывна в любой точке.

41. Пусть X и Y — независимые случайные величины, $\varphi = \varphi(t)$ и $\phi = \phi(t)$ — их характеристические функции. Доказать справедливость соотношения Парсеваля:

$$\mathbb{E}\phi(X - t) = \mathbb{E}e^{-itY}\varphi(Y) \quad (*)$$

для каждого $t \in \mathbb{R}$.

Вывести отсюда, что для любого $\sigma > 0$ выполняется равенство

$$\mathbb{E}e^{-\frac{(X-t)^2}{2\sigma^2}} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ity} e^{-\frac{\sigma^2 y^2}{2}} \varphi(y) dy. \quad (**)$$

Решение. Все интегралы существуют, так что по теореме Фубини

$$\mathbb{E}\phi(X - t) = \mathbb{E}e^{i(X-t)Y} = \mathbb{E}e^{-itY}\varphi(Y).$$

Полагая теперь, что $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^{-2})$, получаем второе соотношение. $\square$

42. Вывести из равенства (**), установленного в предыдущей задаче, что если функции распределения F и G имеют одну и ту же характеристическую функцию, то $F = G$.

Решение. Пусть X и Y — случайные величины с функциями распределения F и G . Из равенства (**) вытекает, что для всех $t \in \mathbb{R}$ и $\sigma > 0$ выполняется соотношение

$$\mathbb{E}e^{-\frac{(t-X)^2}{2\sigma^2}} = \mathbb{E}e^{-\frac{(t-Y)^2}{2\sigma^2}},$$

и, значит, для любого $x \in \mathbb{R}$ по теореме Фубини

$$\begin{aligned} \mathbb{E}I(\sigma Z + X \leq x) &= \mathbb{E} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-X)^2}{2\sigma^2}} \frac{dt}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = \int_{-\infty}^x \mathbb{E}e^{-\frac{(t-X)^2}{2\sigma^2}} \frac{dt}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = \\ &= \int_{-\infty}^x \mathbb{E}e^{-\frac{(t-Y)^2}{2\sigma^2}} \frac{dt}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = \mathbb{E} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-Y)^2}{2\sigma^2}} \frac{dt}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = \mathbb{E}I(\sigma Z + Y \leq x), \end{aligned}$$

где $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ — случайная величина, не зависящая от X и Y . Переходя к пределу при $\sigma \rightarrow 0$, получаем, что $\mathbb{P}(\sigma Z + X \leq x) \rightarrow F(x)$ во всех точках x непрерывности функции F . Аналогично $\mathbb{P}(\sigma Z + Y \leq x) \rightarrow G(x)$ во всех точках непрерывности функции G . Таким образом, $F(x) = G(x)$ во всех точках x , в которых F и G непрерывны одновременно. Следовательно, $F = G$. $\square$

43. Показать, что если $\varphi(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ , то преобразование Лапласа величины $|\xi|$ задается формулой

$$\mathbb{E}e^{-\lambda|\xi|} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda\varphi(t)}{\lambda^2 + t^2} dt, \quad \lambda > 0.$$

Решение. Рассмотрим величину η , не зависящую от ξ и имеющую распределение Коши с плотностью $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ и характеристической функцией $e^{-|t|}$. По теореме Фубини получаем

$$\mathbb{E}e^{-\lambda|\xi|} = \mathbb{E}e^{i\lambda\xi\eta} = \mathbb{E}\varphi(\lambda\eta) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda}{\pi(\lambda^2 + t^2)} \varphi(t) dt, \quad \lambda > 0. \quad \square$$

44. Пусть $F = F(x)$ — функция распределения и $\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x)$ — ее характеристическая функция. Согласно утверждению б) теоремы 3 из В1.П.12 свойство $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)| dt < \infty$ обеспечивает существование *непрерывной* плотности $f(x)$.

Привести пример, когда у функции распределения $F = F(x)$ существует непрерывная плотность, но $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)| dt = \infty$.

Решение. Можно взять функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую условиям теоремы По́йа, причем такую, что

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)| dt = \infty \quad \text{и} \quad (\varphi(t))_{t \geq 0} \in C^1,$$

а далее воспользоваться замечанием после задачи П.12.61. Условие $(\varphi(t))_{t \geq 0} \in C^1$ обеспечит непрерывность соответствующей плотности. $\square$

45. Пусть $\varphi = \varphi(t)$ — характеристическая функция. Доказать, что
(а) φ отвечает распределению с ограниченной плотностью $f = f(x)$, если

$$\int_{\mathbb{R}} |\operatorname{Re} \varphi(t)| dt < \infty;$$

(б) φ отвечает распределению с плотностью $f = f(x)$ из L^2 , если

$$\int_{\mathbb{R}} |\operatorname{Re} \varphi(t)|^2 dt < \infty.$$

Замечание. При каждом $p > 2$ найдется сингулярное распределение, для которого $\int_{\mathbb{R}} |\operatorname{Re} \varphi(t)|^p dt < \infty$ (см. доказательство теоремы 13.4.2 в книге [74]). При $1 \leq p \leq 2$ из условия $\int_{\mathbb{R}} |\operatorname{Re} \varphi(t)|^p dt < \infty$ следует существование плотности из L^q , $q = p/(p-1)$.

Решение. Пусть X — случайная величина с характеристической функцией φ и ξ — не зависящая от X величина, $P(\xi=1)=P(\xi=-1)=1/2$. Тогда

$$\operatorname{Re} \varphi(t) = E \cos tX = E \frac{e^{-itX} + e^{itX}}{2} = E e^{it\xi X}$$

есть характеристическая функция для ξX . Ввиду задачи II.4.1 если величина ξX имеет плотность $g = g(x)$, то X также обладает такой плотностью $f = f(x)$, что

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Кроме того, $g \in L^p$ ($1 \leq p \leq \infty$) тогда и только тогда, когда $f \in L^p$. Таким образом, п. (а) следует из формулы обращения.

Для проверки п. (b) надо показать, что $l(h) = Eh(\xi X)$ есть линейный ограниченный функционал в гильбертовом пространстве L^2 (с лебеговой мерой на $\mathbb{R}$). Любой такой функционал с необходимостью представляется в виде

$$l(h) = (f, h) = \int_{\mathbb{R}} f(x)h(x) dx$$

для некоторой функции $f \in L^2$, поэтому $f \neq 0$ ($= f$ почти всюду) и будет искомой плотностью.

В качестве f можно взять $\sum_{n \geq 1} l_n e_n$, где $l_n = l(e_n)$ и (e_n) — любая полная ортонормированная система в L^2 . При этом f будет корректно определенным элементом пространства L^2 , так как

$$\sum_{n \geq 1} l_n^2 = \lim_m l \left(\sum_{n \leq m} \frac{l_n e_n}{\sqrt{\sum_{n \leq m} l_n^2}} \right)^2 \leq \sup_{(h,h)=1} l(h)^2 < \infty.$$

Достаточно проверить ограниченность $l(h)$ для всех h , являющихся конечными линейными комбинациями элементов e_n , $n \geq 1$. Если в качестве e_n брать только ограниченные непрерывные функции (такая система найдется), то их линейная комбинация будет также непрерывна и ограничена.

Итак, покажем, что $\sup |l(h)| < \infty$, где $\sup$ берется по всем таким непрерывным ограниченными функциям h , что $(h, h) = 1$. Пусть $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ не зависит от ξX . Тогда

$$Eh(\xi X + \sigma Z) \rightarrow Eh(\xi X) = l(h), \quad \sigma \rightarrow 0.$$

Обозначим $f_\sigma = f_\sigma(x)$ ($\sigma \neq 0$) плотность величины $\xi X + \sigma Z$. Имеем

$$\begin{aligned} [Eh(\xi X + \sigma Z)]^2 &= (h, f_\sigma)^2 \leq (f_\sigma, f_\sigma) = \int_{\mathbb{R}} f_\sigma^2(x) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\sigma^2 t^2/2} |\operatorname{Re} \varphi(t)|^2 dt < \infty, \end{aligned}$$

где в последнем равенстве мы применили равенство Планшереля (см. задачу II.12.40).

Следовательно,

$$\sup |l(h)|^2 \leq \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{-\sigma^2 t^2/2} |\operatorname{Re} \varphi(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |\operatorname{Re} \varphi(t)|^2 dt < \infty.$$

На этом завершается доказательство ограниченности функционала $l(h)$. $\square$

46. (а) Показать, что функция

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{\pi x^2} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin(x/2)}{x/2} \right]^2, \quad x \in \mathbb{R},$$

является плотностью некоторого распределения вероятностей. При этом характеристическая функция, соответствующая f , равна

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

(б) С помощью *формулы отражения* для гамма-функции

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad z \in \mathbb{R},$$

показать, что у плотностей вероятностей

$$f(x) = \frac{1}{\pi \operatorname{ch} x} \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

характеристическими функциями являются соответственно

$$\varphi(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi t}{2}} \quad \text{и} \quad \phi(t) = \frac{\pi t}{2 \operatorname{sh} \frac{\pi t}{2}}.$$

(с) Найти распределения, которым отвечают характеристические функции вида

$$\frac{1}{1-it}, \quad \frac{1}{1+t^2}, \quad \cos t, \quad \frac{1}{2-\cos t}.$$

Решение. (а) Функция φ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, поэтому плотность, отвечающую φ , можно найти по формуле обращения

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \cos(tx)(1-t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin(tx)}{x} dt = \frac{1 - \cos x}{\pi x^2}. \end{aligned}$$

Функция $f(x)$ неотрицательна и интегрируема на $\mathbb{R}$, при этом ее интеграл равен

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \varphi(0) = 1.$$

Следовательно, f — плотность, а φ — характеристическая функция.

(b) Если X — случайная величина с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\pi \operatorname{ch} x} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{e^x + e^{-x}},$$

то $\mathbb{E}e^{\lambda X} < \infty$ тогда и только тогда, когда $|\lambda| < 1$. Следовательно, функция комплексного переменного $\phi(z) = \mathbb{E}e^{zX}$ голоморфна в полосе $L = \{z \in \mathbb{C}: |\operatorname{Re} z| < 1\}$, т. е. в L существует производная

$$\phi'(z) = \lim_{u \rightarrow z} \frac{\phi(u) - \phi(z)}{u - z} = \mathbb{E} \lim_{u \rightarrow z} \frac{e^{uX} - e^{zX}}{u - z} = \mathbb{E} X e^{zX}.$$

Последнее легко вывести из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости.

Для доказательства равенства

$$\phi(z) = \frac{1}{\cos \frac{\pi z}{2}}, \quad z \in L,$$

по теореме единственности для голоморфных функций достаточно показать, что эти функции совпадают на некотором бесконечном множестве, имеющем хотя бы одну предельную точку, например при $-1 < z < 1$ и $z \in \mathbb{R}$, а затем воспользоваться равенством $\varphi(t) = \phi(it)$, $t \in \mathbb{R}$.

Для $-1 < t < 1$ имеем

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx} dx}{e^x + e^{-x}} = \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{y^t dy}{y^2 + 1} = -\frac{2}{\pi} \int_0^1 (u^{-1} - 1)^{t/2} u d\sqrt{u^{-1} - 1} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 (1-u)^{(t+1)/2-1} u^{(1-t)/2-1} du = B\left(\frac{1+t}{2}, \frac{1-t}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{1-t}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-t}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{\sin \frac{(1-t)\pi}{2}} = \frac{1}{\cos \frac{\pi t}{2}}.\end{aligned}$$

С помощью тех же рассуждений находится характеристическая функция, отвечающая плотности $g = g(x)$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \frac{2e^{itx} dx}{(e^x + e^{-x})^2} &= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{2y^{t+1} dy}{(y^2 + 1)^2} = \int_0^1 (1-u)^{t/2} u^{-t/2} du = \\ &= \frac{\Gamma\left(1 + \frac{t}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{t}{2}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{t}{2} \Gamma\left(\frac{t}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{t}{2}\right) = \frac{\pi t}{2 \sin \frac{t\pi}{2}}\end{aligned}$$

для $-1 < t < 1$.

(с) Имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-it} &= \int_{\mathbb{R}_+} e^{itx} e^{-x} dx = \mathbb{E}e^{itX}, \\ \frac{1}{1+t^2} &= \frac{1}{1-it} \frac{1}{1+it} = \mathbb{E}e^{it(X-Y)}, \\ \cos t &= \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \mathbb{E}e^{itZ}, \\ \frac{1}{2 - \cos t} &= \sum_{n \geq 0} \frac{\cos^n t}{2^{n+1}} = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d \sum_{n \geq 0} \frac{F_n(x)}{2^{n+1}},\end{aligned}$$

где случайные величины X, Y, Z таковы, что $P(X \leq x) = (1 - e^{-x})I(x > 0)$, $x \in \mathbb{R}$, Y — независимая копия величины X , $P(Z = \pm 1) = 1/2$, а также $F_n(t)$, $n \geq 1$, — биномиальные функции распределения с параметрами $(1/2, n)$, причем $F_0(x) = I(x \geq 0)$, $x \in \mathbb{R}$. $\square$

47. Пусть $f = f(x)$ — плотность некоторого распределения вероятностей, $\varphi = \varphi(t)$ — его характеристическая функция. Используя задачу П.12.46(а), убедиться, что при всех $\sigma > 0$ функция

$$f_{\sigma}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma|t| \leq 1} e^{-itx} \varphi(t) (1 - \sigma|t|) dt,$$

является плотностью, причем

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_{\sigma}(x)| dx \rightarrow 0, \quad \sigma \rightarrow 0.$$

Решение. Согласно задаче II.12.46(a) имеем

$$\varphi(t)(1 - \sigma|t|)^+ = Ee^{it(X+\sigma Y)},$$

где величины X, Y независимы, X имеет плотность $f(x)$, а плотность величины Y равна

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin(x/2)}{x/2} \right]^2.$$

Поэтому вследствие формулы обращения $f_{\sigma}(x)$ есть плотность величины $X + \sigma Y$ и

$$f_{\sigma}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - \sigma z) g(z) dz.$$

Следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_{\sigma}(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} h(\sigma z) g(z) dz = Eh(\sigma Y),$$

где

$$h(u) = \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f(x - u)| dx, \quad u \in \mathbb{R}.$$

В силу задачи II.10.37 имеем $h(\sigma Y) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow 0$ всюду. Поскольку $|h(\sigma Y)| \leq 2$, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости $Eh(\sigma Y) \rightarrow 0$, откуда вытекает искомое утверждение. $\square$

48. (a) Показать, что ряд

$$\sum_{n \geq 1} a_n \sin nt$$

сходится равномерно на $\mathbb{R}$, когда $na_n \rightarrow 0$ и $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ для всех n .

(b) Убедиться на примере, что из гладкости на $\mathbb{R}$ характеристической функции $\varphi(t)$ случайной величины ξ , вообще говоря, не вытекает, что $E|\xi| < \infty$.

Решение. (a) В силу периодичности функции $f(x) = \sin nx$ достаточно доказать равномерную сходимость при $t \in (0, \pi]$. Нам потребуются вспомогательные соотношения вида

$$s_n = \sum_{l=1}^n \sin lt = \frac{\sin \frac{(n+1)t}{2} \cdot \sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}},$$

$$|s_n| \leq \frac{\frac{(n+1)t}{2} \cdot \frac{nt}{2}}{\frac{t}{2}} = (n+1)n \cdot \frac{\pi t}{4}, \quad nt \leq 1, \quad \text{и} \quad |s_n| \leq \frac{\pi}{t}, \quad nt > 1.$$

Используя приведенные оценки, находим, что равномерно по t

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{l=m}^n a_l \sin lt \right| &= \left| \sum_{l=m}^n a_l (s_l - s_{l-1}) \right| \leq \\
 &\leq ma_m + na_n + \left| \sum_{l=m}^{n-1} (a_l - a_{l+1}) s_l \right| \leq \\
 &\leq ma_m + na_n + \frac{\pi t}{4} \sum_{m \leq l \leq t^{-1}} (a_l - a_{l+1})(l+1)l + \frac{\pi}{t} \sum_{t^{-1} < l \leq n} (a_l - a_{l+1}) \leq \\
 &\leq 2ma_m + na_n + \pi \frac{I(m \leq t^{-1})}{t^{-1}} \sum_{1 \leq l \leq t^{-1}} (l+1)a_l + \pi a_{[t^{-1}] \vee m} \cdot t^{-1} \rightarrow 0,
 \end{aligned}$$

где $m, n \rightarrow \infty$, $1 \leq m < n$, а $[x]$ — целая часть числа $x \geq 0$.

(b) Пусть ξ — симметричная случайная величина со значениями в $\mathbb{Z}$, причем

$$P(|\xi| = n) = p_n, \quad E|\xi| = \sum n p_n = \infty,$$

где $n \geq 1$, $n^2 p_n \rightarrow 0$ и $n p_n$ убывает по n . Покажем, что при таких ограничениях характеристическая функция данной величины

$$\varphi(t) = P(\xi = 0) + \sum p_n \cos nt$$

является гладкой (несмотря на равенство $E|\xi| = \infty$). В самом деле, поскольку ряд $\sum p_n (\cos nt)' = -\sum n p_n \sin nt$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$ (см. п. (a)), его можно интегрировать почленно, и, значит, производная $\varphi'(t)$ существует, непрерывна и совпадает с $-\sum n p_n \sin nt$. $\square$

49. Пусть $\varphi = \varphi(t)$ — характеристическая функция случайной величины X .

(a) Показать, что $E|X|^p < \infty$ для заданного p , $0 < p < 2$, в том и только том случае, когда

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \operatorname{Re} \varphi(t)}{|t|^{1+p}} dt < \infty,$$

и при этом

$$E|X|^p = C_p \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \operatorname{Re} \varphi(t)}{|t|^{1+p}} dt,$$

где

$$C_p = \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos t}{|t|^{1+p}} dt \right]^{-1} = \frac{\Gamma(1+p)}{\pi} \sin \frac{p\pi}{2}.$$

(b) Установить, что если $E|X| < \infty$, то

$$E|X| = -(R) \int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{Re} \varphi'(t)}{\pi t} dt,$$

где $(R) \int_{\mathbb{R}}$ — несобственный интеграл Римана.

Решение. (a) Утверждение следует из теоремы Фубини, а также равенства

$$|x|^p = C_p \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos xt}{|t|^{1+p}} dt, \quad 0 < p < 2,$$

выполненного для указанного в условии C_p .

(b) Вначале отметим, что производная $[\operatorname{Re} \varphi(t)]' = \operatorname{Re} \varphi'(t) = EX \sin tX$ существует в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости и того факта, что $E|X| < \infty$. Полагая $p = 1$ в п. (a) и учитывая, что интегралы Римана и Лебега совпадают (когда они оба определены), получаем

$$\begin{aligned} E|X| &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \operatorname{Re} \varphi(t)}{\pi t^2} dt = \lim_{a, b, \varepsilon} \left[(R) \int_a^{-\varepsilon} + (R) \int_{\varepsilon}^b \right] \frac{1 - \operatorname{Re} \varphi(t)}{\pi t^2} dt = \\ &= \lim_{a, b, \varepsilon} \left[-\frac{1 - \operatorname{Re} \varphi(t)}{\pi t} \left[\left|_a^{-\varepsilon} + \left|_{\varepsilon}^b \right. \right] - \left[(R) \int_a^{-\varepsilon} + (R) \int_{\varepsilon}^b \right] \frac{\operatorname{Re} \varphi'(t)}{\pi t} dt \right] = \\ &= -\lim_{a, b, \varepsilon} \left[(R) \int_a^{-\varepsilon} + (R) \int_{\varepsilon}^b \right] \frac{\operatorname{Re} \varphi'(t)}{\pi t} dt = -(R) \int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{Re} \varphi'(t)}{\pi t} dt, \end{aligned}$$

где $a \rightarrow -\infty$, $b \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Здесь мы также воспользовались тем (см. задачу II.12.31), что $1 - \operatorname{Re} \varphi(t) = o(t)$ при $E|X| \leq \infty$ и $t \rightarrow 0$ ($\Re \varphi(t)$ есть характеристическая функция величины ξX , где величина ξ не зависит от X и $P(\xi = \pm 1) = 1/2$). $\square$

50. Моменты EX^n и абсолютные моменты $E|X|^n$ случайной величины X могут быть выражены для целых $n \geq 1$ через производные порядка n от характеристической функции $\varphi(t) = Ee^{itX}$, $t \in \mathbb{R}$. В случае же дробных $\alpha > 0$ для получения соответствующих результатов для EX^α и $E|X|^\alpha$ приходится обращаться к понятию дробных производных, вводимых следующим образом.

Пусть n — целое неотрицательное число и $0 < a < 1$. Дробной производной $\frac{d^{n+a} f(t)}{dt^{n+a}}$ функции $f = f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, называется функция

$$\frac{a}{\Gamma(1-a)} \int_{-\infty}^t \frac{f^{(n)}(t) - f^{(n)}(s)}{(t-s)^{1+a}} ds$$

(в предположении, что интеграл определен).

В частности, если $\varphi = \varphi(t)$ есть характеристическая функция случайной величины X , то

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+a} \varphi(0)}{dt^{n+a}} &= \frac{a}{\Gamma(1-a)} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\varphi^{(n)}(0) - \varphi^{(n)}(-s)}{s^{1+a}} ds = \\ &= \frac{i^n a}{\Gamma(1-a)} \int_{\mathbb{R}_+} [EX^n(1 - \cos sX) + iEX^n \sin sX] \frac{ds}{s^{1+a}}. \end{aligned}$$

Показать, что для четных n абсолютные моменты $E|X|^{n+a}$ конечны тогда и только тогда, когда

- (1) $EX^n < \infty$;
- (2) $\frac{d^{n+a} \operatorname{Re} \varphi(0)}{dt^{n+a}}$ существует.

В этом случае

$$E|X|^{n+a} = \frac{(-1)^{n/2}}{\cos \frac{a\pi}{2}} \frac{d^{n+a} \operatorname{Re} \varphi(0)}{dt^{n+a}}.$$

Замечание. Более подробное обсуждение вопросов, связанных с нахождением $E|X|^{n+a}$ для любых $n \geq 0$ и $0 < a < 1$, можно найти в книге [81].

Решение. Если выполнено условие 1, то существуют $\varphi^{(n)}(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Если, кроме того, имеет место условие 2, то

$$\left. \frac{d^{n+a} \operatorname{Re} \varphi(t)}{dt^{n+a}} \right|_{t=0} = \frac{(-1)^{n/2} a}{\Gamma(1-a)} \int_{\mathbb{R}_+} EX^n(1 - \cos sX) \frac{ds}{s^{1+a}}.$$

Воспользуемся теперь следующей формулой:

$$C_b \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1 - \cos sx}{s^{1+b}} ds = |x|^b,$$

верной для всех $0 < b < 2$ и $x \in \mathbb{R}$ при

$$C_b = \frac{2\Gamma(1+b)}{\pi} \sin \frac{\pi b}{2}.$$

К тому же по формуле Фубини

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+a} \operatorname{Re} \varphi(0)}{dt^{n+a}} &= \frac{(-1)^{n/2} a}{\Gamma(1-a)} EX^n \int_{\mathbb{R}_+} (1 - \cos sX) \frac{ds}{s^{1+a}} = \\ &= (-1)^{n/2} \frac{\pi}{2} \left[\Gamma(1-a) \frac{\Gamma(1+a)}{a} \sin \frac{\pi a}{2} \right]^{-1} \cdot E|X|^{n+a} = \\ &= (-1)^{n/2} \frac{\pi}{2} \left[\frac{\pi}{\sin \pi a} \cdot \sin \frac{\pi a}{2} \right]^{-1} \cdot E|X|^{n+a} = (-1)^{n/2} \cos \frac{\pi a}{2} \cdot E|X|^{n+a}. \end{aligned}$$

Аналогично устанавливается обратное утверждение. $\square$

51. Пусть X — неотрицательная случайная величина с преобразованием Лапласа $\phi(\lambda) = \mathbf{E}e^{-\lambda X}$, $\lambda \geq 0$.

(а) Показать, что для всякого $0 < p < 1$ выполняется равенство

$$\mathbf{E}X^p = \frac{p}{\Gamma(1-p)} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1-\phi(\lambda)}{\lambda^{p+1}} d\lambda.$$

(б) Показать, что для всякого $p > 0$ выполняется равенство

$$\mathbf{E}X^{-p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_{\mathbb{R}_+} \phi(\lambda) \lambda^{p-1} d\lambda.$$

Решение. Искомые представления вытекают (в силу теоремы Фубини) из следующих формул, справедливых при $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} x^p &= \frac{p}{\Gamma(1-p)} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1-e^{-\lambda x}}{\lambda^{p+1}} d\lambda, \quad p \in (0, 1), \\ x^{-p} &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\lambda x} \lambda^{p-1} d\lambda, \quad p > 0. \quad \square \end{aligned}$$

52. Пусть X — неотрицательная случайная величина.

(а) *Двойным преобразованием Лапласа* или *преобразованием Стилтjеса* (см. [99]) величины X называется функция $\bar{\psi}(\lambda) = \mathbf{E}(X + \lambda)^{-1}$, $\lambda > 0$. Доказать, что при $0 < p < 1$ выполняется равенство

$$\mathbf{E}X^{-p} = \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(1-p)} \int_{\mathbb{R}_+} \bar{\psi}(\lambda) \lambda^{-p} d\lambda.$$

(б) *Преобразованием Торина* (см. [99]) величины X называется функция $\bar{\phi}(\lambda) = \mathbf{E} \ln(1 + X/\lambda)$, $\lambda > 0$. Показать, что для всякого $0 < p < 1$ выполняется равенство

$$\mathbf{E}X^p = \frac{p}{\Gamma(p)\Gamma(1-p)} \int_{\mathbb{R}_+} \bar{\phi}(\lambda) \lambda^{p-1} d\lambda.$$

Решение. Требуемые соотношения вытекают из равенств

$$\begin{aligned} x^{-p} &= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(1-p)} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\lambda^{-p}}{x + \lambda} d\lambda, \\ x^p &= \frac{p}{\Gamma(p)\Gamma(1-p)} \int_{\mathbb{R}_+} \ln(1 + x/\lambda) \lambda^{p-1} d\lambda, \end{aligned}$$

справедливых при всех $x \geq 0$. Выведем первое равенство из формул, использованных при решении предыдущей задачи. Без ограничения

общности можно считать, что $x = 1$ (иначе сделаем в подынтегральном выражении замену $v = \lambda/x$, $x > 0$). Имеем

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{p}{\Gamma(1-p)} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda^{p+1}} d\lambda = \\
 &= \frac{p}{\Gamma(1-p)} \int_{\mathbb{R}_+} (1-e^{-\lambda}) \left[\frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-u\lambda} u^p du \right] d\lambda = \\
 &= \frac{p}{\Gamma(p+1)\Gamma(1-p)} \int_{\mathbb{R}_+} u^p du \int_{\mathbb{R}_+} [e^{-u\lambda} - e^{-\lambda(u+1)}] d\lambda = \\
 &= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(1-p)} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{u^{p-1}}{u+1} du = \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(1-p)} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{v^{-p}}{1+v} dv.
 \end{aligned}$$

Докажем теперь второе равенство:

$$\begin{aligned}
 1 &= \int_0^1 p u^{p-1} du = \int_0^1 \left[\frac{p}{\Gamma(p)\Gamma(1-p)} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\lambda^{p-1}}{u+\lambda} d\lambda \right] du = \\
 &= \frac{p}{\Gamma(p)\Gamma(1-p)} \int_{\mathbb{R}_+} \lambda^{p-1} d\lambda \int_0^1 \frac{1}{u+\lambda} du = \\
 &= \frac{p}{\Gamma(p)\Gamma(1-p)} \int_{\mathbb{R}_+} \lambda^{p-1} \ln \frac{\lambda+1}{\lambda} d\lambda. \quad \square
 \end{aligned}$$

53. Пусть X, Y — независимые случайные величины с распределением $\mathcal{N}(0, 1)$, а величина C имеет распределение Коши с плотностью $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$.

Доказать непосредственным подсчетом характеристической функции величины X/Y , что $X/Y \stackrel{d}{=} C$.

Решение. Используя независимость величин X и Y , находим, что

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} e^{itX/Y} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{itx/y - \frac{x^2+y^2}{2}} dx dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{it \operatorname{tg} \theta - \frac{r^2}{2}} r d\theta dr = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{it \operatorname{tg} \theta} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{it \operatorname{tg} \theta} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{itu} \frac{du}{1+u^2} = \mathbb{E} e^{itC}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, распределения величин X/Y и C совпадают. $\square$

54. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые случайные величины, распределенные по закону $\mathcal{N}(0, 1)$. Для $n \geq 1$ положим

$$X_n = \xi_1 + \dots + \xi_n \quad \text{и} \quad S_n = X_1 + \dots + X_n.$$

Пользуясь методом характеристических функций, показать, что

$$\frac{S_n}{n^{3/2}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1/3), \quad n \rightarrow \infty.$$

Решение. Утверждение вытекает из соотношения

$$\ln \varphi_{S_n/n^{3/2}}(t) = -\frac{t^2}{2n^3} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)^2 \rightarrow -\frac{t^2}{6}, \quad n \rightarrow \infty. \quad \square$$

55. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, причем $\eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Пусть также $f = f(x)$ — ограниченная борелевская функция с компактным носителем. Показать, что для всякого $\sigma > 0$ выполняется равенство

$$\mathbb{E} f(\xi + \sigma\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \varphi(t) \hat{f}(-t) dt, \quad (*)$$

где $\varphi(t) = \mathbb{E} e^{it\xi}$ и $\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x) dx$.

Сформулировать аналогичный результат для векторных величин ξ и η .

Решение. Характеристическая функция величины $\zeta = \xi + \sigma\eta$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$ и равна $e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \varphi(t)$. Последнее означает, что плотность величины ζ равна

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \varphi(t) dt.$$

Используя теперь теорему Фубини для ограниченных мер $|f(x)| dx$ и $e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} dt$, получаем искомую формулу (*).

Для независимых случайных векторов ξ и $\eta \sim \mathcal{N}(0, I)$, принимающих значения в $\mathbb{R}^n$ (здесь I — единичная матрица размера $n \times n$), формула (*) переписывается в виде

$$\mathbb{E} f(\xi + \sigma\eta) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\sigma^2 \langle t, t \rangle}{2}} \varphi(t) \hat{f}(-t) dt,$$

где $\varphi(t) = \mathbb{E} e^{i\langle t, \xi \rangle}$ и $\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t, x \rangle} f(x) dx$. $\square$

56. Используя равенство (*) из предыдущей задачи, доказать, что характеристическая функция $\varphi(t)$ всякой случайной величины ξ определяет ее распределение.

Решение. Поскольку $\xi + \sigma\eta \rightarrow \xi$ п. н. при $\sigma \rightarrow 0$, получаем, что $f(\xi + \sigma\eta) \rightarrow f(\xi)$ с вероятностью единица, когда $\mathbb{P}(\xi \in \Delta_f) = 0$ (Δ_f —

множество точек разрыва функции f). Поэтому в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости в условиях предыдущей задачи из соотношения (*) вытекает равенство

$$\mathbf{E} f(\xi) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \mathbf{E} f(\xi + \sigma\eta) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \varphi(t) \hat{f}(-t) dt, \quad (**)$$

справедливое для любой такой ограниченной борелевской функции f с компактным носителем, что $\mathbf{P}(\xi \in \Delta_f) = 0$. Отсюда заключаем, что характеристическая функция $\varphi(t)$ действительно полностью определяет распределение случайной величины ξ . Утверждение (**) верно и в случае векторных величин ξ . Это вытекает из многомерного обобщения свойства (*). $\square$

57. Пусть $\varphi = \varphi(t)$ — такая характеристическая функция, что для некоторого $b > 0$ выполняется условие

$$|\varphi(t)| \leq a \quad \text{для} \quad |t| \geq b,$$

где $0 < a < 1$. Показать, что тогда для $|t| < b$ справедливо *неравенство Крамера*

$$|\varphi(t)| \leq 1 - (1 - a^2) \frac{t^2}{8b^2}.$$

Решение. Для $t = 0$ неравенство тривиально. Пусть $|t| > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ таково, что $2^{n-1}|t| < b \leq 2^n|t|$. Осталось применить неравенство $1 - |\varphi(2t)|^2 \leq 4(1 - |\varphi(t)|^2)$ из II.12.29, обеспечивающее искомую оценку

$$1 - a^2 \leq 1 - |\varphi(2^n t)|^2 \leq 4^n (1 - |\varphi(t)|^2) \leq \frac{8b^2}{t^2} (1 - |\varphi(t)|). \quad \square$$

58. (а) (*Барр, Ессеев*.) Пусть $\varphi = \varphi(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ . Показать, что для любого $t \neq 0$ справедливы неравенства

$$\left| \frac{1 - \varphi(t)}{t^p} \right| \leq C_p \mathbf{E} |\xi|^p, \quad 0 < p \leq 1,$$

$$\left| \frac{1 - \operatorname{Re} \varphi(t)}{t^p} \right| \leq C_p \mathbf{E} |\xi|^p, \quad 1 < p \leq 2,$$

где $C_p > 0$ зависит только от p .

(б) (*Н. Г. Ушаков*.) Показать, что выполнено неравенство

$$|\varphi(t)| \geq 1 - \frac{t^2 \mathbf{D}\xi}{2}$$

и если $\mathbf{E}\xi = 0$, то

$$|1 - \varphi(t)| \leq \frac{t^2 \mathbf{E}\xi^2}{2}.$$

Решение. (а) При $p \in (0, 1]$ имеем

$$|1 - \varphi(t)| \leq E|e^{it\xi} - 1| \leq E|t\xi|I(|t\xi| \leq 1) + 2P(|t\xi| > 1) \leq 3E|t\xi|^p.$$

Пусть теперь $p \in (1, 2]$. Тогда

$$\begin{aligned} |1 - \operatorname{Re}\varphi(t)| &\leq E[1 - \cos(t\xi)] \leq \\ &\leq E\frac{|t\xi|^2}{2}I(|t\xi| \leq 1) + 2P(|t\xi| > 1) \leq \frac{5}{2}E|t\xi|^p. \end{aligned}$$

(б) Если $E\xi = 0$, то

$$|1 - \varphi(t)| = |E[e^{it\xi} - 1 - it\xi]| \leq E|e^{it\xi} - 1 - it\xi| \leq \frac{t^2 E\xi^2}{2}.$$

Рассмотрим теперь произвольную такую случайную величину ξ , что $E\xi^2 < \infty$. По доказанному

$$1 - |\varphi(t)| \leq |1 - e^{-iat}\varphi(t)| \leq \frac{t^2 E(\xi - a)^2}{2},$$

где $a = E\xi$. Это и есть искомое неравенство. $\square$

59. (Дриер.) Пусть (ξ, η) — случайный вектор, имеющий равномерное распределение на множестве

$$A = \left\{ (x, y) \in [-1, 1]^2 : \frac{x}{y} > 1 \text{ или } \frac{y}{x} < -1 \right\}.$$

Показать, что случайные величины ξ и η *зависимы*, равномерно распределены на $[-1, 1]$, однако

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_{\xi}(t)\varphi_{\eta}(t), \quad \varphi_{\xi-\eta}(t) = \varphi_{\xi}(t)\varphi_{\eta}(-t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Решение. Анализируя графическое представление множества A на плоскости, легко убедиться, что ξ и η равномерно распределены на $[-1, 1]$ и $\xi + \eta \stackrel{d}{=} \xi - \eta$. Поэтому ξ и η *зависимы* (иначе вектор (ξ, η) был бы равномерно распределен на $[-1, 1]^2$), и

$$\varphi_{\xi}(t) = \varphi_{\eta}(t) = \varphi_{\eta}(-t) = \frac{\sin t}{t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, достаточно показать, что

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \frac{\sin^2 t}{t^2} = \frac{1 - \cos 2t}{2t^2}.$$

Прямой проверкой устанавливается, что плотность величины $\xi + \eta$ равна $(1 - |x/2|)^+ / 2$, где $x^+ = x \vee 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \varphi_{\xi+\eta}(t) &= Ee^{it(\xi+\eta)} = \int_0^2 \cos(tx)(1 - x/2) dx = \\ &= \frac{1}{2t} \int_0^2 \sin(tx) dx = \frac{1 - \cos 2t}{2t^2}. \quad \square \end{aligned}$$

60. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения $0, 1, \dots, 9$ с вероятностью $1/10$. Показать, что ряд

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\xi_n}{10^n}$$

сходится п. н. к случайной величине, имеющей равномерное распределение на $[0, 1]$.

Решение. Поскольку $\xi_n \geq 0$ с вероятностью единица и

$$\mathbb{E} \sum_{n \geq 1} \frac{\xi_n}{10^n} \leq \frac{1}{1 - 1/10} < \infty,$$

данный ряд сходится п. н. Кроме того,

$$\begin{aligned} \varphi_{X_n}(t) &= \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k} \left(\frac{t}{10^k} \right) = \frac{1}{10^n} \prod_{k=1}^n \frac{1 - e^{it/10^{k-1}}}{1 - e^{it/10^k}} = \\ &= \frac{1}{10^n} \frac{1 - e^{it}}{1 - e^{it/10^n}} \rightarrow \frac{e^{it} - 1}{it}, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где $X_n = \sum_{k=1}^n \xi_k/10^k$. Последнее означает, что ряд сходится по распределению (и п. н.) к случайной величине, имеющей равномерное распределение на $[0, 1]$. $\square$

61. Доказать *теорему Поля*, утверждающую, что *любая такая четная выпуклая на $\mathbb{R}_+$ функция $\varphi = \varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, что $\varphi(0) = 1$ и $\varphi(\infty) = 0$, является характеристической.*

Какой случайной величине отвечает характеристическая функция φ ? (См. задачи II.6.104, II.12.46(a).)

Решение. Нетрудно показать, что из задачи II.6.104 следует соотношение

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}_+} (u - |t|)^+ \mu(du), \quad (*)$$

где $x^+ = x \vee 0$, μ — некоторая конечная мера. Пусть величины ξ и η независимы, ξ имеет плотность из задачи II.12.46(a), а функция распределения величины η равна

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x u \mu(du) & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда в силу соотношения (*) получаем равенство $\varphi(t) = E \exp(itZ)$, где $Z = \xi/\eta$. $\square$

Замечание. Величина $Z = \xi/\eta$, фигурирующая в решении предыдущей задачи, имеет плотность, поскольку ξ имеет плотность, а η не зависит от ξ . Несмотря на это, интеграл $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)| dt$, вообще говоря, может расходиться.

62. Пусть ξ и η — такие независимые случайные величины, что распределение величины $\xi + \eta$ совпадает с распределением величины ξ . Доказать, что $\eta = 0$ п. н.

Решение. Характеристическая функция $\varphi_{\eta}(t)$ с необходимостью равна 1 в малой окрестности 0, поэтому у η существует второй момент и $E\eta^2 = -\varphi''_{\eta}(0) = 0$. Последнее означает, что $\eta = 0$ п. н. $\square$

§ 13. Гауссовские системы

1. Пусть $(a_n)_{n \geq 1}$ — такая числовая последовательность, что для всех $t \in [c, d]$, $c < d$, существует $\lim_n e^{ita_n}$. Показать, что тогда существует конечный предел $\lim_n a_n = a$.

Решение. Пусть $|a_{n_k}| \rightarrow \infty$ для некоторых $(n_k) \subset (n)$. Тогда найдется такая подпоследовательность $(m_l) \subset (n_k)$, что $|b_l| \rightarrow \infty$, где $b_l = a_{m_{l+1}} - a_{m_l}$. При этом по условию

$$f_l(t) = \exp(itb_l) = \frac{\exp(it a_{m_{l+1}})}{\exp(it a_{m_l})} \rightarrow 1, \quad t \in [c, d],$$

следовательно,

$$\int_c^d f_l(t) dt = \frac{e^{idb_l} - e^{icb_l}}{ib_l} \rightarrow \int_c^d dt = d - c > 0.$$

Однако при $|b_l| \rightarrow \infty$ имеем

$$\frac{e^{idb_l} - e^{icb_l}}{ib_l} \rightarrow 0.$$

Получили противоречие. Следовательно, $\overline{\lim}_n |a_n| < \infty$. Если a и b — предельные точки последовательности (a_n) , то

$$e^{ita} = \lim_n e^{ita_n} = e^{itb}, \quad t \in [c, d],$$

и с необходимостью $a = b$. Из этого следует существование предела $\lim_n a_n$. $\square$

Замечание. Утверждение задачи сохраняет свою силу, если потребовать, чтобы эта последовательность e^{ita_n} сходилась на некотором множестве B конечной положительной лебеговой меры. Доказательство при этом полностью сохранится, если заметить, что ввиду задачи П.12.33(а) имеем

$$\int_B f_t(t) dt \rightarrow 0,$$

а также что всегда найдутся точки $s, t \in B$ ($t \neq 0$) с иррациональным отношением s/t , гарантирующие справедливость импликации

$$(e^{isa} = e^{isb} \text{ и } e^{ita} = e^{itb}) \Rightarrow a = b.$$

2. Пусть $\xi_n \sim \mathcal{N}(a_n, \sigma_n^2)$ и $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$. Показать, что

(а) величина ξ имеет гауссовское распределение $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ при

$$a = \lim_n a_n, \quad \sigma^2 = \lim_n \sigma_n^2 \geq 0,$$

причем все рассматриваемые здесь пределы существуют;

(б) имеют место импликации

$$\xi_n \xrightarrow{p} \xi \Leftrightarrow \xi_n \xrightarrow{L^p} \xi,$$

где p — произвольное положительное число.

Решение. (а) По условию

$$\mathbb{E} e^{it\xi_n} = e^{ita_n - \sigma_n^2 t^2 / 2} \rightarrow \varphi(t) = \mathbb{E} e^{it\xi}, \quad t \in \mathbb{R},$$

так что $e^{-\sigma_n^2/2} \rightarrow |\varphi(1)|$ и, значит,

$$\sigma_n^2 \rightarrow \sigma^2 = 2 \ln |\varphi(1)|.$$

Отсюда следует, что при всех $t \in \mathbb{R}$ существует предел $\lim_n e^{ita_n}$, а также — в силу предыдущей задачи — предел $\lim_n a_n = a$.

Дадим также непосредственное доказательство того, что существует предел $\lim_n a_n = a$. Допустим, что $|a_{n_k}| \rightarrow \infty$ для некоторой последовательности $(n_k) \subset (n)$. Тогда, с одной стороны, по теореме Случцкого

$$\xi_{n_k} - a_{n_k} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \Rightarrow \frac{\xi_{n_k}}{a_{n_k}} = \frac{\xi_{n_k} - a_{n_k}}{a_{n_k}} + 1 \xrightarrow{p} 1.$$

С другой стороны, вновь применяя теорему Случцкого, находим, что

$$\xi_{n_k} \xrightarrow{d} \xi \Rightarrow \frac{\xi_{n_k}}{a_{n_k}} \xrightarrow{p} 0.$$

Полученное противоречие показывает, что $\overline{\lim}_n |a_n| < \infty$. Двух различных предельных точек последовательности a_n быть не может (так

как если $\xi_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ и $\xi_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(a', \sigma^2)$, то $a = a'$. Следовательно, существует предел $\lim_n a_n = a$.

Окончательно находим, что

$$\varphi(t) = e^{ita - \sigma^2 t^2/2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

т. е. $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$.

(b) Импликация $\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{p} \xi$ (для некоторого $p > 0$) очевидна.

Докажем обратную импликацию (для произвольного $p > 0$). Вследствие п. (a) если $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$ (и, значит, $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$), то

$$\sup_n a_n^2 + \sup_n \sigma_n^2 < \infty,$$

так как $a_n \rightarrow a$ и $\sigma_n^2 \rightarrow \sigma^2$. Отсюда вытекает, что семейство $\{|\xi_n - \xi|^p\}_{n \geq 1}$ равномерно интегрируемо. Действительно, возьмем какое-нибудь $m \in \mathbb{N}$, $2m > p$. Тогда

$$\begin{aligned} \sup_n \mathbb{E}|\xi_n - \xi|^{2m} &\leq 3^{2m-1} \sup_n [\mathbb{E}|\xi_n - a_n|^{2m} + \mathbb{E}|\xi - a|^{2m} + |a_n - a|^{2m}] = \\ &= 3^{2m-1} \sup_n [(2m-1)!!(\sigma_n^{2m} + \sigma^{2m}) + |a_n - a|^{2m}] < \infty. \end{aligned}$$

Из упомянутой равномерной интегрируемости (с учетом сходимости $\xi_n - \xi \xrightarrow{p} 0$) следует, что

$$\mathbb{E}|\xi_n - \xi|^p \rightarrow 0,$$

т. е. $\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi$. Итак, мы получили, что

$$\xi_n \xrightarrow{p} \xi \Leftrightarrow \xi_n \xrightarrow{L^p} \xi \quad (p > 0). \quad \square$$

3. Пусть $(X_1, \dots, X_n)$ — гауссовский вектор, состоящий из независимых $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ -распределенных случайных величин. Рассмотрим *сферические координаты* $(R, \Phi_1, \dots, \Phi_{n-1})$ вектора $(X_1, \dots, X_n)$, т. е. пусть $R \geq 0$, $\Phi_{n-1} \in [0, 2\pi)$, $\Phi_i \in [0, \pi]$, $1 \leq i < n-1$, и

$$\begin{aligned} X_1 &= R \cos \Phi_1, \\ X_2 &= R \sin \Phi_1 \cos \Phi_2, \\ X_3 &= R \sin \Phi_1 \sin \Phi_2 \cos \Phi_3, \\ &\dots\dots\dots \\ X_{n-1} &= R \sin \Phi_1 \dots \sin \Phi_{n-2} \cos \Phi_{n-1}, \\ X_n &= R \sin \Phi_1 \dots \sin \Phi_{n-2} \sin \Phi_{n-1}. \end{aligned}$$

Показать, что совместная плотность $f(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$ величин $(R, \Phi_1, \dots, \Phi_{n-1})$ задается следующей формулой:

$$f(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) = \frac{r^{n-1} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2}.$$

Решение. Утверждение следует из формулы преобразования плотности при гладкой замене координат, а также из того, что определитель якобиана при сферической замене координат по модулю равен

$$r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2}. \quad \square$$

4. Пусть (ξ, ζ) — двумерный гауссовский вектор, причем $\xi, \zeta \sim \mathcal{N}(0, 1)$, а $E\xi\zeta = \rho$. Показать, что плотность отношения ξ/ζ имеет вид

$$f_{\xi/\zeta}(z) = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi(z^2 - 2\rho z + 1)}.$$

Решение. Найдём плотность $f_{\xi/\zeta}(z)$, представляя функцию распределения $F_{\xi/\zeta}(z)$ в виде $\int_{-\infty}^z f_{\xi/\zeta}(u) du$:

$$\begin{aligned} F_{\xi/\zeta}(z) &= \int_{x/y \leq z} \frac{e^{-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^z du \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{(u^2 - 2\rho u + 1)y^2}{2(1-\rho^2)}}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} y dy + \int_{-\infty}^z du \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-\frac{(u^2 - 2\rho u + 1)y^2}{2(1-\rho^2)}}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} |y| dy = \\ &= \int_{-\infty}^z du \frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \frac{1-\rho^2}{u^2 - 2\rho u + 1} = \int_{-\infty}^z \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi(u^2 - 2\rho u + 1)} du. \quad \square \end{aligned}$$

5. Пусть A — некоторая матрица порядка $m \times n$. Назовём матрицу A^+ порядка $n \times m$ псевдообратной к матрице A , если

$$AA^+A = A, \quad A^+AA^+ = A^+, \quad (AA^+)^* = AA^+, \quad (A^+A)^* = A^+A.$$

Показать, что матрица A^+ с этими свойствами существует и единственна.

Доказать, что решение задачи наименьших квадратов

$$\hat{x} = \arg \min \left\{ \|x^*\| : x^* \in \operatorname{Arg} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\| \right\}$$

для любого $b \in \mathbb{R}^m$ задается формулой $\hat{x} = A^+b$. В частности, если A имеет полный ранг, то $A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$.

Решение. Для произвольной матрицы A справедливо разложение вида

$$A = U \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^*,$$

где U и V — унитарные матрицы размеров $m \times m$ и $n \times n$ соответственно, 0 — нулевые матрицы, а D — диагональная матрица с положительными числами на диагонали. Зададим A^+ следующим образом:

$$A^+ = V \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*.$$

Тогда все указанные свойства будут выполнены.

Выведем указанное разложение для матрицы A . Пусть для простоты $m \leq n$. Из линейной алгебры известно, что найдется такая унитарная матрица U , что

$$U^* A A^* U = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где C — диагональная матрица с положительными числами на диагонали. Другими словами, вектор-строки $e_1, \dots, e_m$ матрицы $U^* A$ взаимно ортогональны. Пусть

$$e_1, \dots, e_l \neq 0,$$

а $e_{l+1}, \dots = 0$, когда $l \leq m$. Дополним систему

$$v_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}, \dots, v_l = \frac{e_l}{\|e_l\|}$$

до ортонормированного базиса векторами $v_{l+1}, \dots, v_n$, образуя матрицу $V = (v_1 \dots v_n)$. Тогда, очевидно,

$$A = U \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^*,$$

где $D = C^{1/2}$.

Единственность следует из второй части задачи. Вектор $\hat{x}$ находится однозначно в силу замкнутости множества $\arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|$ и строгой выпуклости евклидовой нормы $\|\cdot\|$: если $\|x_1^*\| = \|x_2^*\|$ и $x_1^* \neq x_2^*$, то $\|(x_1^* + x_2^*)/2\| < \|x_1^*\|$. Из этого следует, что A^+b (а значит, и A^+) определено единственным образом.

Формула $\hat{x} = A^+b$ следует из равенств

$$\|Ax - b\| = \left\| \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^* x - U^* b \right\|, \quad \|V^* x\| = \|x\|. \quad \square$$

Замечание. В условиях задачи II.13.5 выполнено следующее свойство. Если A — неотрицательно определенная квадратная матрица, то A и A^+ допускают разложение

$$A = U \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*, \quad A^+ = U \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*$$

для некоторой унитарной матрицы U и диагональной матрицы D (с положительными числами на диагонали).

6. Пусть X и Y — случайные матрицы одинакового размера, причем матрица EYU^T обратима. Доказать *матричное неравенство Коши–Буняковского*:

$$EXY^T \cdot [EYU^T]^+ \cdot EYX^T \leqslant EXX^T,$$

где « $\leqslant$ » означает неотрицательную определенность матрицы, образованной разностью матриц в правой и левой частях приведенного матричного неравенства.

Решение. Искомое неравенство равносильно следующему:

$$E(X - CY)(X - CY)^T \geqslant 0,$$

где $C = EXY^T \cdot [EYU^T]^+$. Последнее неравенство, очевидно, верно. $\square$

7. Пусть X — гауссовский вектор со значениями в $\mathbb{R}^n$. Доказать, что матрица DX вырождена тогда и только тогда, когда найдется ненулевой вектор $b \in \mathbb{R}^n$, для которого $P(X^*b = EX^*b) = 1$, где, как обычно, $X^* = X^T$.

Решение. Матрица DX вырождена только в том случае, когда $DX \cdot b = 0$ для некоторого $b \in \mathbb{R}^n$. При этом, очевидно,

$$0 = b^* \cdot DX \cdot b = E|X^*b - EX^*b|^2 = 0,$$

или $X^*b = EX^*b$ с вероятностью единица. Кроме того, если $P(X^*b = EX^*b) = 1$, то $DX \cdot b = E[X - EX][X^*b - EX^*b] = 0$. $\square$

8. Для произвольного гауссовского вектора X показать, что

$$[X - EX]^*(DX)^+[X - EX] \sim \chi_{\text{rang}(DX)}^2,$$

где $\text{rang}(DX)$ — ранг матрицы DX и символ $\sim$ означает «имеет распределение».

Решение. Согласно замечанию к задаче II.13.5 имеем

$$DX = U \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*, \quad (DX)^+ = U \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*$$

для некоторой унитарной матрицы U и диагональной матрицы D (с положительными числами на диагонали). Поэтому

$$\begin{pmatrix} D^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* [X - EX] \sim \mathcal{N} \left(0, \begin{pmatrix} I_{\text{rank}(D)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

где I_n — единичная матрица размера n . Отсюда с учетом равенства $\text{rank}(D) = \text{rank}(DX)$ получаем

$$\begin{aligned} [X - EX]^*(DX)^+[X - EX] &= \\ &= [X - EX]^* U \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* [X - EX] \sim \chi_{\text{rank}(D)}^2. \quad \square \end{aligned}$$

9. Пусть (X, Y) — гауссовская система, причем Y, X — случайные векторы (быть может, разных размеров). Доказать, что

$$Z = Y - \text{cov}(Y, X) \cdot (DX)^+ X \quad \text{и} \quad X \quad \text{независимы.}$$

Здесь, как обычно, $\text{cov}(Y, X) = E[Y - EY][X - EX]^*$.

Решение. В силу гауссовости пары (X, Z) достаточно проверить, что

$$\text{cov}(Z, X) = \text{cov}(Y, X) - \text{cov}(Y, X)(DX)^+ DX = 0.$$

В силу замечания после задачи II.13.5 имеем

$$DX = U \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*, \quad (DX)^+ = U \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*$$

для некоторой унитарной матрицы U и диагональной матрицы D (с положительными числами на диагонали). Поэтому

$$\begin{aligned} [\text{cov}(Y, X) - \text{cov}(Y, X)(DX)^+ DX] U &= \\ &= \text{cov}(Y, U^* X) - \text{cov}(Y, U^* X) \begin{pmatrix} I_{\text{rank}(D)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Последняя разность равна нулю. Это вытекает из вырожденности части компонент вектора $U^* X$:

$$U^* X \sim \mathcal{N} \left(EU^* X, \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right). \quad \square$$

10. Пусть (X, Y) — гауссовская система, причем X и Y — случайные векторы (в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно). Доказать *теорему о нормальной корреляции*: при всех $x \in \mathbb{R}^n$ выполняются равенства

$$E(Y|X = x) = EY + \text{cov}(Y, X)(DX)^+[x - EX],$$

$$D(Y|X = x) \equiv \Delta = DY - \text{cov}(Y, X)(DX)^+ DX.$$

При этом $\text{Law}(Y|X=x) = \mathcal{N}(\mathbf{E}(Y|X=x), \Delta)$.

Решение. Утверждение вытекает из задачи II.13.9 с учетом равенства $DZ = \Delta$. $\square$

11. Пусть (X, Y) — гауссовская система, где Y — случайная величина, а X — вектор. Доказать, что условное математическое ожидание $\mathbf{E}(Y|X)$ совпадает п. н. с оптимальными линейными оценками $\hat{\mathbf{E}}(Y|X) = \alpha + \beta^* X$ при

$$(\alpha, \beta) \in \text{Arg} \min_{a,b} \mathbf{E}|Y - a - b^* X|^2.$$

Решение. В силу конечности $\mathbf{E}|Y|^2$ имеем

$$\mathbf{E}(Y|X = \cdot) = \arg \min_f \mathbf{E}|Y - f(X)|^2,$$

где минимум берется по всем борелевским функциям f и, в частности, по линейным. При этом, как следует из II.13.10, $\mathbf{E}(Y|X)$ есть п. н. линейная функция $\alpha_0 + \beta_0^* X$ для

$$\alpha_0 = \mathbf{E}Y - \text{cov}(Y, X)(DX)^+ \mathbf{E}X, \quad \beta_0^* = \text{cov}(Y, X) \cdot (DX)^+.$$

В силу того, что условное среднее $\mathbf{E}(Y|X)$ определено однозначно (п. н.), все остальные решения $\alpha + \beta^* X$ задачи

$$\mathbf{E}|Y - a - b^* X|^2 \rightarrow \min_{a,b}$$

будут совпадать (п. н.) с $\mathbf{E}(Y|X)$, что и доказывает требуемое утверждение. $\square$

12. Пусть (X, Y) — гауссовская система, причем Y — случайная величина в $\mathbb{R}$, а X — случайный вектор в $\mathbb{R}^d$. Выяснить структуру условных математических ожиданий $\mathbf{E}(Y^n|X=x)$, $n \geq 1$.

Решение. Будем считать, что $\mathbf{E}X = 0$ (иначе вычтем $\mathbf{E}X$ из X). Вследствие задачи II.13.9 величина $Z = Y - \mathbf{E}YX^* \cdot (DX)^+ X$ не зависит от вектора X . Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y^n|X=x) &= \mathbf{E}(Z + \mathbf{E}YX^* \cdot (DX)^+ x)^n = \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k (\mathbf{E}Z + \mathbf{E}YX^* \cdot (DX)^+ x)^{n-k} \mathbf{E}(Z - \mathbf{E}Z)^k, \end{aligned}$$

или

$$\mathbf{E}(Y^n|X=x) = \sum_{k \leq n/2} C_n^{2k} (\mathbf{E}Z + \mathbf{E}YX^* \cdot (DX)^+ x)^{n-2k} \frac{(2k)!}{2^k \cdot k!} (\mathbf{E}Z)^k. \quad \square$$

13. Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ и $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ — два центрированных гауссовских вектора,

$$DX_k = DY_k \quad \text{и} \quad \text{cov}(Y_k, Y_l) \leq \text{cov}(X_k, X_l), \quad 1 \leq k, l \leq n.$$

Доказать *неравенство Слепяна*:

$$P(Y_{\max} < a) \leq P(X_{\max} < a)$$

для всякого $a \in \mathbb{R}$, где $z_{\max}$ обозначает $\max\{z_1, \dots, z_n\}$.

Решение. Вероятности, фигурирующие в условии, приближенно равны $Ef(X)$ и $Ef(Y)$ для подходящим образом выбранной гладкой функции $f = f(z)$, $z \in \mathbb{R}^n$, так что задача сводится к рассмотрению разности $Ef(X) - Ef(Y)$. Предполагая далее, что X и Y независимы, по формуле Ньютона—Лейбница (и теореме Фубини) находим, что

$$Ef(X) - Ef(Y) = \frac{1}{2} \int_0^1 Ef'(Z_t) \left[\frac{X}{\sqrt{t}} - \frac{Y}{\sqrt{1-t}} \right] dt,$$

где $Z_t = \sqrt{t}X + \sqrt{1-t}Y$ и, кроме того, $Z_1 = X$ и $Z_0 = Y$. Поскольку

$$\text{cov}(Z_t, X/\sqrt{t}) = DX, \quad \text{cov}(Z_t, Y/\sqrt{1-t}) = DY,$$

ввиду II.13.68 подынтегральное выражение равно сумме элементов матрицы

$$Ef''(Z_t) * [DX - DY],$$

где $*$ — поэлементное умножение матриц. Все элементы матрицы $DX - DY$ неотрицательны по условию, причем на диагонали стоят нули.

Осталось показать, что в качестве приближения к

$$\mathbf{1}(x_{\max} < a) = \mathbf{1}(x_1 < a) \dots \mathbf{1}(x_n < a)$$

можно выбрать такую ограниченную функцию f , у которой все смешанные производные второго порядка неотрицательны. Возьмем, например, $f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1) \dots g(x_n)$, где

$$g(x) = \begin{cases} 1 - 2(x - a + \varepsilon)^2/\varepsilon^2, & x \in [a - \varepsilon, a - \varepsilon/2], \\ 2(x - a)^2/\varepsilon^2, & x \in [a - \varepsilon/2, a], \\ \mathbf{1}(x < a - \varepsilon) & \text{иначе,} \end{cases}$$

ε — сколь угодно малое положительное число. □

14. Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — независимые случайные величины, распределенные по закону $\mathcal{N}(0, 1)$. Показать, что величины

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 \xi_3}{\sqrt{1 + \xi_3^2}}, \quad \Phi^{-1} \left(\frac{|\xi_1|}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}} \right), \quad \frac{[f^2(\xi_3) - g^2(\xi_3)]\xi_1 + 2f(\xi_3)g(\xi_3)\xi_2}{f^2(\xi_3) + g^2(\xi_3)}$$

также распределены по закону $\mathcal{N}(0, 1)$, где Φ — функция распределения величины ξ_1 , а $f = f(x)$ и $g = g(x)$ — многочлены.

Замечание. В этой связи возникает интересная задача описания всех *нелинейных* преобразований от $n \geq 2$ н. о. р. гауссовских величин $\xi_1, \dots, \xi_n$, распределение которых также является гауссовским. Как установлено в работе [8], любое преобразование, сохраняющее нормальность и являющееся целой достаточно медленно растущей функцией (вещественной на $\mathbb{R}^n$), является линейным.

Решение. Достаточно заметить, что для любого фиксированного $a \in \mathbb{R}$ выполняется соотношение

$$\frac{\xi_1 + a\xi_2}{\sqrt{1+a^2}} \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

и показать, что условно на ξ_3 величина $\frac{\xi_1 + \xi_2\xi_3}{\sqrt{1+\xi_3^2}}$ имеет распределение $\mathcal{N}(0, 1)$. Аналогично доказывается нормальность третьей величины.

Величина $\eta = \frac{|\xi_1|}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}}$ в полярных координатах

$$\xi_1 = R \cos \varphi, \quad \xi_2 = R \sin \varphi \cos \theta, \quad \xi_3 = R \sin \varphi \sin \theta$$

при $R \geq 0, \theta \in [0, 2\pi), \varphi \in [0, \pi]$

записывается в виде $|\cos \varphi|$. Ввиду задачи II.13.3 величина φ имеет плотность на $[0, \pi]$, равную $(\sin x)/2$. Поэтому функция распределения величины φ — это $(1 - \cos x)/2, x \in [0, \pi]$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} P(\eta \leq z) &= P(|\cos \varphi| \leq z) = \frac{1}{2} \int_{\arccos z}^{\pi - \arccos z} \sin u \, du = \\ &= \frac{-\cos(\pi - \arccos z) + \cos \arccos z}{2} = z \end{aligned}$$

для всех $0 \leq z \leq 1$. Иными словами, величина η равномерно распределена на $[0, 1]$, и, значит, $\Phi^{-1}(\eta) \sim \mathcal{N}(0, 1)$. $\square$

15. Доказать, что функции $s \wedge t$, $s \wedge t - st$ и $e^{-|t-s|}$ являются неотрицательно определенными на $\mathbb{R}_+^2$, $[0, 1]^2$ и $\mathbb{R}^2$ соответственно.

Решение. Для первых двух функций имеют место представления

$$\begin{aligned} s \wedge t &= \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}(x \leq s) \mathbf{1}(x \leq t) \, dx, \\ s \wedge t - st &= \int_0^1 [\mathbf{1}(x \leq s) - s][\mathbf{1}(x \leq t) - t] \, dx, \end{aligned}$$

из которых легко вывести, что эти функции неотрицательно определены. Заметим также, что

$$e^{-|t-s|} = e^{2(t \wedge s) - t - s} = [e^{2t} \wedge e^{2s}] \cdot e^{-t} e^{-s}.$$

Из неотрицательной определенности на $\mathbb{R}_+^2$ функции $t \wedge s$ вытекает, что функция $(e^{2t} \wedge e^{2s}) \cdot e^{-t} e^{-s}$ неотрицательно определена на $\mathbb{R}^2$. $\square$

16. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, имеющие распределение $\mathcal{N}(0, 1)$.

(а) Показать, что величины $\xi + a\eta$ и $a\xi - \eta$ являются независимыми гауссовскими величинами для всякого $a \in \mathbb{R}$.

(б) Используя п. (а), показать, что при любом $a \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$C \stackrel{d}{=} \frac{1+aC}{a-C} \stackrel{d}{=} \frac{1}{C},$$

где C — случайная величина, распределенная по закону Коши с плотностью $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$.

(См. задачу II.8.24.)

(с) (См. [109].) Доказать следующее утверждение: если первое равенство в п. (б) выполнено для некоторого $a = \operatorname{ctg} \alpha$, $\alpha/\pi \notin \mathbb{Q}$, то C распределено по закону Коши.

(См. задачи II.8.11, II.8.24.)

Решение. (а) Вектор (ξ, η) является стандартным гауссовским с нулевым средним и единичной матрицей дисперсии, поэтому величины $\xi + a\eta$ и $a\xi - \eta$ совместно гауссовские, причем

$$\operatorname{cov}(\xi + a\eta, a\xi - \eta) = a - a = 0,$$

поэтому они независимы.

(б) В силу п. (а) величины $\frac{\xi + a\eta}{\sqrt{1+a^2}}$ и $\frac{a\xi - \eta}{\sqrt{1+a^2}}$ независимы и распределены по закону $\mathcal{N}(0, 1)$. Поэтому, используя II.8.24, получаем

$$C \stackrel{d}{=} \frac{\xi + a\eta}{a\xi - \eta} \stackrel{d}{=} \frac{1+a\eta/\xi}{a-\eta/\xi} \stackrel{d}{=} \frac{1+aC}{a-C} \stackrel{d}{=} \frac{1}{\eta/\xi} \stackrel{d}{=} \frac{1}{C}.$$

(с) Сделаем замену $C = \operatorname{tg} \theta$, $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Тогда рассматриваемое равенство переписывается в виде $\operatorname{tg}(\theta + \alpha) \stackrel{d}{=} \operatorname{tg} \theta$. Далее, множество $\{\alpha_n\}_{n \geq 1}$ всюду плотно на $[0, \pi]$, где $\alpha_n = \pi\{n\alpha/\pi\}$, а $\{x\}$ — дробная часть числа x . В силу периодичности функции tg имеем $\operatorname{tg}(\theta + \alpha_n) \stackrel{d}{=} \operatorname{tg} \theta$. Заметим теперь, что θ — непрерывная случайная величина, т. е. $P(\theta = x) = 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$, иначе θ будет принимать

счетное число различных значений с одной и той же положительной вероятностью, что невозможно.

Теперь легко вывести, что при $x, y, x + \varepsilon, y + \varepsilon \in (-\pi/2, \pi/2)$ вероятности

$$P(x < \theta \leq y) \quad \text{и} \quad P(x + \varepsilon < \theta \leq y + \varepsilon)$$

совпадают. Из этого следует инвариантность распределения величины θ относительно сдвигов, а значит, и равномерная распределенность θ на $(-\pi/2, \pi/2)$. Наконец, используя равенство $\xi/\eta \stackrel{d}{=} \operatorname{tg} \theta$ для независимых величин $\xi, \eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$ (см. задачу II.8.11), с учетом задачи II.8.24 находим, что C распределено по закону Коши. $\square$

17. (Бернштейн.) Пусть ξ и η — н. о. р. случайные величины с конечной дисперсией. Доказать, что если $\xi + \eta$ и $\xi - \eta$ независимы, то ξ и η являются гауссовскими величинами. Можно ли отказаться от условия одинаковой распределенности величин ξ и η , чтобы это свойство по-прежнему было верным?

Решение. Без ограничения общности считаем, что $E\xi = 0$. Обозначим через $\varphi_\zeta(t)$ характеристическую функцию случайной величины ζ . Тогда

$$\varphi_\xi(t) = \varphi_{\frac{\xi+\eta}{2}}(t) \varphi_{\frac{\xi-\eta}{2}}(t) = \varphi_{\xi/2}(t)^3 \varphi_{-\xi/2}(t),$$

следовательно,

$$\xi \stackrel{d}{=} \frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 - \xi_4}{2};$$

здесь и далее $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые копии величины ξ . Итерируя последнее равенство, получаем

$$\xi \stackrel{d}{=} \frac{1}{2^n} \left[\sum_{i=1}^m \xi_i - \sum_{i=m+1}^{2^{2n}} \xi_i \right],$$

где $n \in \mathbb{N}$, а m зависит только от n . Согласно центральной предельной теореме последняя сумма сходится по распределению к $\mathcal{N}(0, D\xi)$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому величина ξ гауссовская.

Другой способ доказательства — рассуждать так же, как при решении задачи II.12.32 (в случае произвольных a, b). Отказаться от одинаковой распределенности величин ξ и η можно. При этом доказательство, приведенное выше, полностью сохранится. $\square$

18. Пусть $X = X_t(\omega)$, $(\omega, t) \in \Omega \times [0, 1]$, $-\mathcal{F} \times \mathcal{B}[0, 1]$ -измеримая функция, причем $\int_0^1 |X_t| dt < \infty$ п. н. Предположим, что $\{X_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ есть

гауссовская система. Доказать, что случайная величина $\int_0^1 X_t dt$ также является гауссовской.

Решение. Во-первых, можно считать, что

$$\mathbb{E} \left[\int_0^1 X_t dt \right]^2 \leq \mathbb{E} \int_0^1 X_t^2 dt = \int_0^1 \mathbb{E} X_t^2 dt < \infty.$$

Иначе сначала рассмотрим

$$\frac{X_t}{\sqrt{1 + \varepsilon \mathbb{E} X_t^2}},$$

а затем перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, используя тот факт, что предел п. н. гауссовских величин всегда есть гауссовская величина.

Заметим, что если $Y = Y_t(\omega)$ — независимая $\mathcal{F} \times \mathcal{B}[0, 1]$ -измеримая копия величины X , для которой имеют место соотношения $\int_0^1 |Y_t| dt < \infty$ п. н. и $\int_0^1 Y_t dt \stackrel{d}{=} \int_0^1 X_t dt$, то ввиду задачи II.6.20 величины $\int_0^1 X_t dt$ и $\int_0^1 Y_t dt$ н. о. р. Кроме того, таковыми же являются

$$\int_0^1 [X_t - Y_t] dt = \int_0^1 X_t dt - \int_0^1 Y_t dt \quad \text{и} \quad \int_0^1 [X_t + Y_t] dt = \int_0^1 X_t dt + \int_0^1 Y_t dt.$$

Следовательно, по теореме Бернштейна (см. задачу II.13.17) $\int_0^1 X_t dt$ есть гауссовская случайная величина.

Подходящую копию Y легко построить на расширении исходного вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. А именно, достаточно положить

$$Y_t(\omega, \omega') = X_t(\omega'), \quad X_t(\omega, \omega') = X_t(\omega), \quad (\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega',$$

где $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ — копия пространства $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. $\square$

19. Пусть $K = K(s, t)$ — непрерывная вещественная ковариационная функция на $[a, b]^2 \subset \mathbb{R}^2$. Проверить непрерывность и самосопряженность в $L^2[a, b]$ оператора

$$Af(s) = \int_a^b K(s, t)f(t) dt.$$

Применяя теорему Гильберта—Шмидта и учитывая компактность оператора A , доказать *теорему Мерсера*: уравнение

$$\int_a^b K(s, t)\phi(t) dt = \lambda\phi(s), \quad a \leq s \leq b, \quad (*)$$

при бесконечном числе значений $\lambda = \lambda_n \geq 0$, $n \geq 1$, имеет соответствующие вещественные решения $\phi_n = \phi_n(s)$, $n \geq 1$, образующие такую полную ортонормированную систему в $L^2 = L^2[a, b]$, что ϕ_n непрерывно, когда $\lambda_n > 0$, и

$$K(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \phi_n(s) \phi_n(t),$$

где ряд сходится абсолютно и равномерно на $[a, b] \times [a, b]$.

Вывести отсюда, что центрированный гауссовский процесс $X = (X_t, t \in [a, b])$ с ковариационной функцией $K(s, t)$ может быть задан конструктивно:

$$X_t = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \sqrt{\lambda_n} \phi_n(t),$$

где $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые $\mathcal{N}(0, 1)$ -величины, причем сходимость данного ряда имеет место п. н. и в L^2 .

Решение. Поскольку при $f, g \in L^2$ имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b |Af(s) - Ag(s)|^2 ds &\leq \int_a^b \int_a^b |K(s, t)| |f(t) - g(t)| dt \Big|^2 ds \leq \\ &\leq (b-a)^2 \|K\|_{\infty}^2 \int_a^b |f(t) - g(t)|^2 dt, \end{aligned}$$

оператор A непрерывен. Более того, по теореме Фубини

$$\begin{aligned} (Af, g) &= \int_a^b Af(s) \overline{g(s)} ds = \int_{[a,b]^2} K(s, t) f(t) \overline{g(s)} ds dt = \\ &= \int_a^b f(t) \overline{Ag(t)} dt = (f, Ag), \end{aligned}$$

так что A является самосопряженным оператором.

Следовательно, по теореме Гильберта—Шмидта (с учетом компактности оператора A) в L^2 найдется полная ортонормированная система комплекснозначных функций ϕ_n , удовлетворяющих уравнению (*) соответственно для некоторых $\lambda = \lambda_n \in \mathbb{R}$, $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, и такая, что

$$Af = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (f, \phi_n) \phi_n$$

в L^2 . При этом в силу неотрицательной определенности $K(s, t)$ имеем

$$\lambda_n = (A\phi_n, \phi_n) = \int_{[a,b]^2} K(s, t)\phi_n(t)\overline{\phi_n(s)}dsdt \geq 0.$$

Кроме того,

$$\|A\phi_n(s)\| \leq \|K\|_\infty \int_a^b |\phi_n(t)|dt,$$

значит, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости функции $\phi_n(s)$ непрерывны по s при $\lambda_n > 0$. Покажем теперь, что ϕ_n можно выбрать вещественными.

Если ϕ_n — решение уравнения (*) при $\lambda = \lambda_n$, то таковыми же являются $\operatorname{Re} \phi_n$ и $\operatorname{Im} \phi_n$. Определим $\mu_1, \mu_2, \dots$ из условий

$$\mu_n > \mu_{n+1}, \quad \lambda_n \in \{\mu_1, \mu_2, \dots\} \text{ при всех } n.$$

Рассмотрим систему функций

$$A_i = \{\operatorname{Re} \phi_n : \lambda_n = \mu_i\} \cup \{\operatorname{Im} \phi_n : \lambda_n = \mu_i\}.$$

Решения уравнения (*), отвечающие разным λ , ортогональны. Поэтому $(f_i, f_j) = 0$ при $f_i \in A_i, f_j \in A_j$ при $i \neq j$. Пусть $n_i = |A_i|$. Применяя метод ортогонализации Грама—Шмидта для функций из A_i , получим систему ортонормированных функций $f_{1i}, \dots, f_{n_i i}$, порождающих A_i и в то же время являющихся линейной комбинацией функций из A_i . Таким образом, множество

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \{f_{1i}, \dots, f_{n_i i}\}$$

есть полная ортонормированная система решений вещественных уравнения (*) в L^2 , которую можно взять в качестве $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$.

Для каждого n функция

$$K_n(s, t) = K(s, t) - \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i(s)\phi_i(t)$$

непрерывна по (s, t) . Обозначим через A_n соответствующий K_n интегральный оператор. Для любой функции $f \in L^2$ имеем

$$\int_{[a,b]^2} K_n(s, t)f(s)\overline{f(t)}dsdt = (A_n f, f) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i |(f, \phi_i)|^2.$$

Отсюда вытекает, что $K_n(s, s) \geq 0$ для всех s . Действительно, иначе (в силу непрерывности K_n) найдется окрестность $U = (s_0 - \delta, s_0 + \delta)^2$,

в которой K_n принимает отрицательные значения. Тогда $(A_n f, f) < 0$ при $f \equiv 1$ в U и $f \equiv 0$ вне U , что невозможно.

Итак, мы получили, что $K_n(s, s) \geq 0$ при всех s и n , а значит,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n |\phi_n(s)|^2 \leq K(s, s).$$

Принимая во внимание неравенство Коши—Буняковского, находим

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=m}^n \lambda_i \phi_i(s) \phi_i(t) \right|^2 &\leq \sum_{i=m}^n \lambda_i |\phi_i(s)|^2 \sum_{i=m}^n \lambda_i |\phi_i(t)|^2 \leq \\ &= \|K\|_{\infty} \sum_{i=m}^n \lambda_i |\phi_i(t)|^2, \quad m \leq n. \end{aligned}$$

Следовательно, при каждом фиксированном t ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \phi_n(s) \phi_n(t)$ сходится равномерно по s к некоторой функции $R(s, t)$. Вследствие непрерывности ϕ_n при $\lambda_n \neq 0$ функция $R(s, t)$ будет непрерывна по t , причем для любой непрерывной функции f выполняется равенство

$$\int_a^b R(s, t) f(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (f, \phi_n) \phi_n(s).$$

Поэтому

$$\int_a^b [K(s, t) - R(s, t)] f(t) dt = 0.$$

Полагая $f(t) = K(s, t) - R(s, t)$, получим $K(s, t) = R(s, t)$ для всех t при каждом фиксированном s и, в частности,

$$K(s, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |\phi_n(s)|^2. \quad (**)$$

Осталось воспользоваться теоремой Дини (доказательство которой остается в качестве упражнения).

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ из непрерывных неотрицательных функций $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ сходится к непрерывной функции f , то эта сходимость равномерна по x .

Применяя неравенство Коши—Буняковского, как это было сделано выше, с учетом теоремы Дини получаем абсолютную и равномерную сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \phi_n(s) \phi_n(t)$ по (s, t) . Теорема Мерсера доказана.

Перейдем ко второй части задачи. В силу соотношения (**) имеем

$$\mathbb{E} \left| \sum_{i=m}^n \sqrt{\lambda_i} \phi_i(t) \xi_i \right|^2 = \sum_{i=m}^n \lambda_i |\phi_i(t)|^2 \rightarrow 0, \quad m, n \rightarrow \infty.$$

Тем самым последовательность частичных сумм ряда X_t фундаментальна в L^2 , поэтому он сходится в L^2 . Кроме того, по теореме Колмогорова—Хинчина (см. теорему 1 в В2.IV.2) данный ряд сходится п. н. В силу задачи II.13.2 вектор $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ имеет центрированное нормальное распределение для всех $t_1, \dots, t_n \in [a, b]$, т. е. процесс X гауссовский. Ковариационная функция величины X совпадает с $K(s, t)$, так как X_s и X_t при любых $s, t \in [a, b]^2$ есть пределы соответствующих частичных сумм в L^2 , а значит,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} X_s X_t &= \lim_n \mathbb{E} \sum_{i \leq n} \sqrt{\lambda_i} \phi_i(s) \xi_i \sum_{i \leq n} \sqrt{\lambda_i} \phi_i(t) \xi_i = \\ &= \lim_n \sum_{i \leq n} \lambda_i \phi_i(s) \phi_i(t) = K(s, t). \quad \square \end{aligned}$$

20. (См. [87], [106].) Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \xi_{n:n} &\leq \sqrt{2 \ln n}, \quad n \geq 1, \\ \overline{\lim}_n [\xi_{n:n} - \sqrt{2 \ln n}] &\leq 0 \quad \text{п. н.}, \end{aligned}$$

где $\xi_{n:n} = \max\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$.

Если к тому же $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы, то

$$\lim_n [\xi_{n:n} - \sqrt{2 \ln n}] = 0 \quad \text{п. н.}$$

Уточнить последний результат, показав, что

$$\overline{\lim}_n \frac{\sqrt{2 \ln n} [\xi_{n:n} - \sqrt{2 \ln n}]}{\ln \ln n} = \frac{1}{2}, \quad \underline{\lim}_n \frac{\sqrt{2 \ln n} [\xi_{n:n} - \sqrt{2 \ln n}]}{\ln \ln n} = -\frac{1}{2}.$$

Замечание. Аналогичные равенства с $\overline{\lim}$ и $\underline{\lim}$ для максимумов вида

$$\max_{0 \leq i < j \leq n} \frac{\xi_{i+1} + \dots + \xi_j}{\sqrt{j-i}}$$

получены в работе [72].

Решение. По неравенству Йенсена для всех $s > 0$ имеем

$$\mathbb{E} \xi_{n:n} \leq \frac{1}{s} \ln \mathbb{E} e^{s \xi_{n:n}} \leq \frac{1}{s} \ln \sum_{i=1}^n \mathbb{E} e^{s \xi_i} = \frac{1}{s} \ln n e^{\frac{s^2}{2}} = \frac{\ln n}{s} + \frac{s}{2}.$$

Минимизируя по $s > 0$, находим, что $\mathbb{E} \xi_{n:n} \leq \sqrt{2 \ln n}$ при $s = \sqrt{2 \ln n}$.

Для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\sum P(|\xi_n| \geq \sqrt{2 \ln n} + \varepsilon) \leq \sum P\left(e^{\frac{(|\xi_1| - \varepsilon)^2}{2}} \geq n\right) \leq E e^{\frac{(|\xi_1| - \varepsilon)^2}{2}} < \infty;$$

здесь и далее суммирование ведется по всем $n = 1, 2, \dots$. По лемме Бореля—Кантелли последнее означает, что при всех $\varepsilon > 0$ с вероятностью единица происходит лишь конечное число событий $\{|\xi_n| - \sqrt{2 \ln n} \geq \varepsilon\}$. Следовательно,

$$\overline{\lim}_n [\xi_{n:n} - \sqrt{2 \ln n}] \leq 0 \quad \text{п. н.}$$

Рассмотрим теперь независимые случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Обозначим $\varphi = \varphi(x)$ плотность величины ξ_1 . При всех $\varepsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \sum P(\xi_{n:n} \leq \sqrt{2 \ln n} - \varepsilon) &= \sum P(\xi_1 \leq \sqrt{2 \ln n} - \varepsilon)^n = \\ &= \sum [1 - P(\xi_1 > \sqrt{2 \ln n} - \varepsilon)]^n \leq \sum \exp[-nP(\xi_1 > \sqrt{2 \ln n} - \varepsilon)] \leq \\ &\leq \sum \exp[-h(\sqrt{2 \ln n}, \varepsilon)] < \infty, \end{aligned}$$

где

$$h(x, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{(x - \varepsilon) \exp\left\{x\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2}\right\}}{1 + (x - \varepsilon)^2}, \quad x > 0,$$

а предпоследняя оценка следует из неравенства

$$P(\xi_1 > x) \geq \frac{x\varphi(x)}{1 + x^2}, \quad x > 0.$$

Вновь применяя лемму Бореля—Кантелли, получаем

$$\underline{\lim}_n [\xi_{n:n} - \sqrt{2 \ln n}] \geq 0 \quad \text{п. н.}$$

Отсюда с учетом того, что $\overline{\lim}_n [\xi_{n:n} - \sqrt{2 \ln n}] \leq 0$ п. н. (см. выше), вытекает требуемое соотношение.

Положим далее для краткости

$$L_n = \frac{\ln \ln n}{\sqrt{2 \ln n}}$$

при $n \geq 3$ и $L_n = 1$ при $n = 1, 2$. Тогда, учитывая оценку

$$P(\xi_1 > x) \leq \frac{\varphi(x)}{x}, \quad x > 0,$$

при каждом $a > 1/2$ получаем

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{P}(\xi_n \geq \sqrt{2 \ln n} + aL_n) &\leq \sum \frac{\varphi(\sqrt{2 \ln n} + aL_n)}{\sqrt{2 \ln n}} \leq \\ &\leq \sum \frac{1}{n(\ln n)^{a+1/2}} < \infty, \end{aligned}$$

т. е., как и выше,

$$\overline{\lim}_n \frac{\xi_{n:n} - \sqrt{2 \ln n}}{L_n} \leq \frac{1}{2}.$$

Кроме того, при $a < 1/2$ имеем

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{P}(\xi_n \geq \sqrt{2 \ln n} + aL_n) &\geq \sum \frac{(\sqrt{2 \ln n} + aL_n)\varphi(\sqrt{2 \ln n} + aL_n)}{1 + (\sqrt{2 \ln n} + aL_n)^2} \geq \\ &\geq K \sum \frac{1}{n(\ln n)^{a+1/2}} = \infty, \end{aligned}$$

для некоторой константы $K > 0$. Другими словами, вследствие второй леммы Бореля—Кантелли при $a < 1/2$ выполняется соотношение

$$\mathbf{P}(\xi_n \geq \sqrt{2 \ln n} + aL_n \text{ для бесконечно многих } n \geq 1) = 1,$$

и, значит,

$$\overline{\lim}_n \frac{\xi_{n:n} - \sqrt{2 \ln n}}{L_n} \geq \frac{1}{2}.$$

Итак, мы получили искомое равенство с $\overline{\lim}$.

Установим наконец, что

$$\lim_n \frac{\xi_{n:n} - \sqrt{2 \ln n}}{L_n} = -\frac{1}{2}.$$

Для любого фиксированного $a < 1/2$ выполняется соотношение

$$\mathbf{P}(\xi_{n:n} \leq \sqrt{2 \ln n} - aL_n) = \left[1 - \mathbf{P}(\xi_1 > \sqrt{2 \ln n} - aL_n)\right]^n \rightarrow 1,$$

поскольку

$$\mathbf{P}(\xi_1 > \sqrt{2 \ln n} - aL_n) \sim \frac{\varphi(\sqrt{2 \ln n} - aL_n)}{\sqrt{2 \ln n} - aL_n} = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Следовательно, можно найти последовательность индексов $n_k \uparrow \infty$ и чисел $a_k \uparrow 1/2$, для которых

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\xi_{n_k:n_k} > \sqrt{2 \ln n_k} - a_k L_{n_k}) < \infty.$$

Из этого следует, что с вероятностью единица

$$\lim_n \frac{\xi_{n:n} - \sqrt{2 \ln n}}{L_n} \leq \lim_k \frac{\xi_{n_k:n_k} - \sqrt{2 \ln n_k}}{L_{n_k}} \leq -\frac{1}{2}.$$

Пусть теперь $a > 1/2$. Если $k = k(n)$ таково, что $2^k < n \leq 2^{k+1}$, то $\sqrt{2 \ln n} - \sqrt{2k \ln 2} = O(k^{-1/2}) = o(L_{2^k})$, $L_n^{-1} - L_{2^k}^{-1} = o(k^{-1/2}) = o(1)$.

Отсюда с вероятностью единица получаем

$$\frac{\xi_{n:n} - \sqrt{2 \ln n}}{L_n} = \frac{\xi_{n:n} - \sqrt{2 \ln n}}{L_{2^k}} + o(1) = \frac{\xi_{n:n} - \sqrt{2k \ln 2}}{L_{2^k}} + o(1),$$

и, значит (с учетом неравенства $\xi_{n:n} \geq \xi_{2^k:2^k}$), п. н.

$$\lim_n \frac{\xi_{n:n} - \sqrt{2 \ln n}}{L_n} = \lim_k \frac{\xi_{2^k:2^k} - \sqrt{2k \ln 2}}{L_{2^k}}.$$

При $a > 1/2$ имеем

$$\begin{aligned} \ln P(\xi_{2^k:2^k} \leq \sqrt{2k \ln 2} - aL_{2^k}) &= 2^k \ln \left\{ 1 - P(\xi_1 > \sqrt{2k \ln 2} - aL_{2^k}) \right\} \sim \\ &\sim -\frac{2^k \varphi(\sqrt{2k \ln 2} - aL_{2^k})}{\sqrt{2k \ln 2} - aL_{2^k}} \sim -k^{a-1/2+o(1)}. \end{aligned}$$

Тем самым

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\xi_{2^k:2^k} \leq \sqrt{2k \ln 2} - aL_{2^k}) < \infty.$$

Это доказывает, что

$$\lim_n \frac{\xi_{n:n} - \sqrt{2 \ln n}}{L_n} = \lim_k \frac{\xi_{2^k:2^k} - \sqrt{2k \ln 2}}{L_{2^k}} \geq -\frac{1}{2}. \quad \square$$

21. Пусть $\{e_n = e_n(x), x \in [0, 1]\}_{n \geq 1}$, — полная ортонормированная по мере Лебега на $[0, 1]$ система L^2 -функций и $(\xi_n)_{n \geq 1}$ — н. о. р. $\mathcal{N}(0, 1)$ -величины. Показать, что процесс

$$B_t = \sum_{n \geq 1} (e_n, I_{[0,t]}) \xi_n, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

есть броуновское движение (ряд сходится в L^2), где $I_{[0,t]} = I_{[0,t]}(x)$, $x \in [0, 1]$, а (f, g) — скалярное произведение функций f и g из L^2 , т. е.

$$(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x) dx.$$

Решение. Доказательство можно провести по следующей схеме.

1. Применяя равенство Парсеваля

$$\sum_{n \geq 1} (e_n, I_{[0,t]})^2 = \|I_{[0,t]}\|^2 = (I_{[0,t]}, I_{[0,t]}) = t, \quad t \in [0, 1],$$

показать, что

$$\left(\sum_{n=1}^N (e_n, I_{[0,t_1]}) \xi_n, \dots, \sum_{n=1}^N (e_n, I_{[0,t_k]}) \xi_n \right) \xrightarrow{L^2} (B_{t_1}, \dots, B_{t_k}), \quad N \rightarrow \infty,$$

для произвольных $t_1, \dots, t_k, 0 \leq t_1, \dots, t_k \leq 1$, и $k \geq 1$, и вывести отсюда (см. также задачу II.13.2), что $(B_t)_{t \geq 0}$ — гауссовская система.

2. Проверить, что при всех $t \in [0, 1]$ выполняется равенство

$$EB_t = \lim_N \sum_{n=1}^N (e_n, I_{[0,t]}) E \xi_n = 0.$$

3. С помощью равенства Парсеваля и соотношения

$$2(I_{[0,s]}, I_{[0,t]}) = \|I_{[0,s]} + I_{[0,t]}\|^2 - \|I_{[0,s]}\|^2 - \|I_{[0,t]}\|^2, \quad s, t \in [0, 1],$$

убедиться, что

$$EB_s B_t = \sum_{n \geq 1} (e_n, I_{[0,t]}) (e_n, I_{[0,s]}) = (I_{[0,t]}, I_{[0,s]}) = s \wedge t. \quad \square$$

Замечание. Можно также рассматривать пространство L^2 -функций на отрезке $[-1, 1]$ с мерой Лебега и ортонормированную систему $\{e_n\}$ на нем. В этом случае аналогичным образом устанавливается, что процессы

$$X_t = \sum_{n \geq 1} (e_n, I_{[-t,t]}/\sqrt{2}) \xi_n, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$Y_t = \sum_{n \geq 1} (e_n, [I_{[0,t]} - I_{[-t,0]})/\sqrt{2}) \xi_n, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

есть броуновские движения, так как

$$\begin{aligned} ([I_{[0,s]} - I_{[-s,0]})/\sqrt{2}, [I_{[0,t]} - I_{[-t,0]})/\sqrt{2}) &= \\ &= (I_{[-s,s]}/\sqrt{2}, I_{[-t,t]}/\sqrt{2}) = s \wedge t, \quad 0 \leq s, t \leq 1. \end{aligned}$$

22. Пусть $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ — н. о. р. случайные величины, $\xi_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Показать, что ряд

$$B_t^\circ = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \frac{\sqrt{2} \sin n\pi t}{n\pi}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

действительно определяет броуновский мост, а ряд

$$B_t = \xi_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \frac{\sqrt{2} \sin n\pi t}{n\pi}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

так же как и ряд

$$W_t = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \frac{1 - \cos n\pi t}{n\pi}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

задает броуновское движение.

Решение. Поскольку $B_t^\circ = B_t - tB_1$, $t \in [0, 1]$, достаточно установить, что (B_t) есть броуновское движение. Последнее, а также то, что (W_t) — броуновское движение, следует из замечания к задаче II.13.21. В самом деле, легко проверить, что при всех t , $|t| \leq 1$, выполняются равенства

$$B_t = \sum_{n \geq 1} (e_n, I_{[-t, t]}/\sqrt{2}) \zeta_n, \quad W_t = \sum_{n \geq 1} (e_n, [I_{[0, t]} - I_{[-t, 0]})/\sqrt{2}) \zeta_{n-1},$$

где

$e_1, e_2, e_3, e_4, \dots$ — это соответственно $\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \pi x, \cos \pi x, \sin 2\pi x, \dots$,

$\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots$ — это $\eta_0, \xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots$;

здесь $(\eta_0, \eta_1, \dots)$ — независимая копия набора $(\xi_1, \xi_2, \dots)$. $\square$

23. Установить, что процесс $(B_t)_{0 \leq t \leq 1}$, заданный формулой

$$B_t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{2} \xi_n}{(2n-1)\pi} \sin \frac{(2n-1)\pi t}{2}$$

с независимыми случайными величинами $\xi_1, \xi_2, \dots \sim \mathcal{N}(0, 1)$, является броуновским движением (указанный ряд сходится, например, в L^2).

Решение. Данное представление можно вывести из теоремы Мерсера II.13.19. Однако мы его здесь получим с помощью модификации конструкции, описанной в замечании к задаче II.13.21. А именно, имеем

$$B_t = \sum_{n=1}^{\infty} (e_n, J_t) \zeta_n,$$

где $J_t = J_t(x)$ ($0 \leq t \leq 1$) — нечетная функция, заданная при $x \geq 0$ формулой

$$J_t = \frac{I_{[(1-t)/2, (1+t)/2]}}{\sqrt{2}},$$

а также $e_1, e_2, e_3, e_4, \dots$ — это соответственно $1/\sqrt{2}, \sin \pi x, \cos \pi x, \sin 2\pi x, \dots$ и

$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots$ — это $\eta_1, (-1)^0 \xi_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, (-1)^1 \xi_2, \eta_5, \eta_6, \eta_7, (-1)^2 \xi_3, \dots$; здесь $(\eta_1, \eta_2, \dots)$ — независимая копия набора $(\xi_1, \xi_2, \dots)$. При таком определении $(J_s, J_t) = s \wedge t$ при всех $0 \leq s, t \leq 1$, $(e_n, J_t) = 0$, если e_n не есть $\sin(2k-1)\pi x$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, и в противном случае

$$(e_n, J_t) = \frac{2\sqrt{2}}{(2k-1)\pi} \sin \frac{(2k-1)\pi t}{2}. \quad \square$$

24. Проверить, что для броуновского движения $B = (B_t)_{t \geq 0}$ следующие процессы также являются броуновскими движениями:

$$\begin{aligned} &(-B_t)_{t \geq 0}, \quad (B_{t+a} - B_a)_{t \geq 0}, \quad (B_a - B_{a-t})_{0 \leq t \leq a}, \\ &(a^{-1} B_{a^2 t})_{t \geq 0} \quad (\text{свойство автомодельности}), \end{aligned}$$

$$W_t(\omega) = \begin{cases} tB_{1/t}(\omega), & t > 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases} \quad \omega \in \Omega,$$

где $a > 0$. Если при этом траектории процесса B непрерывны с вероятностью единица, т. е. $P(B \in C[0, \infty)) = 1$, то аналогичное верно и для перечисленных выше процессов.

Решение. Все процессы образуют гауссовские системы как линейные преобразования гауссовской системы $(B_t)_{t \geq 0}$. Все процессы имеют нулевое среднее и ковариационную функцию, совпадающую с ковариационной функцией броуновского движения (устанавливается прямым подсчетом).

Непрерывность траекторий с вероятностью единица для первых четырех процессов на их области определения и W_t при $t > 0$ очевидна. Установим теперь, что

$$W_t = tB_{1/t} \rightarrow 0 \quad \text{п. н., } t \rightarrow 0,$$

или, что эквивалентно,

$$\frac{B_t}{t} \rightarrow 0 \quad \text{п. н., } t \rightarrow \infty.$$

Поскольку $B_n/\sqrt{n} = \xi_n \stackrel{d}{=} \xi_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $n \geq 1$, и $E\xi_1^2 < \infty$, получаем, что (см. задачу II.10.12)

$$\frac{\xi_n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \quad \text{п. н., } n \rightarrow \infty.$$

Далее, при $t \in [n, n+1)$, $n \geq 1$, имеем

$$\frac{|B_t|}{t} \leq \frac{|B_n|}{n} + \frac{\sup_{n \leq t \leq n+1} |B_t - B_n|}{n} = \frac{|B_n|}{n} + \frac{\zeta_n}{n}.$$

Тем самым достаточно установить, что п. н.

$$\frac{\zeta_n}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

По доказанному $(B_{t+n} - B_n)_{t \geq 0}$ есть броуновское движение, откуда следует, что $\zeta_n \stackrel{d}{=} \zeta_1$, $n \geq 1$, так что по задаче П.10.12 надо лишь показать, что $E\zeta_1 < \infty$. Последнее может быть выведено из принципа отражения; см. задачу П.13.48. $\square$

25. Пусть $B = (B_t)_{t \geq 0}$ — броуновское движение. Показать, что процесс $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}}$, $X_t = e^{-t} B_{e^{2t}}$, является процессом *Орнштейна—Уленбека*, т. е. гауссовско-марковским процессом с $EX_t = 0$ и $EX_s X_t = e^{-|s-t|}$.

Вывести отсюда, что совместная плотность $f(x_1, \dots, x_n)$ величин $X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$, $t_1 < \dots < t_n$, допускает следующее представление:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left[(2\pi)^n \prod_{i=2}^n (1 - e^{2(t_{i-1} - t_i)}) \right]^{-1/2} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{x_1^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n \frac{[x_i - x_{i-1} e^{t_{i-1} - t_i}]^2}{1 - e^{2(t_{i-1} - t_i)}} \right\}.$$

Решение. Легко видеть, что X — гауссовский процесс, $EX_t = 0$ и

$$EX_s X_t = e^{-(s+t)} EB_{e^{2s}} B_{e^{2t}} = e^{2(s \wedge t) - (s+t)} = e^{-|s-t|}.$$

Броуновское движение B имеет независимые приращения. Отсюда, в частности, следует, что процессы $(B_s - B_t)_{s \geq t}$ и $(B_s)_{s \leq t}$ независимы для всех $t \geq 0$. Поэтому $(X_s - e^{t-s} X_t)_{s \geq t}$ не зависит от $(X_s)_{s \leq t}$ при всех $t \in \mathbb{R}$, откуда и получаем марковость процесса X .

Совместную плотность величин $X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$ легко вычислить по формуле преобразования плотности при линейной замене координат с учетом того, что

$$X_{t_1} = e^{-t_1} B_{e^{2t_1}}, \quad X_{t_2} = e^{-t_2} (B_{e^{2t_2}} - B_{e^{2t_1}}) + e^{-t_2} B_{e^{2t_1}}, \quad \dots,$$

$$X_{t_n} = e^{-t_n} (B_{e^{2t_n}} - B_{e^{2t_{n-1}}}) + \dots + e^{-t_n} (B_{e^{2t_2}} - B_{e^{2t_1}}) + e^{-t_n} B_{e^{2t_1}},$$

а также того, что плотность вектора $(B_{e^{2t_1}}, B_{e^{2t_2}} - B_{e^{2t_1}}, \dots, B_{e^{2t_n}} - B_{e^{2t_{n-1}}})$ равна

$$\left[(2\pi)^n \prod_{i=1}^n (e^{2t_i} - e^{2t_{i-1}}) \right]^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{e^{2t_i} - e^{2t_{i-1}}} \right\}, \quad t_0 = 0. \quad \square$$

26. Пусть $B^\circ = (B_t^\circ)_{0 \leq t \leq 1}$ — броуновский мост. Показать, что процесс $B = (B_t)_{t \geq 0}$, $B_t = (1+t)B_{t/(1+t)}^\circ$, является броуновским движением.

Решение. Процесс $B = (B_t)_{t \geq 0}$ образует гауссовскую систему как линейное преобразование гауссовской системы $(B_t^\circ)_{0 \leq t \leq 1}$. Прямой проверкой получаем, что $EB_t = 0$ и $EB_s B_t = s \wedge t$ при всех $s, t \geq 0$. Следовательно, B — броуновское движение. $\square$

27. Пусть $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ — процесс Орнштейна—Уленбека. Проверить, что процесс

$$B_t^\circ = \begin{cases} \sqrt{t(1-t)} X_{\frac{1}{2} \ln \frac{t}{1-t}}, & 0 < t < 1, \\ 0, & t = 0, 1, \end{cases}$$

является броуновским мостом.

Решение. Утверждение проверяется теми же рассуждениями, что и при решении задачи II.13.26. $\square$

28. Пусть $(X_1^{(n)}, \dots, X_n^{(n)})$ — случайный вектор с равномерным распределением на сфере $S_n(\sqrt{n})$ радиуса $\sqrt{n}$ с центром в нуле ($n \geq 1$). Доказать справедливость следующего «наблюдения Пуанкаре»:

$$(X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \dots, X_m^{(n)}) \xrightarrow{d} (\xi_1, \dots, \xi_m), \quad n \rightarrow \infty,$$

где $m \geq 1$, $\{\xi_i\}_{i \geq 1}$ — независимые стандартные гауссовские величины.

Замечание. Этот результат дает интуитивное представление о распределении стандартной гауссовской последовательности $(\xi_1, \xi_2, \dots)$ как о равномерном распределении на «бесконечномерной сфере бесконечного радиуса $S_\infty(\sqrt{\infty})$ » (см. [83]).

Решение. Все доказательство по сути сводится к установлению равенства

$$(X_1^{(n)}, \dots, X_n^{(n)}) \stackrel{d}{=} \sqrt{n} \frac{(\xi_1, \dots, \xi_n)}{\left[\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right]^{1/2}}. \quad (*)$$

Последнее обеспечивается тем, что распределение вектора $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ сферически симметрично (см. задачу II.13.36). Из указанного равенства (*) следует, что

$$(X_1^{(n)}, \dots, X_m^{(n)}) \stackrel{d}{=} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right]^{-1/2} (\xi_1, \dots, \xi_m).$$

Осталось воспользоваться тем, что

$$\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right]^{-1/2} (\xi_1, \dots, \xi_m) \xrightarrow{p} (\xi_1, \dots, \xi_m)$$

(это следует из закона больших чисел, задачи II.10.7 и теоремы Служского II.10.9). $\square$

29. Пусть μ — равномерное распределение на единичной сфере S_n в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) с центром в нуле. Установить *изопериметрическое неравенство П. Леви*.

Для любого замкнутого множества $F \subseteq S_n$, $\mu(F) > 0$, и всех $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\mu(F^\varepsilon) \geq \mu(C^\varepsilon),$$

где C — сферическая «шапка» вида $\{(x_1, \dots, x_n) \in S_n: x_1 \leq a\}$, мера которой равна $\mu(F)$, $B^\varepsilon = \{x \in S_n: \rho_n(x, z) < \varepsilon \text{ для некоторого } z \in B\}$ — ε -окрестность множества $B \subseteq S_n$, а $\rho_n(x, z)$ — геодезическое расстояние, т. е. длина наискратчайшей гладкой кривой в S_n , соединяющей x и z .

Доказательство провести по следующей схеме (см. [31], а также [98]).

(а) Установить, что в классе $\mathcal{B}$ всех замкнутых множеств B в S_n , для которых $\mu(F) = \mu(B)$ и $\mu(F^\varepsilon) \geq \mu(B^\varepsilon)$ для всех $\varepsilon > 0$, имеется множество M с максимальной мерой пересечения с C . Поскольку речь здесь идет об ε -окрестностях замкнутых множеств, полезным оказывается обращение к пространству Хаусдорфа $(\mathcal{F}, d)$, введенному в задаче II.1.30.

Дальнейшее доказательство сводится к проверке того, что M и есть C . При этом доказательство будет завершено, если удастся предъявить некоторую процедуру «увеличения» пересечения M с C с сохранением принадлежности M к $\mathcal{B}$, когда $M \neq C$.

(б) Рассмотрим *-преобразование борелевского множества $B \subseteq S_n$ относительно гиперплоскости H , проходящей через центр сферы S_n и тем самым делящей сферу S_n на две части. Возьмем все точки множества B , лежащие в первой части сферы, которые при отражении относительно H переходят в точки, не лежащие в B , и перенесем их во вторую часть. В результате получим некоторое множество B_* .

Доказать, что $\mu(B_*) = \mu(B)$ и $\mu(B^\varepsilon) \geq \mu(F^\varepsilon)$ при всех $\varepsilon > 0$.

(с) Установить, что для всякого $B \in \mathcal{B}$, отличного от C , найдется такая гиперплоскость H , что $\mu(B_*C) > \mu(BC)$ и при этом замыкание множества B_* лежит в $\mathcal{B}$. Последнее, в частности, гарантирует, что $M = C$.

Решение. (а) Пусть $B_k \in \mathcal{B}$, $k \geq 1$, таковы, что

$$\lim_k \mu(B_k C) = \sup_{B \in \mathcal{B}} \mu(BC).$$

Метрическое пространство (S_n, ρ_n) компактно и сепарабельно, поэтому по п. (d) и (f) задачи II.1.30 найдутся такие множества $(B_l) \subseteq (B_k)$, что $B_l \rightarrow B_0 = \overline{\lim} B_l$ в метрике Хаусдорфа d , причем ввиду задачи II.1.30(g) и леммы Фату

$$\sup_{B \in \mathcal{B}} \mu(BC) = \lim_l \mu(B_l C) \leq \mu(\overline{\lim} B_l C) = \mu(C \cap \overline{\lim} B_l) \leq \mu(B_0 C).$$

Убедимся, что B_0 и есть M . По определению сходимости в метрике d для всех $\delta, \varepsilon > 0$ окрестность B_0^ε лежит в $B_l^{\varepsilon+\delta}$ начиная с некоторого l . Тем самым $\mu(F^{\varepsilon+\delta}) \geq \mu(B_0^\varepsilon)$. В силу произвольности δ заключаем, что $B_0 \in \mathcal{B}$ и, значит, $M = B_0$.

(b) Первое соотношение следует из определения $*$ -преобразования. Второе вытекает из первого и того, что $*$ -преобразование B^ε всегда содержит B_* .

(c) Если $B \neq C$ и $B \in \mathcal{B}$, то $\mu(B \setminus C) = \mu(C \setminus B) > 0$. Тогда найдутся такие $x \in B \setminus C$ и $y \in C \setminus B$, что мера пересечения любой открытой окрестности, содержащей x , с B не равна нулю и аналогичное верно для y . В этом случае $\mu(B_* C) > \mu(BC)$, где B_* получено в результате $*$ -преобразования относительно гиперплоскости, перпендикулярной отрезку с концами x, y и проходящей через его центр (она также пройдет и через центр сферы). При этом в качестве части сферы, точки которой будут переноситься, надо взять ту часть, что содержит x . В самом деле, при таком преобразовании точки из C останутся неподвижными. Кроме того, в C также перейдет точка x вместе со всеми точками $z \in B \setminus C$ из некоторой достаточно малой окрестности x . Это, конечно, приведет к тому, что $\mu(B_* C) > \mu(BC)$.

Замыкание B_* будет содержаться в $\mathcal{B}$ ввиду п. (b) по следующим причинам. Во-первых, замыкание всегда можно получить как пересечение $1/k$ -окрестностей множества, $k \geq 1$, и, значит, его мера не может быть больше $\lim \mu(F^{1/k}) = \mu(F)$ и тем самым должна быть равна $\mu(F)$. Кроме того, ε -окрестность всякого множества совпадает с ε -окрестностью своего замыкания при всех $\varepsilon > 0$. $\square$

30. (В продолжение задачи II.13.29.) (a) Установить, что из изопериметрического неравенства Леви на сфере, в частности, следует классическое изопериметрическое неравенство в $\mathbb{R}^d$, утверждающее, что

среди всех тел в $\mathbb{R}^d$ с гладкой границей и произвольным фиксированным объемом замкнутый шар имеет наименьшую площадь поверхности.

Телом здесь называется всякое множество $V \subseteq \mathbb{R}^d$, полученное замыканием некоторого открытого связного множества в $\mathbb{R}^d$, а площадью поверхности тела V — предел (если он существует)

$$\lambda(V^\varepsilon)' \Big|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda(V^\varepsilon \setminus V)}{\varepsilon},$$

где λ — мера Лебега в $\mathbb{R}^d$, а

$$V^\varepsilon = \{x: \|x - z\| < \varepsilon \text{ для некоторого } z \in V\}.$$

(b) (См. [18], [41].) Доказать другое следствие изопериметрического неравенства Леви:

если $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ — стандартный гауссовский вектор с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей, то для всех $\varepsilon > 0$ и любых замкнутых в $\mathbb{R}^d$ множеств F выполняется неравенство

$$P(\xi \in F^\varepsilon) \geq P(\xi_1 \leq a + \varepsilon),$$

если $P(\xi \in F) \geq P(\xi_1 \leq a)$.

(c) Пусть $(X_1, \dots, X_d)$ — гауссовский вектор,

$$m = \max_{1 \leq k \leq d} EX_k, \quad \sigma^2 = \max_{1 \leq k \leq d} DX_k$$

и

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq d} (X_k - EX_k) > a\right) \leq 1/2 \quad \text{для некоторого } a \in \mathbb{R}.$$

Вывести из п. (b) следующее *неравенство Бореля*:

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq d} X_k > x\right) \leq \Psi\left(\frac{x - m - a}{\sigma}\right),$$

где $x \geq m + a$, $\Psi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_x^\infty e^{-y^2/2} dy$.

Решение. (a) Достаточно доказать, что среди всех тел V в $\mathbb{R}^d$ с гладкой границей и произвольным фиксированным объемом на замкнутом шаре реализуется минимум величины

$$\lambda(V^\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \lambda(V^\delta)' d\delta$$

для каждого $\varepsilon > 0$ (будем считать, что при этом функция $\lambda(V^\delta)'$ непрерывна в точке $\delta = 0$). Последнее же вытекает из изопериметрического неравенства Леви, поскольку пространство $\mathbb{R}^d$ локально (т. е. в сколь угодно большом кубе) может рассматриваться как очень маленькая

часть поверхности сферы S_{d+1} в $\mathbb{R}^{d+1}$ бесконечного большого радиуса. Формально, конечно, надо рассмотреть предел сфер радиуса n , где $n \rightarrow \infty$, замечая, в частности, что геодезическое расстояние на этих сферах стремится (локально) к обычному евклидовому.

(b) Здесь рассуждения совершенно аналогичны п. (a) с той лишь разницей, что в пределе следует воспользоваться задачей П.13.28, а также рассматривать не маленькую часть большой сферы, а всю «шапку» S из изопериметрического неравенства Леви.

(c) Любой гауссовский вектор $X = (X_1, \dots, X_n)$ представим в виде

$$X - EX = CD\xi,$$

где C — ортогональная матрица, D — диагональная матрица с диагональными элементами, не большими σ , а $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ — стандартный гауссовский вектор. Итак, по условию

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq d} (CD\xi)_k \leq a\right) \geq P(\xi_1 \leq 0) = \frac{1}{2},$$

где $(x)_k$ — k -я компонента вектора $x \in \mathbb{R}^d$. При этом для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \left\{x: \|x - z\| < \varepsilon \text{ для некоторого } z \text{ с } \max_{1 \leq k \leq d} (CDz)_k \leq a\right\} \subseteq \\ \subseteq \left\{x: \max_{1 \leq k \leq d} (CDx)_k \leq a + \sigma\varepsilon\right\}. \end{aligned}$$

Действительно, если $\|x - z\| < \varepsilon$ и $\max_{1 \leq k \leq d} (CDz)_k \leq a$, то

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq d} (CDx)_k &\leq \max_{1 \leq k \leq d} (CD(x - z))_k + \max_{1 \leq k \leq d} (CDz)_k \leq \\ &\leq \|CD(x - z)\| + a \leq \|D(x - z)\| + a \leq \sigma\|x - z\| + a \leq a + \sigma\varepsilon. \end{aligned}$$

Применяя теперь результат п. (b), находим, что

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq d} (X_k - EX_k) \leq a + \sigma\varepsilon\right) \geq P(\xi_1 \leq \varepsilon).$$

Далее,

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq d} X_k > a + m + \sigma\varepsilon\right) \leq P\left(\max_{1 \leq k \leq d} (X_k - EX_k) > a + \sigma\varepsilon\right) \leq P(\xi_1 > \varepsilon).$$

Осталось выбрать $x = a + m + \sigma\varepsilon$. $\square$

31. Пусть (X, Y) — двумерный гауссовский вектор с $EX = EY = 0$, $EX^2 = EY^2 = 1$ и коэффициентом корреляции $\rho = EXY$.

(а) Показать, что величины X и $Z = (Y - \rho X)/\sqrt{1 - \rho^2}$ являются независимыми $\mathcal{N}(0, 1)$ -распределенными.

(б) Доказать, что

$$P(X > 0, Y > 0) = P(X < 0, Y < 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arcsin \rho,$$

и вывести отсюда соотношения

$$\frac{\partial}{\partial \rho} P(X > 0, Y > 0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}},$$

$$P(X > 0, Y < 0) = P(X < 0, Y > 0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \arcsin \rho,$$

$$P(XY < 0) = \frac{1}{\pi} \arccos \rho.$$

(с) Показать, что для произвольных a и b при $\rho > 0$ справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} [1 - \Phi(a)][1 - \Phi(c)] &\leq P(X > a, Y > b) \leq \\ &\leq [1 - \Phi(a)][1 - \Phi(c)] + \frac{\rho\varphi(b)}{\varphi(a)} [1 - \Phi(a)][1 - \Phi(d)], \end{aligned}$$

где $c = (b - \rho a)/\sqrt{1 - \rho^2}$, $d = (a - \rho b)/\sqrt{1 - \rho^2}$ и $\varphi(x) = \Phi'(x)$ — стандартная нормальная плотность.

Решение. (а) Величина Z является гауссовской как линейная комбинация совместно гауссовских. При этом $EZ = 0$, $DZ = EZ^2 = 1$ и $\text{cov}(X, Z) = 0$, так что X и Z — независимые $\mathcal{N}(0, 1)$ -величины.

(б) Пусть $\rho = \sin \theta$ и $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, тогда $Y = Z \cos \theta + X \sin \theta$ и

$$\begin{aligned} P(X > 0, Y > 0) &= P(X > 0, X \tan \theta + Z > 0) = \\ &= \iint_{x>0, z>x \tan(-\theta)} \frac{e^{-(x^2+z^2)/2}}{2\pi} dx dz. \end{aligned}$$

Переходя к полярным координатам $x = r \cos \phi$, $z = r \sin \phi$, получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\theta}^{\pi/2} d\phi \int_{\mathbb{R}_+} r e^{-r^2/2} dr = \frac{1}{4} + \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arcsin \rho.$$

Более того, $P(X > 0, Y > 0) = P(-X > 0, -Y > 0)$ в силу равенства $(X, Y) \stackrel{d}{=} -(X, Y)$.

Второе равенство получается дифференцированием первого. Далее,

$$P(X > 0, Y < 0) = P(X > 0, \hat{Y} > 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arcsin \hat{\rho} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \arcsin \rho,$$

где $\hat{Y} = -Y$ и $\hat{\rho} = EX\hat{Y} = -\rho$. Четвертое равенство выводится из третьего.

(с) Как и в п. (а), рассмотрим разложение $Y = Z\sqrt{1-\rho^2} + X\rho$. В силу независимости X и Z по теореме Фубини $Ef(X, Z) = E[Ef(x, Z)]|_{x=X}$. Поэтому

$$\begin{aligned} P(X > a, Y > b) &= E I(X > a) I\left(\frac{b - X\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} < Z\right) = \\ &= E I(X > a) \left[1 - \Phi\left(c - \frac{(X-a)\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\right] \geq [1 - \Phi(a)][1 - \Phi(c)]. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} P(X > a, Y > b) &= \int_a^\infty \left[1 - \Phi\left(\frac{b - x\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\right] \varphi(x) dx = \\ &= [1 - \Phi(a)][1 - \Phi(c)] + \int_a^\infty [1 - \Phi(x)] \varphi\left(\frac{b - \rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \frac{\rho dx}{\sqrt{1-\rho^2}}. \end{aligned}$$

Функция $[1 - \Phi(x)]/\varphi(x)$ убывает, поэтому последний интеграл не превосходит

$$\frac{1 - \Phi(a)}{\varphi(a)} \int_a^\infty \varphi(x) \varphi\left(\frac{b - \rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \frac{\rho dx}{\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1 - \Phi(a)}{\varphi(a)} \cdot \rho \varphi(b) [1 - \Phi(d)],$$

где последнее равенство устанавливается прямой проверкой. $\square$

32. Пусть $Z = XY$, где X и Y — независимые случайные величины, $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ и $P(Y = 1) = P(Y = -1) = 1/2$. Показать, что $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, и найти распределение векторов (X, Z) , (Y, Z) , а также распределение случайной величины $X + Z$. Убедиться в том, что X и Z некоррелированы, но зависимы.

Решение. Имеем $\text{Law}(Z|Y = 1) = \text{Law}(X) = \mathcal{N}(0, 1)$ и $\text{Law}(Z|Y = -1) = \text{Law}(-X) = \mathcal{N}(0, 1)$, поэтому Z независимо с Y и $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Кроме того,

$$\begin{aligned} P(X \leq x, Z \leq z) &= \frac{P(X \leq x \wedge z)}{2} + \frac{P(-z \leq X \leq x)}{2} = \\ &= \frac{\Phi(x \wedge z)}{2} + \frac{\Phi(x) - \Phi(-z)}{2} I(x \geq -z), \\ P(X + Z \leq x) &= \frac{P(2X \leq x) + I(x \geq 0)}{2}. \end{aligned}$$

Очевидно также, что X и Z зависимы, однако $\text{cov}(X, Z) = EXZ = EX^2EY = 0$. $\square$

33. Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ и

$$\eta_\alpha = \begin{cases} \xi, & \text{если } |\xi| \leq \alpha, \\ -\xi, & \text{если } |\xi| > \alpha. \end{cases}$$

Показать, что $\eta_\alpha \sim \mathcal{N}(0, 1)$ и при таком α , что

$$\int_0^\alpha x^2 \varphi(x) dx = \frac{1}{4}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

величины ξ и η_α являются некоррелированными, но зависимыми гауссовскими величинами (ср. с теоремой 1(a) из В1.П.13).

Решение. По определению η_α с учетом равенства $\xi \stackrel{d}{=} -\xi$ получаем

$$\begin{aligned} P(\eta_\alpha \leq x) &= P(\xi \leq x, |\xi| \leq \alpha) + P(-\xi \leq x, |\xi| > \alpha) = \\ &= P(\xi \leq x, |\xi| \leq \alpha) + P(\xi \leq x, |\xi| > \alpha) = P(\xi \leq x), \end{aligned}$$

так что $\eta_\alpha \sim \mathcal{N}(0, 1)$. К тому же

$$\begin{aligned} \text{cov}(\xi, \eta_\alpha) &= E\xi\eta_\alpha = E\xi^2 I(|\xi| \leq \alpha) - E\xi^2 I(|\xi| > \alpha) = \\ &= 2E\xi^2 I(|\xi| \leq \alpha) - 1 = 0, \end{aligned}$$

если

$$E\xi^2 I(|\xi| \leq \alpha) = 2 \int_0^\alpha x^2 \varphi(x) dx = \frac{1}{2}. \quad \square$$

34. Пусть ξ и η — нормально распределенные случайные величины, $E\xi = E\eta = 0$, $E\xi^2 = E\eta^2 = 1$ и $E\xi\eta = \rho$. Показать, что

$$(a) E(\xi \vee \eta) = \sqrt{(1-\rho)/\pi}, \quad E(\xi \vee \eta)^2 = 1,$$

$$(b) E(\xi|\eta) = \rho\eta, \quad D(\xi|\eta) = 1 - \rho^2,$$

$$(c) E(\xi|\xi + \eta) = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad D(\xi|\xi + \eta) = (1 - \rho)/2,$$

$$(d) E(\xi|\eta > 0) = \rho\sqrt{2/\pi},$$

$$(e) E|\xi\eta| = \frac{2}{\pi}(\rho \arcsin \rho + \sqrt{1 - \rho^2}).$$

Рассмотреть соответствующие аналоги приведенных формул для случая, когда $D\xi = \sigma_\xi^2$ и $D\eta = \sigma_\eta^2$ с $\sigma_\xi > 0$, $\sigma_\eta > 0$.

Решение. (a) Так как $(\xi, \eta) \stackrel{d}{=} (-\xi, -\eta)$, получаем, что $\xi \vee \eta \stackrel{d}{=} -\xi \wedge \eta$ и

$$E(\xi \vee \eta) = E \frac{\xi \vee \eta - \xi \wedge \eta}{2} = \frac{E|\xi - \eta|}{2} = \sqrt{\frac{D(\xi - \eta)}{2\pi}} = \sqrt{\frac{1 - \rho}{\pi}}.$$

Аналогично

$$E(\xi \vee \eta)^2 = E \frac{(\xi \vee \eta)^2 + (\xi \wedge \eta)^2}{2} = E \frac{\xi^2 + \eta^2}{2} = 1.$$

Пункты (b) и (c) можно доказать, используя независимость величин $\xi - \rho\eta$ и η , а также

$$\xi - (\xi + \eta)/2 \quad \text{и} \quad \xi + \eta.$$

(d) Поскольку $(\xi, \eta) \stackrel{d}{=} (-\xi, -\eta)$, получаем, что

$$E\xi I(\eta > 0) = \frac{1}{2}E(\xi - \rho\eta) + \rho E\eta I(\eta > 0) = \frac{\rho}{\sqrt{2\pi}}.$$

Другими словами, $E(\xi|\eta > 0) = \rho\sqrt{2/\pi}$.

(е) Найдем $E|\xi\eta|$. Будем считать, что $\rho > 0$, иначе заменим ξ на $-\xi$. Имеем

$$E|\xi\eta| = E|\xi(\xi \cos \alpha + \zeta \sin \alpha)|,$$

где величина

$$\zeta = \frac{\eta - \rho\xi}{\sqrt{1 - \rho^2}}$$

не будет зависеть от ξ и будет иметь распределение $\mathcal{N}(0, 1)$ (см. задачу П.13.31(a)), $\cos \alpha = \rho$ и $\sin \alpha = \sqrt{1 - \rho^2}$ для некоторого α , $0 \leq \alpha \leq \pi/2$. Поэтому

$$\begin{aligned} E|\xi\eta| &= \int_{\mathbb{R}^2} |x(x \cos \alpha + z \sin \alpha)| \frac{e^{-\frac{x^2+z^2}{2}}}{2\pi} dx dz = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos \theta \cos(\theta - \alpha)| d\theta \int_0^\infty r^3 e^{-\frac{r^2}{2}} dr = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos \alpha + \cos(2\theta - \alpha)| d\theta = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} |\cos(\theta - \alpha) - \cos(\pi - \alpha)| d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos \theta - \cos(\pi - \alpha)| d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} [\cos(\pi - \alpha) - \cos \theta] d\theta + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-(\pi-\alpha)}^{\pi-\alpha} [\cos \theta - \cos(\pi - \alpha)] d\theta = \\ &= -\frac{\alpha \cos \alpha}{\pi} + \frac{\sin \alpha}{\pi} + \frac{(2\pi - 2\alpha) \cos \alpha}{2\pi} + \frac{\sin \alpha}{\pi} = \\ &= \rho - \frac{2\rho \arccos \rho}{\pi} + \frac{2\sqrt{1-\rho^2}}{\pi} = \frac{2}{\pi} (\rho \arcsin \rho + \sqrt{1-\rho^2}). \end{aligned}$$

Вывод аналогов приведенных формул для случая $D\xi = \sigma_\xi^2$ и $D\eta = \sigma_\eta^2$ оставляем читателю. $\square$

35. Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ — невырожденный гауссовский вектор с нулевыми средними и ковариационной матрицей $R = \|E\xi_i\xi_j\|$. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — собственные числа матрицы R . Показать, что характеристическая функция $\varphi(t)$ случайной величины $\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$ совпадает с характеристической функцией случайной величины $\lambda_1\zeta_1^2 + \dots + \lambda_n\zeta_n^2$ (здесь $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ — н. о. р. случайные величины, $\zeta_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$) и может быть представлена в следующем виде:

$$\varphi(t) = \prod_{j=1}^n |1 - 2it\lambda_j|^{-1/2}.$$

Решение. Матрица R симметрична и неотрицательно определена. Согласно известному факту из линейной алгебры найдется ортогональная матрица C , для которой матрица $D = CRC^\top$ диагональна с неотрицательными числами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ на диагонали. Следовательно, в качестве ζ можно взять

$$\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) = D^{-\frac{1}{2}}C\xi \sim \mathcal{N}(0, D^{-\frac{1}{2}}CRC^\top D^{-\frac{1}{2}}) \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0, I_n),$$

где 0 — нулевой вектор в $\mathbb{R}^n$, а I_n — единичная матрица размера $n \times n$. Более того, в силу ортогональности матрицы C имеем

$$\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 = \xi^\top \xi = (C\xi)^\top (C\xi) = \zeta^\top D \zeta = \lambda_1\zeta_1^2 + \dots + \lambda_n\zeta_n^2.$$

Вычислим характеристическую функцию величины $\lambda_1\zeta_1^2 + \dots + \lambda_n\zeta_n^2$. Из независимости $\lambda_j\zeta_j^2$, $1 \leq j \leq n$, следует, что

$$Ee^{it \sum_{j=1}^n \lambda_j \zeta_j^2} = \prod_{j=1}^n Ee^{it \lambda_j \zeta_j^2}.$$

Покажем, что $Ee^{it \lambda_j \zeta_j^2} = |1 - 2it\lambda_j|^{-\frac{1}{2}}$. Имеем

$$Ee^{it \lambda_j \zeta_j^2} = \int_{\mathbb{R}} e^{it \lambda_j x^2} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} dx}{\sqrt{2\pi}} = |1 - 2it\lambda_j|^{-\frac{1}{2}} \int_L \frac{e^{-\frac{z^2}{2}} dz}{\sqrt{2\pi}},$$

где $L = \{z \in \mathbb{C}: z = |z|e^{i\theta}\}$, а $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ таково, что $1 - 2i\lambda_j t = |1 - 2it\lambda_j| e^{2i\theta}$. Осталось установить, что

$$\int_L \frac{e^{-\frac{z^2}{2}} dz}{\sqrt{2\pi}} = 1.$$

Согласно теории функций комплексного переменного из голоморфности функции $e^{-z^2/2}$ следует, что

$$\int_L \frac{e^{-\frac{z^2}{2}} dz}{\sqrt{2\pi}} = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} dx}{\sqrt{2\pi}} + \\ + \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\int_0^{\sin \theta} \frac{e^{-\frac{(r+iy)^2}{2}} dy}{\sqrt{2\pi}} + \int_{-r \sin \theta}^0 \frac{e^{-\frac{(-r+iy)^2}{2}} dy}{\sqrt{2\pi}} \right] = 1 + 0 = 1.$$

□

36. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — н. о. р. случайные величины, $n \geq 2$. Показать, что распределение вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ сферически симметрично в том и только том случае, когда каждая из величин $\xi_1, \dots, \xi_n$ является нормально распределенной с нулевым средним.

Решение. Допустим вначале, что распределение величины ξ сферически симметрично. В терминах характеристических функций $\varphi_\xi = \varphi_\xi(\lambda)$ это условие означает, что для любой такой ортогональной матрицы C , что $\det C = 1$, выполняется равенство

$$\varphi_\xi(\lambda) = \varphi_{C\xi}(\lambda) = \varphi_\xi(C^T \lambda) = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2\right)$$

для некоторой функции f и всех $\lambda \in \mathbb{R}^n$. С другой стороны, из независимости и одинаковой распределенности величин ξ_i следует, что

$$\varphi_\xi(\lambda) = \prod_{i=1}^n \varphi_{\xi_i}(\lambda_i).$$

Поэтому $\varphi(\lambda_1) = f(\lambda_1^2)$ (а значит, $\varphi(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$) и

$$\prod_{i=1}^n f(\lambda_i^2) = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2\right).$$

Единственной непрерывной ограниченной функцией, удовлетворяющей этому уравнению и условию $f(0) = 1$, является экспоненциальная, т. е. $f(\lambda_1^2) = e^{-c\lambda_1^2}$ для некоторого $c \geq 0$. Следовательно, каждая из компонент $\xi_1, \dots, \xi_n$ является нормально распределенной с нулевым средним и дисперсией $2c$. В обратную сторону утверждение устанавливается элементарной проверкой. □

37. (См. [62].) Пусть $X = (X_1, X_2, \dots)$ — гауссовская случайная последовательность, а L — произвольное линейное подпространство $\mathbb{R}^\infty$.

Доказать, что тогда справедлив закон «нуля или единицы» для гауссовских систем:

$$P(X \in L) = 0 \text{ или } 1.$$

Вывести, в частности, что $P(\sup_n |X_n| < \infty) = 0$ или 1.

Решение. Пусть $Y = (Y_1, Y_2, \dots)$ — независимая копия X . Тогда для всех $0 < \theta < \pi/2$ случайные последовательности

$$X \cos \theta + Y \sin \theta \quad \text{и} \quad -X \sin \theta + Y \cos \theta$$

независимы и распределены так же, как X . Поэтому

$$P(B_\theta) = P(X \in L)[1 - P(X \in L)],$$

где

$$B_\theta = \{X \cos \theta + Y \sin \theta \in L, -X \sin \theta + Y \cos \theta \notin L\}.$$

События B_θ попарно не пересекаются при разных $\theta \in (0, \pi/2)$. В самом деле, если для некоторых $\theta \neq \gamma$ и некоторого $\omega \in \Omega$ выполняется равенство

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \cos \gamma & \sin \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(\omega) \\ Y(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in L^2,$$

то

$$\begin{pmatrix} X(\omega) \\ Y(\omega) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin(\theta - \gamma)} \begin{pmatrix} \sin \gamma & -\sin \theta \\ -\cos \gamma & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in L^2$$

и, в частности, $-X(\omega) \sin \theta + Y(\omega) \cos \theta \in L$. Другими словами, такие ω не принадлежат B_θ . Итак, мы построили континуум непересекающихся множеств B_θ одинаковой вероятности. Это возможно, только если указанная вероятность равна нулю. Последнее гарантирует, что $P(X \in L) = 0$ или 1.

Для вывода равенства

$$P(\sup_n |X_n| < \infty) = 0 \text{ или } 1$$

следует заметить, что $\{\sup_n |X_n| < \infty\} = \{X \in l_\infty\}$, где l_∞ — (линейное) пространство всех ограниченных последовательностей. $\square$

38. (См. [78].) В условиях задачи II.13.37 показать, что если

$$P(\sup_n |X_n| < \infty) = 1,$$

то

$$E \sup_n |X_n| < \infty.$$

(См. задачу II.6.40.)

Решение. Пусть $Y = (Y_1, Y_2, \dots)$ — независимая копия величины X . Тогда случайные последовательности

$$\frac{X+Y}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \frac{X-Y}{\sqrt{2}}$$

независимы и распределены так же, как и X . Пусть, далее, $|(x_1, x_2, \dots)| = \sup_i |x_i|$. Для всех $n \geq 1$ имеем

$$P(|X| < n)P(|X| > 2n) = P\left(\left|\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right| < n, \left|\frac{X-Y}{\sqrt{2}}\right| > 2n\right).$$

К тому же

$$\left\{\left|\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right| < n\right\} \subseteq \left\{\left|\frac{X-Y}{\sqrt{2}}\right| - \sqrt{2}|X| \wedge |Y| < n\right\},$$

и, значит, имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \left\{\left|\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right| < n, \left|\frac{X-Y}{\sqrt{2}}\right| > 2n\right\} &\subseteq \{2n - \sqrt{2}|X| \wedge |Y| < n\} = \\ &= \left\{|X| > \frac{n}{\sqrt{2}}, |Y| > \frac{n}{\sqrt{2}}\right\}. \end{aligned}$$

Отсюда находим, что

$$P(|X| < n)P(|X| > 2n) \leq P\left(|X| > \frac{n}{\sqrt{2}}\right)^2 \quad \text{и} \quad \lim_n \frac{P(|X| > 2n)}{P(|X| > n/\sqrt{2})} = 0,$$

поскольку по условию

$$P(|X| < n) \rightarrow P(|X| < \infty) = 1 \quad \text{и} \quad P(|X| > n/\sqrt{2}) \rightarrow P(|X| = \infty) = 0.$$

Конечность $E|X|$ вытекает теперь из замечания к задаче II.6.40. $\square$

39. Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2 I_n)$ — гауссовский вектор в $\mathbb{R}^n$ со средним $E\xi = a$ и ковариационной матрицей $\sigma^2 I_n = D\xi = E(\xi - E\xi)(\xi - E\xi)^\top$, где I_n — единичная матрица размера $n \times n$ и $\sigma > 0$. Пусть также P, Q — ортогональные проекторы на взаимно ортогональные подпространства в $\mathbb{R}^n$, т. е.

$$PQ = QP = O_{n \times n}, \quad P^2 = P = P^\top, \quad Q^2 = Q = Q^\top,$$

где $O_{n \times n}$ — нулевая матрица размера $n \times n$. Доказать, что случайные векторы $P\xi$ и $Q\xi$ независимы, причем

$$P\xi \sim \mathcal{N}(Pa, \sigma^2 P), \quad Q\xi \sim \mathcal{N}(Qa, \sigma^2 Q).$$

В частности, если $Qa = 0$, то

$$\frac{\|Q\xi\|^2}{\sigma^2} = \frac{\xi^\top Q\xi}{\sigma^2} \sim \chi_{\text{rk } Q}^2.$$

Решение. Поскольку вектор, образованный компонентами векторов $P\xi$ и $Q\xi$, является гауссовским, для доказательства независимости $P\xi$ и $Q\xi$ достаточно проверить их некоррелированность:

$$E(P\xi - Pa)(Q\xi - Qa)^\top = P \cdot E(\xi - a)(\xi - a)^\top \cdot Q = P\sigma^2 I_n Q = O_n.$$

Кроме того, $P\xi \sim P \cdot \mathcal{N}(a, \sigma^2 I_n) = \mathcal{N}(Pa, \sigma^2 PP^\top) = \mathcal{N}(Pa, \sigma^2 P)$. Аналогично устанавливается, что $Q\xi \sim \mathcal{N}(Qa, \sigma^2 Q)$. Теперь если $Qa = 0$, то $\frac{Q\xi}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, Q)$. Согласно известному факту из линейной алгебры найдется такая ортогональная матрица C , что

$$CQC^\top = \begin{pmatrix} I_{\text{rk } Q} & O_{\text{rk } Q \times (n - \text{rk } Q)} \\ O_{(n - \text{rk } Q) \times \text{rk } Q} & O_{(n - \text{rk } Q) \times (n - \text{rk } Q)} \end{pmatrix}.$$

Другими словами, с вероятностью единица

$$\frac{CQ\xi}{\sigma} = (\zeta_1, \dots, \zeta_{\text{rk } Q}, 0, \dots, 0),$$

где $\zeta_1, \dots, \zeta_{\text{rk } Q}$ — независимые гауссовские величины, распределенные по закону $\mathcal{N}(0, 1)$. Следовательно,

$$\frac{\|Q\xi\|^2}{\sigma^2} = \frac{\|CQ\xi\|^2}{\sigma^2} = \zeta_1^2 + \dots + \zeta_{\text{rk } Q}^2 \sim \chi_{\text{rk } Q}^2. \quad \square$$

40. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n, n \geq 2$, — независимые случайные величины, распределенные по закону $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$. Показать, что величины

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i, \quad s_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2$$

независимы, причем

$$\bar{\xi} \sim \mathcal{N}\left(a, \frac{\sigma^2}{n}\right), \quad \frac{(n-1)s_1^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2.$$

Решение. Применяя утверждение задачи II.13.39 для ортогональных проекторов P и $Q = I_n - P$ соответственно на линейное пространство, порожденное вектором $e = (1, \dots, 1)$, и на его ортогональное дополнение, находим, что $P\xi = \bar{\xi}e$ и $s_1^2 = \frac{\|Q\xi\|^2}{n-1}$ независимы, причем $\frac{(n-1)s_1^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$. Далее, величина $\bar{\xi}$ является гауссовской как линейная комбинация компонент гауссовского вектора. При этом

$$E\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\xi_i = a, \quad D\bar{\xi} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D\xi_i = \frac{\sigma^2}{n}. \quad \square$$

41. (К статистике нормального распределения $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$: основные статистики.) Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — н. о. р. случайные величины, $\xi_1 \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ и $x = (x_1, \dots, x_n)$ — выборка, полученная в результате наблюдений над $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $n \geq 1$. Показать, что пары статистик

$$T_1(x) = \sum_{i=1}^n x_i, \quad T_2(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

и

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad s^2(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2$$

являются *достаточными* статистиками.

Решение. Утверждение вытекает из следующего критерия факторизации.

Если ξ — случайный вектор в $\mathbb{R}^n$ с плотностью $f = f(x, \theta)$, $(x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \Theta$, то вектор-функция $T = T(x)$ будет достаточной статистикой тогда и только тогда, когда f допускает представление

$$f(x, \theta) = g(T(x), \theta)h(x)$$

для некоторых функций g, h .

Для применения этого критерия следует положить $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. $\square$

42. (К статистике нормального распределения $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$: a неизвестно, $\sigma^2 = \sigma_0^2$)

В этой и следующей задачах предполагается, что $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины, распределенные по закону $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$.

Пусть a неизвестно, σ^2 известно и $\sigma^2 = \sigma_0^2$.

(а) Показать, что для $\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$ выполняются соотношения

$$E\bar{\xi} = a \quad (\text{несмещенность}), \quad D\bar{\xi} = \frac{\sigma_0^2}{n}.$$

(б) Установить, что (при $\sigma^2 = \sigma_0^2$) выборочное среднее $\bar{x}$ является *эффективной* оценкой, т. е. несмещенной и с наименьшей дисперсией. С этой целью показать, что в рассматриваемом случае для несмещенных оценок $T(x)$ параметра a справедливо *неравенство Рао—Крамера*:

$$DT(\xi) \geq - \frac{1}{nE \left[\frac{\partial^2 \ln p_{(a, \sigma_0^2)}(\xi_1)}{\partial a^2} \right]} = \frac{\sigma_0^2}{n},$$

где

$$p_{(a, \sigma_0^2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_0^2}}.$$

(с) Показать, что

$$\sqrt{n} \frac{\bar{\xi} - a}{\sigma_0} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

и если z_α выбрано так, что

$$1 - \alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z_\alpha}^{z_\alpha} e^{-t^2/2} dt \quad (= 2\Phi(z_\alpha) - 1),$$

где $0 < \alpha < 1$, то интервал

$$\left(\bar{x} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_\alpha, \bar{x} + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_\alpha \right)$$

будет *доверительным* интервалом для a с *коэффициентом надежности* $1 - \alpha$, т. е. с «вероятностью накрытия»

$$P_{(a, \sigma_0^2)} \left(\bar{\xi} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_\alpha \leq a \leq \bar{\xi} + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_\alpha \right) = 1 - \alpha,$$

где $P_{(a, \sigma_0^2)}$ — распределение с плотностью $p_{(a, \sigma_0^2)}$.

Решение. Пункт (а) устанавливается прямой проверкой. Пункт (б) следует из п. (а), неравенства Рао—Крамера и того, что

$$E \left[\frac{\partial^2 \ln p_{(a, \sigma_0^2)}(\xi_1)}{\partial a^2} \right] = E \left[-\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma_0^2) - \frac{(\xi_1 - a)^2}{2\sigma_0^2} \right]''_{aa} = -\frac{1}{\sigma_0^2}.$$

Докажем п. (с). Величина $\sqrt{n} \frac{\bar{\xi} - a}{\sigma_0}$ имеет стандартное нормальное распределение при любых a и σ_0 (это вытекает из задачи П.13.40). Следовательно,

$$\begin{aligned} P_{(a, \sigma_0^2)} \left(\bar{\xi} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_\alpha \leq a \leq \bar{\xi} + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_\alpha \right) &= P_{(a, \sigma_0^2)} \left(\sqrt{n} \left| \frac{\bar{\xi} - a}{\sigma_0} \right| \leq z_\alpha \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z_\alpha}^{z_\alpha} e^{-t^2/2} dt = 1 - \alpha. \quad \square \end{aligned}$$

43. (*K* статистике нормального распределения $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$: $a = a_0$, σ^2 неизвестно.) Если a известно ($a = a_0$), то в качестве оценки

σ^2 естественно брать не величину $s^2(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, а величину

$$s_0^2(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a_0)^2.$$

(а) Показать, что

$$Es_0^2(\xi) = \sigma^2 \quad (\text{несмещенность}), \quad Ds_0^2(\xi) = \frac{2\sigma^4}{n}.$$

(б) Установить, что *выборочная дисперсия* $s_0^2(x)$ является (при $a = a_0$) *эффективной* оценкой величины σ^2 , т. е. несмещенной и с наименьшей дисперсией. Для этого установить, что неравенство Рао—Крамера для несмещенных оценок $T(x)$ величины σ^2 имеет следующий вид:

$$DT(\xi) \geq - \frac{1}{nE \left[\frac{\partial^2 \ln p_{(a_0, \sigma^2)}(\xi_1)}{\partial (\sigma^2)^2} \right]} = \frac{2\sigma^4}{n}.$$

Для решения вопроса о точности оценки $s_0^2(x)$ построим доверительный интервал для σ^2 , воспользовавшись следующими соображениями.

(с) Положим для $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\chi_n^2(x) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - a_0}{\sigma} \right)^2.$$

Поскольку

$$\chi_n^2(\xi) \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \quad (\sim \chi_n^2),$$

в соответствии с формулой (34) из В1.П.8 величина $\chi_n^2(\xi)$ имеет χ^2 -распределение с n степенями свободы и плотностью ($x \geq 0$)

$$f_n(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x/2}}{2^{n/2} \Gamma(n/2)}.$$

Поскольку также

$$s_0^2(x) = \frac{\chi_n^2(x) \sigma^2}{n},$$

получаем, что

$$P_{(a_0, \sigma_0^2)} \left(\frac{s_0^2(x)n}{\sigma^2} \leq x \right) = F_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt.$$

(Отметим, что χ^2 -распределение протабулировано для многих значений $n = 1, 2, \dots$) Поэтому для заданного $0 < \alpha < 1$ можно найти такие $q_{\alpha/2}$ и $q_{1-\alpha/2}$, что

$$\int_0^{q_{\alpha/2}} f_n(t) dt = \frac{\alpha}{2}, \quad \int_{q_{1-\alpha/2}}^{\infty} f_n(t) dt = \frac{\alpha}{2}.$$

Тогда

$$\int_{q_{\alpha/2}}^{q_{1-\alpha/2}} f_n(t) dt = 1 - \alpha$$

и интервал

$$\left(\frac{s_0^2(x)n}{q_{1-\alpha/2}}, \frac{s_0^2(x)n}{q_{\alpha/2}} \right)$$

будет доверительным интервалом для σ^2 с коэффициентом надежности $1 - \alpha$, так как

$$\left\{ \frac{s_0^2(x)n}{q_{1-\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{s_0^2(x)n}{q_{\alpha/2}} \right\} = \{q_{\alpha/2} \leq \chi_n^2(x) \leq q_{1-\alpha/2}\}.$$

Пусть q_γ и $q_{1-(\alpha-\gamma)}$ выбраны так, что

$$\int_0^{q_\gamma} f_n(t) dt = \gamma, \quad \int_{q_{1-(\alpha-\gamma)}}^{\infty} f_n(t) dt = \alpha - \gamma,$$

где $0 \leq \gamma \leq \alpha$. Другими словами, для всех $\gamma \in [0, \alpha]$ имеем

$$\int_{q_\gamma}^{q_{1-(\alpha-\gamma)}} f_n(t) dt = 1 - \alpha.$$

Спрашивается, каково то γ , которое приводит к наиболее узкому доверительному интервалу для σ^2 с коэффициентом надежности $1 - \alpha$? Верно ли, что $\gamma = \alpha/2$?

Решение. (а) Случайный вектор $\zeta = \left(\frac{\xi_i - a_0}{\sigma}, 1 \leq i \leq n \right)$ состоит из независимых гауссовских величин, имеющих распределение $\mathcal{N}(0, 1)$. Следовательно,

$$\frac{n s_0^2(\xi)}{\sigma^2} = \|\zeta\|^2 \sim \chi_n^2.$$

Применим формулу расчета среднего и дисперсии для величин с χ_n^2 -распределением (т. е. имеющих гамма-распределение с параметрами

$(n/2, 1/2)$):

$$E \frac{n s_0^2(\xi)}{\sigma^2} = n, \quad D \frac{n s_0^2(\xi)}{\sigma^2} = 2n,$$

что эквивалентно требуемым соотношениям.

(b) Рассчитаем величину

$$I = - \frac{1}{n E \left[\frac{\partial^2 \ln p_{(a_0, \sigma^2)}(\xi_1)}{\partial (\sigma^2)^2} \right]},$$

реализующую нижнюю границу дисперсий несмещенных оценок параметра σ^2 . По определению $p_{(a_0, \sigma^2)}$ имеем

$$E \left[\frac{\partial^2 \ln p_{(a_0, \sigma^2)}(\xi_1)}{\partial (\sigma^2)^2} \right] = \frac{1}{2\sigma^4} - E \frac{(\xi_1 - a_0)^2}{\sigma^6} = -\frac{1}{2\sigma^4},$$

так что $I = 2\sigma^4/n$. Следовательно, по неравенству Рао–Крамера оценка $s_0^2(x)$ является *эффективной* (поскольку $Ds_0^2(\xi) = I$ в силу п. (a)).

(c) По определению q_γ и $q_{1-(\alpha-\gamma)}$ представимы в виде

$$q_\gamma = F_n^{-1}(\gamma), \quad q_{1-(\alpha-\gamma)} = F_n^{-1}(1 - \alpha + \gamma).$$

Таким образом, оптимальное значение γ^* может быть найдено из следующей экстремальной задачи:

$$\frac{1}{F_n^{-1}(\gamma)} - \frac{1}{F_n^{-1}(1 - \alpha + \gamma)} \rightarrow \min_{\gamma}.$$

Используя условия первого порядка, находим, что

$$\frac{1}{|F_n^{-1}(\gamma^*)|^2} \frac{1}{F'_n(F_n^{-1}(\gamma^*))} - \frac{1}{|F_n^{-1}(1 - \alpha + \gamma^*)|^2} \frac{1}{F'_n(F_n^{-1}(1 - \alpha + \gamma^*))} = 0,$$

или, что эквивалентно,

$$g_n(x)|_{x=F_n^{-1}(\gamma^*)} = g_n(x)|_{x=F_n^{-1}(1-\alpha+\gamma^*)},$$

где $g_n(x) = x^{n/2+1}e^{-x/2}$. Отметим также, что функция $g_n = g_n(x)$, $x \geq 0$, унимодальна (т. е. имеет единственную точку максимума $x_n^* = n + 2$, является возрастающей до x_n^* и убывающей после x_n^*). $\square$

44. (К статистике нормального распределения $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$: a и σ^2 неизвестны.)

(a) Показать, что в рассматриваемом случае *несмещенными* оценками для a и σ^2 являются при $n > 1$ оценки

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad s_1^2(x) \equiv \frac{n}{n-1} s^2(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

(b) Показать, что статистика

$$t_{n-1}(x) = \frac{\bar{x} - a}{s_1(x)/\sqrt{n}}$$

имеет распределение Стьюдента с $n - 1$ степенью свободы; см. таблицу 3 в В1.П.3.

(c) Основываясь на распределении Стьюдента для $t_{n-1}(\xi)$ и принимая во внимание, что $t_{n-1}(x) = \frac{\bar{x} - a}{s_1(x)/\sqrt{n}}$, построить доверительные интервалы для a с коэффициентом надежности $1 - \alpha$.

(d) Установив, что $(n - 1) \frac{s_1^2(\xi)}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$, построить доверительные интервалы для σ с коэффициентом надежности $1 - \alpha$.

Решение. (a) Очевидно, что

$$E\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\xi_i = E\xi_1 = a.$$

Кроме того, $(n - 1) \frac{s_1^2(\xi)}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$ вследствие задачи П.13.40, поэтому

$$E(n - 1) \frac{s_1^2(\xi)}{\sigma^2} = n - 1,$$

что равносильно несмещенности $s_1^2(\xi)$ как оценки σ^2 .

(b) Представим величину $t_{n-1}(x)$ в виде

$$t_{n-1}(x) = \frac{\bar{x} - a}{\frac{\sigma}{s_1(x)/\sigma} \sqrt{n}}$$

и заметим, что вследствие задач П.13.40 и П.13.42(c)

1) числитель имеет стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0, 1)$;

2) знаменатель $\frac{s_1(\xi)}{\sigma}$ распределен как величина $\sqrt{\frac{\zeta}{n-1}}$, где $\zeta \sim \chi_{n-1}^2$;

3) величины $\frac{\bar{x} - a}{\sigma} \sqrt{n}$ и $\frac{s_1(\xi)}{\sigma}$ являются независимыми.

Требуемое утверждение о распределении величины $t_{n-1}(\xi)$ будет следовать из п. 1–3 и формулы (38) из В1.П.8.

(c) Доверительные интервалы для a на основе статистики $t_{n-1}(x)$ строятся по тому же принципу, что и в П.13.42(c), где вместо квантили нормального распределения z_α следует брать соответствующую квантиль распределения Стьюдента.

(d) Доверительные интервалы для σ^2 на основе статистики $s_1^2(x)$ могут быть построены аналогично тому, как это делалось в задаче П.13.43(c) на основе статистики $s_0^2(x)$.

45. Пусть X — случайный вектор в $\mathbb{R}^n$, имеющий невырожденную ковариационную матрицу DX . Рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$\mathbb{E} \ln f(X; a, \Sigma) \rightarrow \sup_{a, \Sigma},$$

где $\sup$ берется по всем векторам a из некоторого множества $A \subseteq \mathbb{R}^n$ и всем положительно определенным симметричным $(n \times n)$ -матрицам Σ , а $f = f(x; a, \Sigma)$ есть плотность нормального распределения $\mathcal{N}(a, \Sigma)$.

Установить, что относительно a эта задача эквивалентна следующей:

$$\det[\mathbb{E}(X - a)(X - a)^\top] \rightarrow \inf_a.$$

В частности, при $n = 1$ получаем задачу наименьших квадратов

$$\mathbb{E}(X - a)^2 \rightarrow \inf_a. \quad \square$$

Решение. Полагая $Z = Z(a, \Sigma) = \Sigma^{-1/2}(X - a)$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \ln f(X; a, \Sigma) &= -\frac{n}{2} \ln 2\pi + \ln \det \Sigma^{-1} - \frac{1}{2} \mathbb{E} Z^\top Z = \\ &= -\frac{n}{2} \ln 2\pi + \ln \det \Sigma^{-1} - \frac{1}{2} \operatorname{tr}[\mathbb{E} Z Z^\top] = \\ &= -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln \det[\mathbb{E}(X - a)(X - a)^\top] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \ln \det[\Sigma^{-1} \mathbb{E}(X - a)(X - a)^\top] - \frac{1}{2} \operatorname{tr}[\mathbb{E} Z Z^\top] = \\ &= -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln \det[\mathbb{E}(X - a)(X - a)^\top] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \ln \det[\mathbb{E} Z Z^\top] - \frac{1}{2} \operatorname{tr}[\mathbb{E} Z Z^\top]. \end{aligned}$$

Матрица $\mathbb{E} Z Z^\top$ симметрична и неотрицательно определена, так что в некотором базисе она представляется в виде диагональной матрицы с числами $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ на диагонали. Операции tr и $\det$ инвариантны относительно замен координат. Поэтому

$$\ln \det[\mathbb{E} Z Z^\top] - \operatorname{tr}[\mathbb{E} Z Z^\top] = \sum_{i=1}^n (\ln \lambda_i - \lambda_i).$$

Максимум последней суммы достигается при $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1$, т. е. когда $\mathbb{E} Z Z^\top$ есть единичная матрица, или, что эквивалентно,

$$\mathbb{E}(X - a)(X - a)^\top = \Sigma.$$

Заметим, что при любом фиксированном a матрица $E(X - a)(X - a)^\top$ является невырожденной.

В самом деле, иначе найдется такой вектор $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$, что

$$b^\top E(X - a)(X - a)^\top b = E|(b, X - a)|^2,$$

а поэтому $(b, X - a) = 0$ п. н. и, значит,

$$(b, X - EX) = (b, X - a) - (b, EX - a) = 0 \quad \text{п. н.}$$

Из этого следует, что матрица DX вырождена, поскольку b будет ненулевым вектором, лежащим в ее ядре. Это противоречит условию задачи.

Итак, матрица $E(X - a)(X - a)^\top$ невырождена при любом фиксированном a , и максимум $E \ln f(X; a, \Sigma)$ по Σ достигается при $\Sigma(a) = E(X - a)(X - a)^\top$. Осталось заметить, что экстремальная задача

$$E \ln f(X; a, \Sigma(a)) \rightarrow \sup_a$$

относительно $a \in A$ равносильна следующей:

$$- \ln \det[E(X - a)(X - a)^\top] \rightarrow \sup_a,$$

или, что эквивалентно,

$$\det[E(X - a)(X - a)^\top] \rightarrow \inf_a. \quad \square$$

46. Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Показать, что

$$E|\xi|^\alpha = \frac{2^{\alpha/2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right), \quad \alpha > -1,$$

где $\Gamma(s) = \int_{\mathbb{R}_+} x^{s-1} e^{-x} dx$ — гамма-функция Эйлера. В частности,

$$E\xi^{2n} = (2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1).$$

Решение. Распишем $E|\xi|^\alpha$, используя плотность величины $|\xi|$:

$$\begin{aligned} E|\xi|^\alpha &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\mathbb{R}_+} x^\alpha e^{-x^2/2} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\mathbb{R}_+} (2z)^{(\alpha-1)/2} e^{-z} dz = \\ &= \frac{2^{\alpha/2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right), \end{aligned}$$

где $\Gamma(s) = \int_{\mathbb{R}_+} z^{s-1} e^{-z} dz$. Применяя соотношения $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, $\alpha > 0$, и $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, находим

$$\mathbb{E}\xi^{2n} = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \frac{2n-1}{2} \frac{2n-3}{2} \dots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = (2n-1)!! \quad \square$$

47. Пусть X и Y — независимые случайные величины с распределением $\mathcal{N}(0, 1)$. Определим

$$T = \frac{X^2 + Y^2}{2}, \quad g = \frac{X^2}{X^2 + Y^2}.$$

Используя задачу II.8.11, найти совместное распределение (T, g) .

Решение. Вследствие задачи II.8.11 величины T и g независимы, так что достаточно вычислить функции их распределения. Величина T имеет экспоненциальное распределение $P(T > t) = e^{-t}$, $t > 0$. Величина g имеет arcsin-распределение с плотностью $\frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$, $x \in (0, 1)$. $\square$

48. Пусть $B = (B_t)_{t \geq 0}$ — процесс броуновского движения и

$$T_a = \inf\{t \geq 0: B_t = a\}$$

— момент первого достижения уровня $a > 0$. (Полагаем $T_a = \infty$, если $\{\cdot\} = \emptyset$.)

Воспользовавшись *принципом отражения* для броуновского движения

$$P(\sup_{s \leq t} B_s > a) = 2P(B_t \geq a)$$

(см., например, [3, гл. III, § 10, с. 89–90]), доказать, что плотность

$$p_a(t) = \frac{\partial P(T_a \leq t)}{\partial t}, \quad t > 0,$$

задается формулой

$$p_a(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{2t}}.$$

Решение. Следует воспользоваться тем, что

$$P(T_a \leq t) = 2P(B_t \geq a) = 2 - 2\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right). \quad \square$$

49. Пусть $T = T_1$, где T_a определено в задаче II.13.48. Показать, что

$$T \stackrel{d}{=} N^{-2},$$

где $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ — стандартная гауссовская случайная величина. Показать также, что преобразование Лапласа имеет вид

$$\mathbb{E} e^{-\frac{\lambda^2 T}{2}} = \mathbb{E} e^{-\frac{\lambda^2}{2N^2}} = e^{-\lambda}, \quad \lambda \geq 0,$$

а преобразование Фурье имеет вид

$$\mathbb{E} e^{itT} = \mathbb{E} e^{\frac{it}{N^2}} = \exp\left\{-|t|^{1/2}\left(1 - i \frac{t}{|t|}\right)\right\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тем самым случайная величина N^{-2} может рассматриваться как *конструктивно* заданная случайная величина, имеющая устойчивое распределение (с параметрами $\alpha = 1/2$, $\beta = 0$, $\theta = -1$, $d = 1$).

Замечание. Из результатов II.13.48 и II.13.49 вытекает *формула Леви*

$$\int_0^\infty \frac{ae^{-\frac{a^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\lambda t} dt = e^{-a\sqrt{2\lambda}}.$$

Решение. Рассуждая так же, как при решении II.13.48, находим, что

$$\mathbb{P}(T_1 \leq t) = 2\mathbb{P}(B_t \geq 1) = 2\mathbb{P}(\sqrt{t}N \geq 1) = \mathbb{P}(tN^2 \geq 1) = \mathbb{P}(N^{-2} \leq t).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{-\frac{\lambda^2 T}{2}} &= \mathbb{E} e^{-\frac{\lambda^2}{2N^2}} = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{2x^2} - \frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = \\ &= e^{-\lambda} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\lambda}{x}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}} dx = e^{-\lambda} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = e^{-\lambda}, \end{aligned}$$

где последнее равенство следует из того, что преобразование Буля сохраняет меру Лебега на $\mathbb{R}$ (см. задачу II.6.103).

Рассмотрим функцию комплексного переменного $f(z) = \mathbb{E} e^{-\frac{z^2 T}{2}}$, определенную в области $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z^2 \geq 0\}$, где, в частности, $|e^{-z^2 T/2}| \leq 1$. Теперь достаточно показать, что функция f голоморфна внутри этой области и непрерывна на границе. Действительно, в этом случае в силу теоремы единственности $f(z)$ с необходимостью равно e^{-z} в области D , поскольку $f(z) = e^{-z}$ при $z \in \mathbb{R}$. Непрерывность функции f в D следует из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости. Докажем,

что f дифференцируема по z внутри D . Поскольку

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{-z^2 \frac{T}{2}} - e^{-z_0^2 \frac{T}{2}}}{z - z_0} \right| &\leq e^{-\operatorname{Re} z_0^2 \frac{T}{2}} \frac{|e^{-(z^2 - z_0^2) \frac{T}{2}} - 1|}{|z - z_0|} \leq \\ &\leq e^{-\operatorname{Re} z_0^2 \frac{T}{2}} \frac{e^{|z^2 - z_0^2| \frac{T}{2}} - 1}{|z - z_0|} \leq \\ &\leq \sup_{x \geq 0} \left[\frac{e^x - 1}{x} \exp \left\{ -\frac{x \operatorname{Re} z_0^2}{2|z^2 - z_0^2|} \right\} \right] |z + z_0| e^{-\operatorname{Re} z_0^2 \frac{T}{4}} \cdot \frac{T}{2} \leq \\ &\leq \sup_{x \geq 0} \left[\frac{e^x - 1}{x} e^{-x} \right] 3|z_0| e^{-\operatorname{Re} z_0^2 \frac{T}{4}} \cdot \frac{T}{2} \leq 3|z_0| e^{-\operatorname{Re} z_0^2 \frac{T}{4}} \cdot \frac{T}{2} \end{aligned}$$

при всех z_0 , лежащих внутри D , $z \in D$ и $|z - z_0| \leq |z_0|$, $|z^2 - z_0^2| \leq \frac{\operatorname{Re} z_0^2}{2}$, вновь применяя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, получаем

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = -E z_0 T e^{-\frac{z_0^2 T}{2}} = f'(z_0),$$

т. е. функция f голоморфна внутри D . Таким образом,

$$E e^{itT} = E e^{-\frac{z^2 T}{2}} = e^{-z}, \quad z = \sqrt{|t|} \left(1 - i \frac{t}{|t|} \right). \quad \square$$

50. (См. [75].) Пусть $X = (X_1, \dots, X_{2n})$, $n \geq 1$, — гауссовский вектор с нулевым средним и матрицей дисперсии $C = (c_{ij})_{i,j=1}^{2n}$. Доказать, что

$$EX_1 X_2 \dots X_{2n} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} c_{\sigma_1 \sigma_2} \dots c_{\sigma_{2n-1} \sigma_{2n}},$$

где суммирование ведется по всем таким перестановкам $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{2n})$ чисел $1, \dots, 2n$, что $\sigma_{2k-1} < \sigma_{2k}$, $1 \leq k \leq 2n$.

Решение. Характеристическая функция величины X имеет вид

$$\varphi(t) = E e^{i(t, X)} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{2n} c_{jk} t_j t_k \right\}, \quad t = (t_1, \dots, t_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

При этом

$$EX_1 X_2 \dots X_{2n} = (-1)^n \frac{\partial^{2n} \varphi(0, \dots, 0)}{\partial t_1 \dots \partial t_{2n}} = (-1)^n a_{1\dots 2n},$$

где $a_{1\dots 2n}$ — коэффициент при $t_1 \dots t_{2n}$ в ряде Тейлора для φ :

$$\varphi(t_1, \dots, t_{2n}) = 1 + \sum_{j=1}^{2n} a_j t_j + \sum_{1 \leq j \leq k \leq 2n} a_{jk} t_j t_k + \dots + a_{1\dots 2n} t_1 \dots t_{2n} + \dots$$

Имеем

$$\exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{2n} c_{jk} t_j t_k\right\} = 1 + \sum_{d \geq 1} \frac{(-1)^d}{d!} \left(\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{2n} c_{jk} t_j t_k\right)^d.$$

Осталось проверить, что коэффициент при $t_1 \dots t_{2n}$, получающийся при раскрытии скобок в формуле

$$\left(\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{2n} c_{jk} t_j t_k\right)^n = \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2n} c_{jj} t_j^2 + \sum_{1 \leq j < k \leq 2n} c_{jk} t_j t_k\right)^n,$$

в точности равен $\sum_{\sigma} c_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{2n-1} \sigma_{2n}}$. $\square$

51. Пусть X и Y — независимые $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ -распределенные случайные величины.

(а) Показать, что

$$\left(\frac{X^2 - Y^2}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \frac{2XY}{\sqrt{X^2 + Y^2}}\right) \stackrel{d}{=} (X, Y). \quad (*)$$

Убедиться также, что если $E|X| < \infty$, X имеет плотность, а Y — независимая копия величины X , то равенство (*) может быть выполнено только для величин с гауссовским распределением с нулевым средним. (См. задачу II.8.81.)

(б) Обобщить формулу (*), установив, что для всякого $n \geq 2$ выполняется равенство

$$(X^2 + Y^2)^{-\frac{n-1}{2}} (\operatorname{Re}(X + iY)^n, \operatorname{Im}(X + iY)^n) \stackrel{d}{=} (X, Y).$$

(с) Вывести из п. (а), что

$$\frac{X}{Y} - \frac{Y}{X} \stackrel{d}{=} 2C,$$

где C — случайная величина, распределенная по закону Коши, и что

$$C - \frac{1}{C} \stackrel{d}{=} 2C.$$

Как и в п. (а), убедиться, что последнее равенство среди величин C , имеющих плотность, выполнено только для тех, которые имеют распределение Коши.

(д) Обобщить это свойство, показав, что для всякого $a > 0$ выполняется равенство

$$C - \frac{a}{C} \stackrel{d}{=} (1+a)C.$$

(е) Показать, что величины $X^2 + Y^2$ и $\frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$ независимы.

Решение. (а) Если X и Y — гауссовские величины с нулевым средним, то искомое соотношение вытекает из задачи II.8.11. Обратно, в полярных координатах $X = R \cos \Theta$, $Y = R \sin \Theta$, где $R \geq 0$, $\Theta \in [0, 2\pi)$ п. н., свойство (*) переписывается в виде

$$(R \cos 2\Theta, R \sin 2\Theta) \stackrel{d}{=} (R \cos \Theta, R \sin \Theta),$$

$$\text{или } (2\pi\{\Theta/\pi\}, R) \stackrel{d}{=} (\Theta, R),$$

где $\{x\}$ — дробная часть числа $x > 0$. Предполагая, что X имеет плотность, легко установить, что Θ и R имеют совместную плотность, а значит, Θ условно на R также имеет плотность.

Далее, рассуждая, как при решении задачи II.8.81, находим, что Θ условно на R имеет равномерное распределение на $[0, 2\pi)$. Следовательно, Θ и R независимы, величина $X = R \cos \Theta$ симметрично распределена, а значит, плотность величины X имеет вид $f(x^2)$.

Совместную плотность величин R^2 , Θ можно подсчитать двумя способами, используя либо независимость величин R^2 и Θ , либо независимость величин X и Y :

$$f(r^2 - r^2 \sin^2 \theta) f(r^2 \sin^2 \theta) = \frac{f_{R^2}(r^2)}{2\pi}$$

или

$$f(x)f(y) = g(x+y), \quad x, y \geq 0,$$

где f_{R^2} — плотность величины R^2 , а g выражается через f_{R^2} . Поскольку $\int_{\mathbb{R}_+} f(x) dx$ сходится (потому что $E|X| < \infty$), как и в решении задачи

II.8.23(а)1), получаем, что f — экспонента с точностью до константы.

(b) В обозначениях п. (а) искомое равенство переписывается в виде

$$(R \cos n\Theta, R \sin n\Theta) \stackrel{d}{=} (R \cos \Theta, R \sin \Theta),$$

а это равенство следует из того, что $(2\pi\{n\Theta/2\pi\}, R) \stackrel{d}{=} (\Theta, R)$.

(с) Для величины C , распределенной по закону Коши, рассматриваемые равенства следуют из п. (а) и задачи II.8.24. Пусть теперь C имеет плотность и $C - C^{-1} \stackrel{d}{=} 2C$. Делая замену $C = \operatorname{tg} \Theta$, $\Theta \in (0, \pi)$ п. н., находим, что $\operatorname{ctg} 2\Theta \stackrel{d}{=} \operatorname{ctg} \Theta$ и Θ имеет плотность. Рассуждая так же, как при решении задачи II.8.81, находим, что Θ имеет равномерное распределение на $(0, \pi)$. Отсюда вытекает искомое утверждение (см. задачи II.8.11 и II.8.24).

(d) Достаточно проверить, что для любой ограниченной борелевской функции $g(x)$ выполняется равенство

$$\int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x-ax^{-1}}{1+a}\right) \frac{dx}{1+x^2} = \int_{\mathbb{R}} g(x) \frac{dx}{1+x^2}.$$

(e) Утверждение вытекает из задачи II.8.11. $\square$

52. (a) Отправляясь от того факта, что комплекснозначные функции вида $g(t)\overline{g(s)}$ неотрицательно определены, показать, что функция

$$R_H(s, t) = \frac{1}{2} [|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}], \quad s, t \in \mathbb{R},$$

также является неотрицательно определенной при $H \in (0, 1]$ и существует гауссовский процесс $B_H = \{B_H(t)\}_{t \geq 0}$ с нулевым средним, имеющий $R_H(s, t)$ своей ковариационной функцией.

Убедиться также в том, что приведенная функция $R_H(s, t)$ при $H > 1$ не является неотрицательно определенной.

(b) Вывести из п. (a), что функция

$$R^K(s, t) = \frac{1}{2^K} [|t+s|^K - |t-s|^K], \quad s, t \in \mathbb{R},$$

является неотрицательно определенной при $K \in (0, 2]$.

(c) (См. [54].) Обобщить результат п. (a), доказав, что функция вида

$$R_H^K(s, t) = \frac{1}{2^K} \left((|t|^{2H} + |s|^{2H})^K - |t-s|^{2HK} \right), \quad s, t \in \mathbb{R},$$

является неотрицательно определенной при $0 < H, K \leq 1$.

(См. задачи II.13.76, II.12.20(b).)

Решение. (a) Пусть $H \in (0, 1)$. Легко проверить, что всякая комплекснозначная функция $g(s)\overline{g(t)}$, $s, t \in \mathbb{R}$, является неотрицательно определенной. Следовательно, для любой неотрицательной функции f функция $\int_{\mathbb{R}} g(s, x)\overline{g(t, x)}f(x)dx$ также неотрицательно определена

(предполагается, что все интегралы сходятся).

Осталось подобрать подходящие f и g , для которых

$$R_H(s, t) = \int_{\mathbb{R}} g(s, x)\overline{g(t, x)}f(x)dx.$$

Поскольку $R_H(s, s) = |s|^{2H}$, получаем, что

$$R_H(s, t) + R_H(t, s) = R_H(t, t) + R_H(s, s) - R_H(t-s, t-s).$$

Это соотношение будет заведомо выполнено при

$$g(s, x)\overline{g(t, x)} + g(t, x)\overline{g(s, x)} = |g(t, x)|^2 + |g(s, x)|^2 - |g(t-s, x)|^2.$$

Последнее имеет место только в том случае, если $|g(t - s, x)| = |g(t, x) - g(s, x)|$.

Полагая $g(s, x) = g(sx)$, видим, что

$$|s|^{2H} = \int_{\mathbb{R}} |g(sx)|^2 f(x) dx = \frac{1}{s} \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 f(x/s) dx, \quad s \neq 0.$$

Если теперь взять $f(x) = c/|x|^{1+2H}$ и гарантировать сходимость интеграла

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 f(x) dx,$$

то для подходящей положительной константы c последние равенства с $|s|^{2H}$ будут, очевидно, выполнены.

Итак, задача свелась к подбору такой функции g , для которой

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{g(sx)\overline{g(tx)}}{|x|^{1+2H}} dx \in \mathbb{R}, \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{|g(x)|^2}{|x|^{1+2H}} dx < \infty,$$

$$|g(x - y)| = |g(x) - g(y)|, \quad g(0) = 0.$$

Достаточно взять $g(x) = 1 - e^{ix}$. Проверку того, что существует гауссовский процесс B_H с ковариационной функцией $R_H(s, t)$, оставляем читателю.

Если $H = 1$, то $R_1(s, t) = st = \mathbf{E}B_1(s)B_1(t)$ при $B_1(t) = t\xi$, где величина ξ распределена по закону $\mathcal{N}(0, 1)$. Далее, несложно убедиться, что при $H > 1$ функция $R_H(s, t)$ не является ковариационной.

(б) Указанная функция — это (с точностью до константы) ковариационная функция процесса $\{B_{K/2}(t) - B_{K/2}(-t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ для B_H из п. (а).

(с) Случай $K = 1$ рассмотрен в п. (а). Пусть $K \in (0, 1)$. Для некоторого $c_K > 0$ имеем

$$c_K \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1 - e^{-xy}}{x^{1+K}} dx = y^K, \quad y \geq 0,$$

откуда следует, что

$$R_H^K(s, t) = c_K \int_{\mathbb{R}_+} g(s, x)g(t, x)(e^{xR_H(s,t)} - 1) \frac{dx}{x^{1+K}},$$

где $g(s, x) = e^{-x|s|^{2H}}$. Функции $g(s, x)g(t, x)$ и $e^{xR_H(s,t)} - 1$ неотрицательно определены при каждом $x > 0$ (см. задачу II.13.76), а значит, таковой же является и $R_H^K(s, t)$. $\square$

Замечание. Из известного критерия Колмогорова о существовании непрерывных модификаций (см. [3]) можно заключить, что процесс

B_H , фигурирующий в п. (а) предыдущей задачи, может быть выбран имеющим непрерывные траектории. Именно этот процесс принято называть *фрактальным [дробным] броуновским движением* с параметром Харста H .

Гауссовский процесс с п. н. непрерывными траекториями, имеющих нулевое среднее и ковариационную функцию из п. (с), называют *бифрактальным броуновским движением*.

53. Используя то, что функция

$$R_1(s, t) = \frac{|t| + |s|}{2} - \frac{|s - t|}{2} = s \wedge t, \quad s, t \in \mathbb{R},$$

неотрицательно определена, доказать неотрицательную неопределенность функции

$$R_n(s, t) = \frac{|t| + |s|}{2} - \frac{|s - t|}{2}, \quad s, t \in \mathbb{R}^n.$$

Установить аналогичный результат для

$$R_n(s, t; \alpha) = \frac{|t|^\alpha + |s|^\alpha}{2} - \frac{|s - t|^\alpha}{2}, \quad s, t \in \mathbb{R}^n,$$

где $1 < \alpha < 2$ и $|(t_1, \dots, t_n)|_\alpha = (|t_1|^\alpha + \dots + |t_n|^\alpha)^{1/\alpha}$.

Замечание. Пусть (T, ρ) — метрическое пространство с некоторой фиксированной точкой θ . *Броуновская функция Леви* — это гауссовский процесс $(L_t)_{t \in T}$ с нулевым средним и ковариационной функцией

$$R(s, t) = \frac{\rho(t, \theta) + \rho(s, \theta)}{2} - \frac{\rho(s, t)}{2}, \quad s, t \in T.$$

Решение. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — н. о. р. гауссовские величины с нулевым средним и с $E|X_1| = 1$. Тогда $E|t^\top X| = |t|$ при $X = (X_1, \dots, X_n)$ и, значит,

$$R_n(s, t) = ER_1(s^\top X, t^\top X).$$

Отсюда следует неотрицательная неопределенность R_n . В самом деле,

$$\sum_{i,j=1}^m R_n(t_i, t_j) \lambda_i \bar{\lambda}_j = E \sum_{i,j=1}^m R_1(t_i^\top X, t_j^\top X) \lambda_i \bar{\lambda}_j \geq 0$$

для всех $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$, $m \geq 1$.

Аналогично устанавливается неотрицательная неопределенность $R_n(s, t; \alpha)$. При этом вместо гауссовских величин $X_1, \dots, X_n$ следует рассмотреть такие н. о. р. величины, что при всех $t \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$Ee^{itX_1} = e^{-c|t|^\alpha}$$

($c > 0$ подбирается из условия $E|X_1|^\alpha = 1$).

□

54. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — н. о. р. случайные величины, $\mathbb{E}X_1 = 0$, $\mathbb{E}X_1^2 = 1$. Допустим также, что для некоторых констант $a_1, \dots, a_n$, отличных от 0, величины

$$\sum_{k=1}^n X_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^n a_k X_k$$

независимы. Доказать, что $X_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Решение. Для простоты будем считать, что $\sum_k a_k^2 = 1$; здесь и далее индекс суммирования k изменяется от 1 до n . Заметим также, что

$$\sum_k a_k = \mathbb{E} \sum_k X_k \cdot \sum_k a_k X_k = \mathbb{E} \sum_k X_k \cdot \mathbb{E} \sum_k a_k X_k = 0.$$

Обозначим $\varphi = \varphi(t)$ характеристическую функцию величины X_1 . Имеем

$$\mathbb{E} e^{it \sum_k X_k} \left(\sum_k a_k X_k \right)^2 = \mathbb{E} e^{it \sum_k X_k} \cdot \mathbb{E} \left(\sum_k a_k X_k \right)^2 = \mathbb{E} e^{it \sum_k X_k}.$$

В терминах φ данное соотношение переписывается следующим образом:

$$-\varphi''(t)\varphi(t)^{n-1} - [\varphi'(t)]^2\varphi(t)^{n-2} \sum_{k \neq l} a_k a_l = \varphi(t)^n,$$

или, с учетом того, что $\sum_k a_k = 0$ (и $\sum_k a_k^2 = 1$),

$$-\varphi''(t)\varphi(t)^{n-1} + [\varphi'(t)]^2\varphi(t)^{n-2} = \varphi(t)^n.$$

Поскольку $\varphi(t) \neq 0$ в малой окрестности точки 0, в этой окрестности

$$\frac{\varphi''(t)}{\varphi(t)} - \frac{[\varphi'(t)]^2}{[\varphi(t)]^2} = [\ln \varphi(t)]'' = -1,$$

где $\ln \varphi(t)$ — та ветвь логарифма, для которой $\ln \varphi(0) = 0$. Итак, $\varphi(t) = e^{bt - t^2/2}$ в окрестности нуля для некоторого $b \in \mathbb{C}$. При этом

$$b = \varphi'(0) = i\mathbb{E}X_1 = 0.$$

Значит, в малой окрестности нуля $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$. Для завершения доказательства осталось применить задачу II.12.4. $\square$

55. Применение распределения Стьюдента в статистике основано прежде всего на том обстоятельстве, что статистики

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2$$

независимы, когда $X_1, \dots, X_n$ — н. о. р. гауссовские случайные величины.

В действительности, как было впервые подмечено Гири, из независимости указанных статистик при условии, что $X_1, \dots, X_n$ ($n > 1$) — н. о. р., с необходимостью вытекает, что все X_k — гауссовские величины. Доказать этот результат, следуя Лукачу [80], в предположении, что $EX_1 = 0$, $EX_1^2 = 1$.

Замечание. Предположение о существовании вторых моментов можно снять ввиду теоремы Зингера (см. задачу II.6.42).

Решение. По аналогии с решением задачи II.13.54 рассмотрим равенство

$$E e^{it \sum_{k=1}^n X_k} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2 = E e^{it \sum_{k=1}^n X_k} \cdot E \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2 = (n-1) E e^{it \sum_{k=1}^n X_k},$$

справедливое для каждого $t \in \mathbb{R}$. Обозначая через $\varphi = \varphi(t)$ характеристическую функцию величины X_1 , последнее равенство следует переписать в виде

$$-\varphi''(t)\varphi(t)^{n-1} + [\varphi'(t)]^2\varphi(t)^{n-2} = \varphi(t)^n.$$

Далее надо рассуждать, как при решении задачи II.13.54. □

56. (См. [96].) Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые случайные величины. Допустим также, что для некоторых различных констант $a_1, \dots, a_n$, величины

$$\sum_{k=1}^n X_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^n a_k X_k$$

независимы. Доказать *теорему Дарму—Скитовича*, утверждающую, что все X_k — гауссовские величины.

С этой целью провести следующие рассмотрения.

(а) Считая, что каждая величина X_k имеет моменты всех порядков, показать, что логарифмы характеристических функций X_k равны некоторым многочленам и тем самым по теореме Марцинкевича есть в точности квадратные трехчлены.

(б) Привлекая, быть может, более тонкие рассуждения, установить утверждение п. (а), отказавшись от условия конечности моментов X_k .

Замечание. Утверждение *теоремы Дарму—Скитовича* сохраняет свою силу и в том случае, когда некоторые a_k могут совпадать, что вытекает из теоремы Крамера.

Решение. (а) Обозначим через $\varphi_k = \varphi_k(t)$ характеристическую функцию величины X_k ; здесь и далее k изменяется от 1 до n . Тогда

по условию для всех $s, t \in \mathbb{R}$ имеем

$$\prod_k \varphi_k(s + a_k t) = \mathbb{E} e^{is \sum_k X_k + it \sum_k a_k X_k} = \prod_k \varphi_k(s) \prod_k \varphi_k(a_k t).$$

Когда t лежит в некоторой малой окрестности нуля, можно однозначно определить непрерывные функции $\phi_k(t) = \ln \varphi_k(t)$ условием $\ln \varphi_k(0) = 0$. Для таких $\phi_k(t)$ имеем

$$\sum_k \phi_k(s + a_k t) = \sum_k \phi_k(s) + \sum_k \phi_k(a_k t) = A(s) + B(t), \quad (*)$$

когда s, t лежат в некоторой малой окрестности нуля U .

Если у каждого X_k существуют все моменты, то у ϕ_k в U имеются производные всех порядков и, значит, то же верно для A и B . Дифференцируя равенство $(*)$ m раз ($1 \leq m \leq n$) по t и полагая $t = 0$, находим, что функция

$$\sum_k a_k^m \phi_k^{(m)}(s)$$

должна быть постоянной в U . Следовательно, сумма $\sum_k a_k^m \phi_k(s)$ при каждом $m = 1, \dots, n$ есть многочлен $P_m = P_m(s)$.

Разрешая получившуюся линейную систему относительно ϕ_k при данных P_m (это всегда можно сделать, когда все a_k различны), заключаем, что все ϕ_k — многочлены. Значит, $\varphi_k(t) = e^{Q_k(t)}$ для некоторого многочлена Q_k и всех $t \in U$. Осталось применить теорему Марцинкевича, учитывая задачу II.12.4.

(b) Пусть априори неизвестно, что X_k имеют какие-либо моменты. Доказательство мы проведем, следуя методу Ю. В. Линника, основанному на подходящем интегрировании, замене переменных и последующем дифференцировании равенства $(*)$. Для того чтобы обеспечить законность указанных операций, необходимо далее брать все переменные x, s, t в достаточно малой окрестности нуля.

Проинтегрируем равенство $(*)$, умножая обе его части на $x - s$, по отрезку $[0, x]$:

$$\sum_k \int_0^x \phi_k(s + a_k t)(x - s) ds = \int_0^x A(s)(x - s) ds + \frac{B(t)x^2}{2},$$

или, что эквивалентно,

$$\sum_k \int_{a_k t}^{x+a_k t} \phi_k(s)(x - s + a_k t) ds = A_0(x) + \frac{B(t)x^2}{2},$$

где $A_0(x) = \int_0^x A(s)(x-s) ds$. Разлагая

$$\int_{a_k t}^{x+a_k t} = \int_0^{x+a_k t} - \int_0^{a_k t},$$

получим соотношение

$$\sum_k \int_0^{x+a_k t} \phi_k(s)(x-s+a_k t) ds = B_0(t) + B_1(t)x + \frac{B(t)x^2}{2},$$

для некоторых функций $B_0 = B_0(t)$, $B_1 = B_1(t)$. Левая часть дважды дифференцируема по t при фиксированном x , а значит, это верно и для правой части. Дважды дифференцируя по t , находим, что

$$\sum_k a_k^2 \phi_k(x+a_k t) = B_0''(t) + B_1''(t)x + \frac{B''(t)x^2}{2}.$$

Вновь применяя те же преобразования к полученному равенству, получаем, что

$$\sum_k a_k^4 \phi_k(x+a_k t) = P_4(x, t),$$

где $P_4(x, t)$ — многочлен 4-й степени по x с коэффициентами, зависящими от t .

Повторяя описанную процедуру еще $n-2$ раза и полагая $t=0$, придем к линейной системе уравнений на φ_k , полученной в п. (а) и выполненной в некоторой малой окрестности нуля. Дальнейшее рассуждение в точности повторяет решение п. (а). $\square$

57. (Каган.) Следующее утверждение вытекает из теоремы Дармуа—Скитовича.

Если вектор $X = (X_1, \dots, X_n)$ состоит из независимых случайных величин и таков, что для некоторых ненулевых $a, b \in \mathbb{R}^n$ величины (a, X) и (b, X) независимы, то X — гауссовский вектор.

В связи с этим предлагается доказать следующий результат Вершика. Пусть случайный вектор $X = (X_1, \dots, X_n)$ имеет невырожденную ковариационную матрицу, а величины (a, X) и (b, X) , $a, b \in \mathbb{R}^n$, независимы, если они некоррелированы. Тогда X — гауссовский вектор.

Решение. Без ограничения общности можно считать, что X имеет нулевое среднее и единичную матрицу дисперсии, иначе вычтем среднее

и умножим X на $(DX)^{1/2}$. Пусть $\varphi = \varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$, — характеристическая функция вектора X . Тогда по условию при всех таких $s, t \in \mathbb{R}^n$, что $(s, t) = 0$, имеем

$$\varphi(s+t) = \mathbb{E}e^{i(s+t, X)} = \mathbb{E}e^{i(s, X)} \cdot \mathbb{E}e^{i(t, X)} = \varphi(s)\varphi(t).$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\varphi(t_1, \dots, t_n) = \varphi(t_1, 0, \dots, 0) \cdot \varphi(0, t_2, 0, \dots, 0) \dots \varphi(0, \dots, 0, t_n).$$

Другими словами, $X_1, \dots, X_n$ независимы. Пусть теперь $\varphi_1 = \varphi_1(t_1), \dots, \varphi_n = \varphi_n(t_n)$ — характеристические функции величин $X_1, \dots, X_n$ соответственно. Для некоторого $\delta > 0$ все φ_k не обращаются в нуль в интервале $(-\delta, \delta)$. Кроме того, если $(s, t) = \sum_{k=1}^n s_k t_k = 0$ и $\max_{1 \leq k \leq n} |t_k| < \delta$, то

$$\prod_{k=1}^n \varphi(t_k) \sum_{k=1}^n s_k \frac{\varphi'_k(t_k)}{\varphi_k(t_k)} = \mathbb{E}e^{i \sum_{k=1}^n t_k X_k} \sum_{k=1}^n i s_k X_k = \mathbb{E}e^{i(t, X)} \cdot \mathbb{E} \sum_{k=1}^n i s_k X_k = 0,$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^n s_k \frac{\varphi'_k(t_k)}{\varphi_k(t_k)} = 0.$$

Отсюда вытекает, что векторы

$$\left(\frac{\varphi'_1(t_1)}{\varphi_1(t_1)}, \dots, \frac{\varphi'_n(t_n)}{\varphi_n(t_n)} \right) \quad \text{и} \quad (t_1, \dots, t_n)$$

коллинеарны для всех $t_1, \dots, t_n$, $\max_{1 \leq k \leq n} |t_k| < \delta$. Это возможно лишь тогда, когда для некоторого $a \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$[\ln \varphi_k(t_k)]' = \frac{\varphi'_k(t_k)}{\varphi_k(t_k)} = a t_k, \quad 1 \leq k \leq n,$$

где $\ln \varphi_k(t)$ — та ветвь логарифма, для которой $\ln \varphi_k(0) = 0$. Следовательно, $\varphi_k(t_k) = e^{a t_k^2/2}$. Осталось воспользоваться задачей II.12.4, заметив, что $a = \varphi''_k(0) = -\mathbb{E}X_k^2 = -1$. $\square$

58. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность независимых случайных величин с распределением $\mathcal{N}(0, 1)$. Показать, что величины

$$X_n = \sqrt{n} \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{\sum_{i=1}^n \xi_i^2} \quad \text{и} \quad Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{\left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right)^{1/2}}$$

по распределению сходятся (при $n \rightarrow \infty$) к случайной величине, также распределенной по закону $\mathcal{N}(0, 1)$.

Решение. По закону больших чисел $n^{-1} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \xrightarrow{P} E\xi_1^2 = 1$. Осталось воспользоваться задачей II.10.10(b), учитывая, что $n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \xi_i \stackrel{d}{=} \xi_1$. $\square$

59. Пусть (X, Y) — двумерный гауссовский вектор с $EX = EY = 0$, $DX = DY = 1$ и коэффициентом корреляции $\rho = EXY$. Показать, что коэффициент корреляции $\rho_{\Phi(X)\Phi(Y)}$ величин $\Phi(X)$ и $\Phi(Y)$ задается формулой

$$\rho_{\Phi(X)\Phi(Y)} = \frac{6}{\pi} \arcsin \frac{\rho}{2},$$

где $\Phi = \Phi(x)$ — функция распределения закона $\mathcal{N}(0, 1)$.

Решение. Величины $\Phi(X)$ и $\Phi(Y)$ имеют равномерное распределение на $[0, 1]$, так как $P(\Phi(X) \leq x) = \Phi(\Phi^{-1}(x)) = x$, $x \in (0, 1)$. Поэтому $E\Phi(X) = 1/2$, $D\Phi(X) = 1/12$ и

$$\rho_{\Phi(X)\Phi(Y)} = \frac{E\Phi(X)\Phi(Y) - 1/4}{1/12}.$$

Пусть величина V не зависит от Y и имеет распределение $\mathcal{N}(0, 1)$. Положим

$$\begin{pmatrix} V_\theta \\ Y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ Y \end{pmatrix}.$$

Тогда $(X, Y) \stackrel{d}{=} (V_\theta, Y)$ при $\rho = \sin \theta$. Обозначая $\varphi(x) = \Phi'(x)$ и $f(\theta) = E\Phi(V_\theta)\Phi(Y)$, получаем

$$f'(\theta) = E\varphi(V_\theta)Y_\theta\Phi(Y) = E\varphi(V)Y\Phi(Y_{-\theta}),$$

поскольку $(V_\theta, Y_\theta, V, Y) \stackrel{d}{=} (V, Y, V_{-\theta}, Y_{-\theta})$. Более того, с учетом соотношения $EYf(Y) = Ef'(Y)$, справедливого для любой гладкой функции f с ограниченной производной f' , из теоремы Фубини получаем

$$f'(\theta) = E\varphi(V)E[Y\Phi(Y_{-\theta}) | V] = E\varphi(V)\varphi(Y_{-\theta}) \cos \theta.$$

Рассуждая аналогично, вычислим последнее математическое ожидание с помощью равенства

$$Ee^{-\frac{(aZ+b)^2}{2}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{b^2}{1+a^2}}}{\sqrt{1+a^2}},$$

верного для $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\varphi(V)\varphi(Y_{-\theta}) \cos \theta &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{E}\varphi(V) \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{V^2 \sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta}}}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta}} \cos \theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathbb{E} \frac{e^{-\frac{V^2}{1 + \cos^2 \theta}}}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta}} \cos \theta = \frac{1}{2\pi} \frac{\cos \theta}{\sqrt{3 + \cos^2 \theta}} \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\frac{f(\theta) - 1/4}{1/12} = \frac{12}{2\pi} \int \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{3 + \cos^2 \theta}} + 12[f(0) - 1/4] = \frac{6}{\pi} \arcsin \frac{\sin \theta}{2}. \quad \square$$

60. Пусть (X, Y, Z) — гауссовский вектор с $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = \mathbb{E}Z = 0$, $\mathbb{D}X = \mathbb{D}Y = \mathbb{D}Z = 1$ и коэффициентами корреляции ρ_{XY} , ρ_{XZ} , ρ_{YZ} . В дополнение к задаче II.13.31(b) показать, что

$$\mathbb{P}(X > 0, Y > 0, Z > 0) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4\pi} (\arcsin \rho_{XY} + \arcsin \rho_{XZ} + \arcsin \rho_{YZ}).$$

Решение. Пусть $A = \{X \leq 0\}$, $B = \{Y \leq 0\}$, $C = \{Z \leq 0\}$. Тогда если $p = \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$, то по формуле включения-исключения из задачи II.8.60 имеем

$$\begin{aligned} 1 - p &= \mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \\ &= [\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)] - [\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C)] + p. \end{aligned}$$

Далее следует воспользоваться задачей II.13.31(b). $\square$

61. Доказать, что преобразование Лапласа $\mathbb{E}e^{-\lambda \mathcal{R}^2}$, $\lambda > 0$, квадрата $\mathcal{R}^2$ «размаха» $\mathcal{R}$ броуновского моста $B^\circ = (B_t^\circ)_{0 \leq t \leq 1}$, т. е. случайной величины

$$\mathcal{R} = \max_{0 \leq t \leq 1} B_t^\circ - \min_{0 \leq t \leq 1} B_t^\circ,$$

задается формулой

$$\mathbb{E}e^{-\lambda \mathcal{R}^2} = \left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{\operatorname{sh} \sqrt{2\lambda}} \right)^2.$$

При установлении этого результата полезно обратиться к явному виду функции распределения, полученной Дубом с помощью *принципа отражения*:

$$\mathbb{P}(\mathcal{R}^2 \leq x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 - n^2 \pi^2 x) e^{-n^2 \pi^2 x/2}, \quad x \geq 0.$$

Решение. Утверждение вытекает из задачи П.8.80 и последующего замечания, которое, в частности, гарантирует равенство $\mathcal{R}^2 \stackrel{d}{=} Y_2$. $\square$

62. Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Определим полиномы Эрмита формулой

$$H_n(x) = (-1)^n \frac{D^n \varphi(x)}{\varphi(x)}, \quad n \geq 1,$$

где D^n — производная порядка $n (\geq 0)$, а $\varphi = \varphi(x)$ — плотность величины ξ .

(а) Показать, что

$$H_n(x) = E(x + i\xi)^n,$$

$$EH_n(x + \sigma\xi) = \begin{cases} x^n, & \sigma = 1, \\ (1 - \sigma^2)^{n/2} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{1 - \sigma^2}}\right), & \sigma \in [0, 1). \end{cases}$$

(b) Пусть $\eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$, причем (ξ, η) — гауссовский вектор, $E\xi\eta = \rho > 0$. Установить, что п. н.

$$E(H_n(\eta)|\xi) = \rho^n H_n(\xi).$$

(с) Доказать, что $H_n(x) = x^n + \dots$ — многочлен степени n ($n \geq 0$), причем

$$EH_n(\xi)H_m(\xi) = \begin{cases} n!, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Вывести отсюда, что любая функция $f(x)$, для которой $E|f(\xi)|^2 < \infty$, допускает следующее представление в пространстве L^2 :

$$f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(\xi)}{n!} E f(\xi) H_n(\xi) = E f(\xi) + \xi \cdot E \xi f(\xi) + \dots$$

Решение. (а) Производящие функции последовательностей $E(x + i\xi)^n$ и $H_n(x)$ совпадают, поэтому $H_n(x) = E(x + i\xi)^n$ при всех n . Действительно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} E(x + i\xi)^n \frac{t^n}{n!} = E e^{tx + it\xi} = e^{tx - t^2/2} = \frac{\varphi(x - t)}{\varphi(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

Аналогично $EH_n(x + \xi) = x^n$, поскольку

$$\sum_{n=0}^{\infty} EH_n(x + \xi) \frac{t^n}{n!} = E e^{tx + t\xi - t^2/2} = e^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n t^n}{n!}.$$

Точно так же вычисляется $EH_n(x + \sigma\xi)$ при $\sigma \in [0, 1)$.

(b) Согласно третьему равенству в п. (a) имеем

$$\mathbf{E}(H_n(\eta)|\zeta = x) = \mathbf{E}H_n(\rho x + \sqrt{1 - \rho^2}\zeta) = \rho^n H_n(x),$$

где $\zeta = (1 - \rho^2)^{-1/2}(\eta - \rho\xi)$ не зависит от ξ и имеет распределение $\mathcal{N}(0, 1)$.

(c) Поскольку $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$ и $H_0(x) = 1$, имеет место равенство $H_{n+1}(x) = xH_n(x) - H'_n(x)$. Отсюда по индукции легко вывести, что $H_n(x) = x^n + \dots$ — многочлен степени n . Далее, интегрируя по частям, при $m \leq n$ получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}H_m(\xi)H_n(\xi) &= (-1)^n \int_{\mathbb{R}} H_m(x)\varphi^{(n)}(x) dx = \\ &= (-1)^{n-1} \int_{\mathbb{R}} H'_m(x)\varphi^{(n-1)}(x) dx = \dots \\ &\dots = (-1)^{n-m} \int_{\mathbb{R}} H_m^{(m)}(x)\varphi^{(n-m)}(x) dx = (-1)^{n-m} m! \int_{\mathbb{R}} \varphi^{(n-m)}(x) dx. \end{aligned}$$

Если $m = n$, то в последнем равенстве $\varphi^{(n-m)}(x) = \varphi(x)$, а значит, $\mathbf{E}|H_n(\xi)|^2 = n!$. В случае $m < n$, еще раз интегрируя по частям, находим, что $\mathbf{E}H_m(\xi)H_n(\xi) = 0$.

Итак, мы доказали, что $\{H_n\}_{n \geq 0}$ есть ортогональная система в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ функций со скалярным произведением $(f, g) = \mathbf{E}f(\xi)g(\xi)$. Установим полноту данной системы. Чтобы это проверить, надо лишь показать, что если функция $f \in \mathcal{H}$ ортогональна всем H_n , т. е.

$$\mathbf{E}f(\xi)H_n(\xi) = 0, \quad n \geq 0,$$

то $f(x) = 0$ почти всюду по мере Лебега. Ряды

$$\sum_{n \geq 0} H_{2n}(x) \frac{(-1)^n t^{2n}}{2n!} \quad \text{и} \quad \sum_{n \geq 0} H_{2n+1}(x) \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

сходятся в $\mathcal{H}$ при всех $t \in \mathbb{R}$ к $\operatorname{Re} e^{itx+t^2/2}$ и $\operatorname{Im} e^{itx+t^2/2}$, так как

$$\sum_{n \geq 0} (H_n, H_n) \frac{t^{2n}}{(n!)^2} = \sum_{n \geq 0} \frac{t^{2n}}{n!} < \infty.$$

Следовательно, $\mathbf{E}f(\xi)e^{it\xi-t^2/2} = 0$ или $\mathbf{E}f(\xi)e^{it\xi} = 0$ ($t \in \mathbb{R}$). Разлагая f на $f^+ - f^-$, находим, что

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx} p(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} q(x) dx$$

для плотностей $p = p(x)$ и $q = q(x)$, заданных формулами

$$p(x) = f^+(x)e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad q(x) = f^-(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

и отвечающих некоторым конечным мерам. По теореме единственности (для характеристических функций) p с необходимостью совпадает с q почти всюду (по мере Лебега). По определению если $p(x) > 0$, то $q(x) = 0$ и наоборот. Это возможно, только когда p и q равны нулю почти всюду и, значит, $f(x) = 0$ почти всюду.

Итак, ортогональная система $\{H_n\}_{n \geq 0}$ плотна в $\mathcal{H}$, и любая функция $f \in \mathcal{H}$ может быть представлена своим рядом Фурье по системе $\{H_n\}_{n \geq 0}$. $\square$

63. Рассмотрим два вида полиномов Эрмита

$$H_n(x) = (-1)^n \frac{D^n \varphi(x)}{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad He_n(x) = (-1)^n \frac{D^n \psi(x)}{\psi(x)}, \quad n \geq 1,$$

где D^n — производная порядка n ($n \geq 0$), $\varphi = \varphi(x)$ — плотность стандартного гауссовского распределения, а $\psi(x) = \varphi^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Пусть $p = p(x)$ — некоторая другая плотность распределения на $\mathbb{R}$.

1. Определить условия, при которых $p(x)$ допускает

(а) *разложение Грама—Шарлье*

$$p(x) = \varphi(x) \sum_{n \geq 0} a_n H_n(x);$$

(б) *разложение Гаусса—Эрмита*

$$p(x) = \varphi(x) \sum_{n \geq 0} a_n He_n(x)$$

(предполагается, что ряды сходятся в некотором определенном смысле).

2. (См. [13], [39].) Предполагая, что $\int_{\mathbb{R}} x p(x) dx = 0$ и $\int_{\mathbb{R}} x^2 p(x) dx = \sigma^2 > 0$, дать формальный вывод другого широко применяемого разложения — *разложения Эджворта*:

$$\sigma p(\sigma x) = \varphi(x) + \varphi(x) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sigma^n} \sum_n H_{n+2k}(x) \prod_{j=1}^n \frac{1}{k_j!} \left[\frac{s_{j+2}/s_2}{(j+2)!} \right]^{k_j},$$

где $\sum_n$ — это сумма по всем целым k , $k_1, \dots, k_n \geq 0$ с

$$k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n, \quad k_1 + \dots + k_n = k,$$

а $(s_n)_{n \geq 2}$ — семиинварианты распределения $p = p(x)$.

Замечание. Для вывода последнего разложения полезной оказывается формула вида

$$\frac{d^n \exp f(x)}{dx^n} = n! \exp f(x) \sum_n \prod_{j=1}^n \frac{1}{k_j!} \left[\frac{f^{(j)}(x)}{j!} \right]^{k_j}, \quad n \geq 1,$$

справедливая для всех бесконечно гладких на $\mathbb{R}$ функций $f = f(x)$ (при всех $x \in \mathbb{R}$).

Решение. 1. (а) Согласно задаче II.13.62(с) система $(H_n)_{n \geq 1}$ ортогональна и всюду плотна в гильбертовом пространстве измеримых функций со скалярным произведением $(f, g) = \mathbb{E} f(\xi) g(\xi)$, где $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Тем самым указанное разложение по $(H_n)_{n \geq 1}$ (со сходимостью в данном пространстве) будет иметь место, если

$$\mathbb{E} \left[\frac{p(\xi)}{\varphi(\xi)} \right]^2 = \sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |p(x)|^2 e^{x^2/2} dx < \infty.$$

При этом

$$a_n = \frac{1}{\mathbb{E} |H_n(\xi)|^2} \mathbb{E} \frac{p(\xi) H_n(\xi)}{\varphi(\xi)} = \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}} p(x) H_n(x) dx, \quad n \geq 1.$$

(б) Поскольку по определению

$$\text{He}_n(x) = 2^{n/2} H_n(\sqrt{2}x)$$

(см. также § 3 в приложении), система $(\text{He}_n)_{n \geq 1}$ ортогональна и всюду плотна в гильбертовом пространстве измеримых функций со скалярным произведением $(f, g) = \mathbb{E} f(\xi/\sqrt{2}) g(\xi/\sqrt{2})$, где $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Следовательно, разложение по $(\text{He}_n)_{n \geq 1}$ будет иметь место, если

$$\mathbb{E} \left[\frac{p(\xi/\sqrt{2})}{\varphi(\xi/\sqrt{2})} \right]^2 = 2\sqrt{\pi} \int_{\mathbb{R}} |p(x)|^2 dx < \infty.$$

При этом

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\mathbb{E} |\text{He}_n(\xi/\sqrt{2})|^2} \mathbb{E} \frac{p(\xi/\sqrt{2}) \text{He}_n(\xi/\sqrt{2})}{\varphi(\xi/\sqrt{2})} = \\ &= \frac{1}{2^{n-1/2} n!} \int_{\mathbb{R}} p(x) \text{He}_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

2. Пусть $\phi = \phi(t)$ — характеристическая функция, отвечающая $p = p(x)$. Считая, что $\int_{\mathbb{R}} |\phi(t)| dt < \infty$, по формуле обращения получаем

$$\sigma p(\sigma x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \phi(t/\sigma) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Далее, раскладывая $\ln \phi(t)$ на семиринварианты, получаем соотношение

$$\ln \phi(t/\sigma) = \sum_{n \geq 1} \frac{s_n}{n! \sigma^n} (it)^n = -\frac{t^2}{2} + \sum_{n \geq 1} \frac{s_{n+2}}{s_2} \frac{(it)^{n+2}}{(n+2)!} \frac{1}{\sigma^n}$$

(мы учли, что $s_1 = \int_{\mathbb{R}} x p(x) dx = 0$ и $s_2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 p(x) dx = \sigma^2$). Отсюда следует, что

$$\phi(t/\sigma) = e^{-\frac{t^2}{2}} \exp \left\{ \sum_{n \geq 1} \frac{s_{n+2}}{s_2} \frac{(it)^{n+2}}{(n+2)!} \frac{1}{\sigma^n} \right\} = e^{-\frac{t^2}{2}} \left\{ 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{P_n(it)}{\sigma^n} \right\},$$

где $P_n = P_n(u)$ ($n \geq 1$) — коэффициент при s^n в формальном разложении функции

$$\exp \left\{ \sum_{n \geq 1} \frac{s_{n+2}}{s_2} \frac{u^{n+2}}{(n+2)!} s^n \right\}$$

в ряд по степеням s . В силу указанной в условии формулы при всяком $n \geq 1$ имеем

$$\frac{d^n}{ds^n} \exp \sum_{j \geq 1} a_j s^j \Big|_{s=0} = n! \sum_n \prod_{j=1}^n \frac{a_j^{k_j}}{k_j!},$$

так что

$$\begin{aligned} P_n(it) &= \sum_n \prod_{j=1}^n \frac{1}{k_j!} \left[\frac{s_{j+2}/s_2}{(j+2)!} \right]^{k_j} (it)^{(j+2)k_j} = \\ &= \sum_n (it)^{n+2k} \prod_{j=1}^n \frac{1}{k_j!} \left[\frac{s_{j+2}/s_2}{(j+2)!} \right]^{k_j}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (it)^n e^{itx - \frac{t^2}{2}} dx, \quad n \geq 1,$$

получаем, что

$$\begin{aligned} \sigma p(\sigma x) &= \varphi(x) + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sigma^n} \sum_n \varphi^{(n+2k)}(x) \prod_{j=1}^n \frac{1}{k_j!} \left[\frac{s_{j+2}/s_2}{(j+2)!} \right]^{k_j} = \\ &= \varphi(x) + \varphi(x) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sigma^n} \sum_n H_{n+2k}(x) \prod_{j=1}^n \frac{1}{k_j!} \left[\frac{s_{j+2}/s_2}{(j+2)!} \right]^{k_j}. \quad \square \end{aligned}$$

64. (См. [45].) Пусть (ξ, η) — двумерный гауссовский вектор с $E\xi = E\eta = 0$, $D\xi = D\eta = 1$ и коэффициентом корреляции ρ . Установить равенство

$$P(\xi > a, \eta > b) - P(\xi > a)P(\eta > b) = \int_0^\rho \phi(a, b, r) dr,$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, $\phi(a, b, r)$ — плотность двумерного распределения

$$\mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Используя формулу Хёффдинга

$$\text{cov}(f(\xi), f(\eta)) = \int_{\mathbb{R}^2} [P(\xi > a, \eta > b) - P(\xi > a)P(\eta > b)] f'(a)g'(b) da db$$

и указанное равенство, установить, что

$$\text{cov}(f(\xi), g(\eta)) = \int_0^\rho E f'(\xi_r) g'(\eta_r) dr$$

для таких гладких функций f и g , что $E|f(\xi)g(\eta)| < \infty$, когда (ξ_r, η_r) — гауссовский вектор с плотностью $\phi(a, b, r)$.

Решение. Будем считать, что $\rho \geq 0$, иначе заменим η на $-\eta$ и воспользуемся соотношением

$$\text{cov}(I(\xi > a), I(\eta > b)) = -\text{cov}(I(\xi > a), I(-\eta > -b)).$$

Вычислим $P(\xi > a, \eta > b)$, используя полиномы Эрмита. Имеем

$$I(\xi > a) = \sum_n H_n(\xi) \frac{EH_n(\xi)I(\xi > a)}{n!},$$

$$EH_n(\xi)I(\xi > a) = (-1)^n \int_a^\infty \varphi^{(n)}(x) dx = (-1)^n \Psi^{(n)}(a),$$

где $\Psi(x) = P(\xi > x)$, $\varphi(x) = -\Psi'(x)$, а суммирование здесь и далее ведется по всем $n \geq 0$. Таким образом, в силу задачи II.13.62(b) имеем

$$E[I(\xi > a)|\eta] = \sum_n \frac{\Psi^{(n)}(a)}{n!} (-1)^n \rho^n H_n(\eta),$$

поэтому

$$P(\xi > a, \eta > b) = EI(\xi > a)I(\eta > b) =$$

$$\begin{aligned} &= E \sum_n \frac{\Psi^{(n)}(a)}{n!} (-1)^n \rho^n H_n(\eta) \sum_k \frac{\Psi^{(k)}(b)}{k!} (-1)^k H_k(\eta) = \\ &= \sum_n \frac{\Psi^{(n)}(a)\Psi^{(n)}(b)}{n!} \rho^n. \end{aligned}$$

Следовательно, плотность (ξ, η) равна

$$\phi(a, b, \rho) = \sum_n \frac{\Psi^{(n+1)}(a)\Psi^{(n+1)}(b)}{n!} \rho^n,$$

а значит,

$$P(\xi > a, \eta > b) = \Psi(a)\Psi(b) + \int_0^\rho \phi(a, b, r) dr.$$

Это и есть искомое равенство.

Для доказательства приведенного неравенства следует воспользоваться формулой Хёффдинга

$$\begin{aligned} \text{cov}(f(\xi), g(\eta)) &= \int_{\mathbb{R}^2} [P(\xi > a, \eta > b) - P(\xi > a)P(\eta > b)] f'(a) g'(b) da db = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} dadb \int_0^\rho f'(a) g'(b) \phi(a, b, r) dr = \int_0^\rho E f'(\xi_r) g'(\eta_r) dr. \quad \square \end{aligned}$$

65. Пусть (ξ, η) — двумерный гауссовский вектор с $E\xi = E\eta = 0$, $D\xi = D\eta = 1$ и коэффициентом корреляции ρ . Показать, что для любых борелевских функций f и g , удовлетворяющих условию $E f(\xi)^2$, $E g(\eta)^2 < \infty$, имеет место *неравенство Гебелейна* [65]

$$|\rho(f, g)| \leq |\rho|,$$

где $\rho(f, g)$ — коэффициент корреляции между $f(\xi)$ и $g(\eta)$.

Вывести из П.13.64 другой вариант *неравенства Гебелейна* (ср. с [107]).

Пусть f и g — борелевские функции, причем

$$E f(\xi) = E g(\eta) = 0, \quad E |f(\xi)|^p, \quad E |g(\eta)|^q < \infty$$

для $q = p/(p-1)$ и некоторого $p > 1$, тогда найдется такое $C = C(p) > 0$, что

$$|E f(\xi) g(\eta)| \leq C |\rho| \|f(\xi)\|_p \|g(\eta)\|_q.$$

Решение. Будем считать, что $\rho > 0$ (иначе заменим η на $-\eta$), а также что $E f(\xi) = E g(\eta) = 0$. Обратимся вначале к первой части задачи. В силу задачи П.13.62(с) для некоторых констант a_n и b_n справедливо следующее разложение в пространстве L^2 :

$$f(\xi) = \sum_n \frac{a_n}{n!} H_n(\xi), \quad g(\eta) = \sum_n \frac{b_n}{n!} H_n(\eta);$$

здесь и далее суммирование ведется по всем $n \geq 1$. Кроме того, ввиду задачи II.13.62(b) имеем

$$\mathbf{E}[g(\eta)|\xi] = \sum_n \frac{\rho^n b_n}{n!} H_n(\xi).$$

Следовательно, с учетом ортогональности полиномов Эрмита

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}f(\xi)g(\eta)| &= \left| \mathbf{E} \sum_n \frac{a_n}{n!} H_n(\xi) \sum_n \frac{\rho^n b_n}{n!} H_n(\xi) \right| = \\ &= \left| \sum_n \frac{\rho^n a_n b_n}{n!} \right| \leq \sum_n \frac{|a_n b_n|}{n!} \rho^n. \end{aligned}$$

Так как $\rho \leq 1$, по неравенству Коши—Буняковского получаем

$$\left(\sum_n \frac{|a_n b_n|}{n!} \rho^n \right)^2 \leq \rho^2 \sum_n \frac{a_n^2}{n!} \cdot \sum_n \frac{b_n^2}{n!} = \rho^2 \mathbf{E}|f(\xi)|^2 \mathbf{E}|g(\eta)|^2.$$

Комбинируя перечисленные оценки, получаем искомое неравенство.

Рассмотрим вторую часть задачи. Достаточно доказать данное неравенство для гладких финитных функций f и g . В общем случае f и g можно аппроксимировать такими функциями, а затем получить искомое неравенство предельным переходом.

Согласно задаче II.13.64 имеем

$$\mathbf{E}f(\xi)g(\eta) = \int_0^\rho \mathbf{E}f'(\xi_r)g'(\eta_r) dr,$$

где (ξ_r, η_r) — гауссовский вектор, $\xi_r, \eta_r \sim \mathcal{N}(0, 1)$ и $\mathbf{E}\xi_r\eta_r = r$. Очевидно, что

$$\begin{pmatrix} \xi_r \\ \eta_r \end{pmatrix} \stackrel{d}{=} \begin{pmatrix} \sqrt{1-r}X + \sqrt{r}Z \\ \sqrt{1-r}Y + \sqrt{r}Z \end{pmatrix},$$

где X, Y, Z — независимые величины с распределением $\mathcal{N}(0, 1)$. Из равенства $\mathbf{E}h'(U) = \mathbf{E}Uh(U)$, верного для гладкой финитной функции h и $U \sim \mathcal{N}(0, 1)$, следует, что

$$\mathbf{E}[f'(\sqrt{1-r}X + \sqrt{r}Z)|Y, Z] = \frac{1}{\sqrt{1-r}} \mathbf{E}[Xf(\sqrt{1-r}X + \sqrt{r}Z)|Y, Z].$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[f'(\sqrt{1-r}X + \sqrt{r}Z)g'(\sqrt{1-r}Y + \sqrt{r}Z)] &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-r}} \mathbf{E}[Xf(\sqrt{1-r}X + \sqrt{r}Z)g'(\sqrt{1-r}Y + \sqrt{r}Z)]. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\mathbb{E}[g'(\sqrt{1-r}Y + \sqrt{r}Z)|X, Z] = \frac{1}{\sqrt{1-r}} \mathbb{E}[Yg(\sqrt{1-r}Y + \sqrt{r}Z)|X, Z],$$

следовательно,

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}f'(\sqrt{1-r}X + \sqrt{r}Z)g'(\sqrt{1-r}Y + \sqrt{r}Z)| &= \\ &= \frac{1}{1-r} |\mathbb{E}Xf(\sqrt{1-r}X + \sqrt{r}Z)Yg(\sqrt{1-r}Y + \sqrt{r}Z)| \leq \\ &\leq \frac{1}{1-r} \|Yf(\sqrt{1-r}X + \sqrt{r}Z)\|_p \|Xg(\sqrt{1-r}Y + \sqrt{r}Z)\|_q = \\ &= \frac{\|Y\|_p \|X\|_q}{1-r} \|f(\sqrt{1-r}X + \sqrt{r}Z)\|_p \|g(\sqrt{1-r}Y + \sqrt{r}Z)\|_q = \\ &= \frac{\|\xi\|_p \|\xi\|_q}{1-r} \|f(\xi)\|_p \|g(\eta)\|_q. \end{aligned}$$

Итак, при $|\rho| \leq 1/2$ имеем

$$|\mathbb{E}f(\xi)g(\eta)| \leq \|\xi\|_p \|\xi\|_q \cdot \|f(\xi)\|_p \|g(\eta)\|_q \int_0^{\rho} \frac{dr}{1-r} \leq C|\rho| \|f(\xi)\|_p \|g(\eta)\|_q$$

для некоторого $C = C(p) > 0$. При $|\rho| > 1/2$ по неравенству Гёльдера

$$|\mathbb{E}f(\xi)g(\eta)| \leq \|f(\xi)\|_p \|g(\eta)\|_q \leq 2|\rho| \|f(\xi)\|_p \|g(\eta)\|_q. \quad \square$$

66. (Висков.) Пусть $\xi, \eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$ — независимые гауссовские величины. Показать, что для всякой целой функции $f = f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, удовлетворяющей условию $\mathbb{E}|f(x + \xi + i\eta)| < \infty$, справедливо следующее свойство «усреднения»:

$$f(x) = \mathbb{E}f(x + \xi + i\eta).$$

Решение. Достаточно доказать искомое равенство для случая, когда $f(z)$ — многочлен $\sum_{k=0}^n a_k z^k$. Согласно задаче II.13.62(a) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k x^k &= \sum_{k=0}^n a_k \mathbb{E}H_k(x + \xi) = \sum_{k=0}^n a_k \mathbb{E}\mathbb{E}[(x + \xi + i\eta)^k | \xi] = \\ &= \mathbb{E} \sum_{k=0}^n a_k (x + \xi + i\eta)^k. \quad \square \end{aligned}$$

67. Пусть ξ, η — независимые случайные величины. Доказать *теорему Крамера*.

Величина $\xi + \eta$ имеет гауссовское распределение в том и только том случае, когда ξ и η — гауссовские величины.

Для вывода этого утверждения воспользуйтесь вариантом теоремы Адамара.

Если $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ при всех $z \in \mathbb{C}$, причем f не обращается в нуль и

$$|f(z)| \leq C e^{c|z|^p}, \quad z \in \mathbb{C},$$

для некоторых констант $p, c, C > 0$, то $f(z) = e^{P(z)}$, где $P(z)$ — многочлен степени не выше p .

Решение. Если ξ и η — независимые гауссовские величины, то (ξ, η) — гауссовский вектор, а значит, $\xi + \eta$ имеет гауссовское распределение.

Обратно, пусть для определенности $\xi + \eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Тогда в силу симметричности закона $\mathcal{N}(0, 1)$ имеем

$$\mathbb{E} e^{|z||\xi+\eta|} \leq 2\mathbb{E} e^{|z|(\xi+\eta)} = 2e^{|z|^2/2} < \infty.$$

С другой стороны, по теореме Фубини величина $\mathbb{E}(e^{|z||\xi+\eta|} | \eta = y) = \mathbb{E} e^{|z||\xi+y|}$ конечна $\mathbb{P}_\eta$ -п. н. Следовательно, $\mathbb{E} e^{|z||\xi|} < \infty$ при любом $z \in \mathbb{C}$. Последнее означает, что

$$\varphi_\xi(z) = \mathbb{E} e^{iz\xi} = \sum_{n \geq 0} \frac{\mathbb{E} \xi^n}{n!} (iz)^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Действительно, указанный ряд мажорируется сходящимся рядом

$$\mathbb{E} e^{|z\xi|} = \sum_{n \geq 0} \frac{\mathbb{E} |\xi|^n}{n!} |z|^n < \infty.$$

Аналогично устанавливается, что $\varphi_\eta(z) = \mathbb{E} e^{iz\eta}$ разлагается в ряд, сходящийся в $\mathbb{C}$. При этом, очевидно,

$$\varphi_\xi(z)\varphi_\eta(z) = \mathbb{E} e^{iz(\xi+\eta)} = e^{-z^2/2} \neq 0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Докажем теперь, что $|\varphi_\xi(z)| \leq 2e^{|z|^2/2}$ при всех z . Имеем

$$\mathbb{E} e^{|z||\xi-X|} I[(\xi-X)(\eta-Y) \geq 0] \leq \mathbb{E} e^{|z||\xi+\eta-(X+Y)|} \leq 2e^{|z|^2},$$

где (X, Y) — независимая копия пары (ξ, η) . К тому же в силу условия $\mathbb{P}(\eta \geq Y) = \mathbb{P}(Y \geq \eta) \geq 1/2$ имеем

$$\mathbb{E} e^{|z||\xi-X|} I\{(\xi-X)(\eta-Y) \geq 0\} \geq \frac{\mathbb{E} e^{|z||\xi-X|}}{2} \geq \frac{|\mathbb{E} e^{iz(\xi-X)}|}{2} = \frac{|\varphi_\xi(z)|^2}{2}.$$

Окончательно получаем, что $|\varphi_\xi(z)| \leq 2e^{|z|^2/2}$. По теореме Адамара $\varphi_\xi(z) = e^{a+bz+cz^2}$. Последнее возможно, только когда ξ — гауссовская величина. $\square$

68. Назовем функцию $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ *почти дифференцируемой*, если для некоторой измеримой функции $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 (b-a)^\top g(a+x(b-a)) dx, \quad a, b \in \mathbb{R}^d. \quad (*)$$

При этом будем писать $\nabla f = (f'_{x_1}, \dots, f'_{x_d}) = g$ при $d > 1$ и $f' = g$ при $d = 1$.

Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Доказать *лемму Стейна* [103]:

$$\mathbb{E}|f'(\xi)| < \infty \Rightarrow \mathbb{E}|\xi f(\xi)| < \infty, \quad \mathbb{E}\xi f(\xi) = \mathbb{E}f'(\xi)$$

для любой почти дифференцируемой функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Пусть η — произвольной случайный вектор, компоненты которого совместно с ξ образуют гауссовскую систему. В обобщение предыдущего утверждения показать, что

$$\mathbb{E} \sum_{i=1}^d |f'_{x_i}(\eta)| < \infty \Rightarrow \mathbb{E}|\xi f(\eta)| < \infty, \quad \mathbb{E}\xi f(\eta) = [\mathbb{E}\nabla f(\eta)]^\top \mathbb{E}\xi\eta$$

для любой почти дифференцируемой функции $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$.

Решение. Пусть $\varphi = \varphi(x)$ — плотность величины ξ . Тогда

$$\varphi(x) = \int_x^\infty z\varphi(z) dz = - \int_{-\infty}^x z\varphi(z) dz.$$

По теореме Фубини

$$\begin{aligned} \mathbb{E}f'(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x) dx = \\ &= \int_0^\infty f'(x) dx \int_x^\infty z\varphi(z) dz - \int_{-\infty}^0 f'(x) dx \int_{-\infty}^x z\varphi(z) dz = \\ &= \int_0^\infty z\varphi(z) dz \int_0^z f'(x) dx - \int_{-\infty}^0 z\varphi(z) dz \int_z^0 f'(x) dx = \\ &= \int_0^\infty z\varphi(z)[f(z) - f(0)] dz + \int_{-\infty}^0 z\varphi(z)[f(z) - f(0)] dz = \\ &= \int_{\mathbb{R}} z f(z)\varphi(z) dz = \mathbb{E}\xi f(\xi) \end{aligned}$$

и $E|\xi f(\xi)| < \infty$, где мы также учли, что

$$\int_0^\infty |f'(x)| dx \int_x^\infty z \varphi(z) dz + \int_{-\infty}^0 |f'(x)| dx \int_{-\infty}^x |z| \varphi(z) dz = E|f'(\xi)| < \infty.$$

Вторая часть задачи есть следствие первой, а также того, что в силу задачи II.13.9 величины ξ и $\eta - \xi \cdot E\xi\eta$ независимы. Действительно, в этом случае

$$\begin{aligned} E[(\nabla f(\eta))^T | \eta - \xi \cdot E\xi\eta = z] E\xi\eta &= \\ &= [E\nabla f(z + \xi \cdot E\xi\eta)]^T E\xi\eta = E\xi f(z + \xi \cdot E\xi\eta), \end{aligned}$$

а значит,

$$[E\nabla f(\eta)]^T E\xi\eta = E[E\xi f(z + \xi \cdot E\xi\eta)]|_{z=\eta-\xi \cdot E\xi\eta} = E\xi f(\eta). \quad \square$$

69. Пусть ξ — гауссовский вектор в $\mathbb{R}^d$ с единичной матрицей дисперсии. Пусть также матрица $B = (b_{ij})_{i,j=1}^d$ симметрична и *положительно определена* ($B > 0$), т. е. такова, что $z^T B z > 0$ для всех ненулевых векторов $z \in \mathbb{R}^d$. При каких $d \geq 1$ существует $E(\xi^T B \xi)^{-1}$?

Решение. Воспользуемся следующим фактом из линейной алгебры. Для любой матрицы $B > 0$ найдется такая ортогональная матрица C , что матрица $D := C B C^T$ диагональна с положительными числами на диагонали.

При этом, очевидно, $\eta := C(\xi - E\xi)$ — стандартный гауссовский вектор и

$$\xi^T B \xi = (\eta + C E \xi)^T D (\eta + C E \xi) > 0 \text{ п. н.}$$

Поскольку плотность η ограничена на $\mathbb{R}^d$, а функция

$$f(x) = (x + C E \xi)^T D (x + C E \xi)$$

ограничена вне любой открытой окрестности точки $-C E \xi$, существование интеграла

$$E[(\eta + C E \xi)^T D (\eta + C E \xi)]^{-1}$$

эквивалентно конечности

$$\int_{x \in \mathbb{R}^d : \|x + C E \xi\| < 1} [(x + C E \xi)^T D (x + C E \xi)]^{-1} dx.$$

Последнее равносильно тому, что

$$I_d := \int_{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| < 1} \frac{dx}{\|x\|^2} < \infty.$$

Легко показать (переходя к сферическим координатам), что $I_d < \infty$ только при $d > 2$. $\square$

70. (См. [103].) Пусть функция $f: \mathbb{R}^d \rightarrow (0, \infty)$ гладкая вплоть до второго порядка, причем для всех $x \in \mathbb{R}^d$ выполняется равенство

$$\nabla^2 h(x) = \nabla^\top \nabla h(x) = \sum_{i=1}^d h''_{x_i x_i}(x) \leq 0, \quad h = \sqrt{f}.$$

Пусть также

$$\mathbb{E} \|\nabla \ln f(\xi)\|^2 < \infty, \quad \mathbb{E} \frac{1}{f(\xi)} \sum_{i=1}^d f''_{x_i x_i}(\xi) < \infty,$$

где ξ — гауссовский вектор в $\mathbb{R}^d$ с единичной матрицей дисперсии, а

$$\nabla = (\nabla_1, \dots, \nabla_d), \quad \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Доказать, что, каково бы ни было $\mathbb{E}\xi$, имеет место неравенство

$$\mathbb{E} \|\xi + \nabla \ln f(\xi) - \mathbb{E}\xi\|^2 \leq \mathbb{E} \|\xi - \mathbb{E}\xi\|^2 = d.$$

Вывести также, что при $d \geq 3$ выполняются равенства

$$\mathbb{E} \left\| \xi + \frac{A\xi}{\xi^\top B \xi} - \mathbb{E}\xi \right\|^2 = d - \mathbb{E} \frac{\xi^\top A^2 \xi}{(\xi^\top B \xi)^2}, \quad B = [(tr A)I - 2A]^{-1} A^2,$$

для всякой такой симметричной матрицы A , что матрица $(tr A)I - 2A$ положительно определена.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|\xi + \nabla \ln f(\xi) - \mathbb{E}\xi\|^2 &= \\ &= \mathbb{E} \|\xi - \mathbb{E}\xi\|^2 + 2\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^\top \nabla \ln f(\xi) + \mathbb{E} \|\nabla \ln f(\xi)\|^2, \end{aligned}$$

и ввиду задачи II.13.68 получаем

$$\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^\top \nabla \ln f(\xi) = \mathbb{E} \nabla^2 \ln f(\xi).$$

Кроме того,

$$\nabla^2 \ln f = \nabla^\top \frac{\nabla f}{f} = \frac{\nabla^2 f}{f} - \frac{\|\nabla f\|^2}{f^2},$$

следовательно,

$$\mathbb{E} \|\xi + \nabla \ln f(\xi) - \mathbb{E}\xi\|^2 = d + 2\mathbb{E} \frac{\nabla^2 f(\xi)}{f(\xi)} - \mathbb{E} \frac{\|\nabla f(\xi)\|^2}{f(\xi)^2}.$$

Замечая теперь, что

$$\nabla^2 \sqrt{f} = \nabla^\top \nabla \sqrt{f} = \frac{1}{2} \nabla^\top \frac{\nabla f}{\sqrt{f}} = \frac{\nabla^2 f}{2\sqrt{f}} - \frac{\|\nabla f\|^2}{4f^{3/2}},$$

окончательно получаем

$$\mathbb{E} \|\xi + \nabla \ln f(\xi) - \mathbb{E}\xi\|^2 = d + 4\mathbb{E} \frac{\nabla^2 \sqrt{f}(\xi)}{\sqrt{f}(\xi)} \leq d.$$

Перейдем ко второй части задачи. В силу задачи II.13.69 все приводимые далее математические ожидания существуют (при $d \geq 3$). Имеем

$$\mathbb{E} \left\| \xi + \frac{A\xi}{\xi^\top B\xi} - \mathbb{E}\xi \right\|^2 = \mathbb{E} \|\xi - \mathbb{E}\xi\|^2 + 2\mathbb{E} \frac{(\xi - \mathbb{E}\xi)^\top A\xi}{\xi^\top B\xi} + \mathbb{E} \frac{\xi^\top A^2 \xi}{(\xi^\top B\xi)^2}.$$

По лемме Стейна (см. задачу II.13.68)

$$\mathbb{E} \frac{(\xi - \mathbb{E}\xi)^\top A\xi}{\xi^\top B\xi} = \mathbb{E} \frac{\operatorname{tr} A}{\xi^\top B\xi} - 2\mathbb{E} \frac{\xi^\top AB\xi}{(\xi^\top B\xi)^2} = -\mathbb{E} \frac{\xi^\top A^2 \xi}{(\xi^\top B\xi)^2}.$$

Отсюда вытекает искомое равенство. $\square$

71. (См. [4].) Рассмотрим следующее *соотношение Гейзенберга–Вейля*

$$\mathbf{p}\mathbf{q} - \mathbf{q}\mathbf{p} = 1,$$

где $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ — элементы некоторого линейного пространства S с ассоциативной операцией умножения и единичным элементом $\mathbf{1}$.

Замечание. Данное соотношение изучалось Ч. Грэйвсом в работе [68] задолго до Г. Вейля и В. Гейзенберга, которые рассматривали его в связи с нуждами квантовой механики.

(а) Назовем запись многочлена от $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ *канонической*, если в ней он распадается на слагаемые вида $\mathbf{q}^m \mathbf{p}^n$, $m, n = 0, 1, \dots$, и $\mathbf{p}^0 = \mathbf{q}^0 = \mathbf{1}$. Так, например, $\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}\mathbf{q} + \mathbf{q}\mathbf{p} + \mathbf{q}^2$ есть неканоническая запись многочлена $(\mathbf{p} + \mathbf{q})^2$, а $\mathbf{p}^2 + 2\mathbf{q}\mathbf{p} + \mathbf{q}^2 + \mathbf{1}$ — каноническая.

Установить, что для любого многочлена $P = P(x)$ с целыми коэффициентами справедливо равенство

$$\mathbf{p}P(\mathbf{q}) = P(\mathbf{q})\mathbf{p} + P'(\mathbf{q}) = \mathbb{E}(p + \xi)P(q + \xi),$$

где $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$, а $\mathbb{E}$ берется так, как если бы p, q были обычными действительными переменными, затем получившееся выражение записывается в каноническом виде и вместо p и q подставляются $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ соответственно.

(b) В условиях п. (а) показать, что

$$P(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \mathbb{E}P(p + q + \xi).$$

(с) Пусть $\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$, где $\mathbf{0}$ — нулевой элемент пространства S . Показать, что свойство $\mathbf{p}P(\mathbf{q}) = P(\mathbf{q})\mathbf{p} + P'(\mathbf{q})$ (см. п. (а)), в частности, гарантирует, что на S нельзя задать норму $\|\cdot\|: S \rightarrow \mathbb{R}$, для которой $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, $x, y \in S$.

Замечание. В квантовой механике $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ имеют конкретный физический смысл: $\mathbf{p}$ — это оператор «уничтожения», а $\mathbf{q}$ — «рождения». Вследствие п. (с) операторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ не могут быть ограниченными линейными операторами ни в каком банаховом пространстве. Это обстоятельство, в частности, стимулировало развитие теории неограниченных линейных операторов.

Решение. (а) Достаточно доказать искомое соотношение для многочленов вида $P(x) = x^n$, $n \geq 1$ (случай $n = 0$ тривиален). При $n > 1$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{p}q^n &= (\mathbf{p}q)q^{n-1} = (\mathbf{q}p + \mathbf{1})q^{n-1} = \mathbf{q}(\mathbf{p}q)q^{n-2} + q^{n-1} = \dots \\ &\dots = q^n \mathbf{p} + nq^{n-1}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathbf{p}P(\mathbf{q}) = P(\mathbf{q})\mathbf{p} + P'(\mathbf{q})$ для любого многочлена $P = P(\mathbf{q})$. В частности, при $n \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{p}E(q + \xi)^n &= E\mathbf{p}(q + \xi)^n + E((q + \xi)^n)' = \\ &= E\mathbf{p}(q + \xi)^n + E\xi(q + \xi)^n = E(p + \xi)(q + \xi)^n, \end{aligned}$$

где мы воспользовались тем свойством $\mathcal{N}(0, 1)$ -величины ξ , что $Ef'(\xi) = E\xi f(\xi)$ для широкого класса гладких на $\mathbb{R}$ функций $f = f(x)$, включающего многочлены (см. задачу II.13.68).

(b) Указанное соотношение достаточно доказать при $P(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = (\mathbf{p} + \mathbf{q})^n$. Последнее легко сделать при помощи индукции, применяя формулу $\mathbf{p}E(q + \xi)^k = E(p + \xi)(q + \xi)^k$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} + \mathbf{q})^{n+1} &= (\mathbf{p} + \mathbf{q})(\mathbf{p} + \mathbf{q})^n = (\mathbf{p} + \mathbf{q})E(p + q + \xi)^n = \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k \mathbf{p} \cdot E(q + \xi)^k \cdot \mathbf{p}^{n-k} + E\mathbf{q}(p + q + \xi)^n = \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k E(p + \xi)(q + \xi)^k \cdot \mathbf{p}^{n-k} + E\mathbf{q}(p + q + \xi)^n = \\ &= E \sum_{k=0}^n C_n^k (p + \xi)(q + \xi)^k \mathbf{p}^{n-k} + E\mathbf{q}(p + q + \xi)^n = \\ &= E(p + \xi)(p + q + \xi)^n + E\mathbf{q}(p + q + \xi)^n = E(p + q + \xi)^{n+1}. \end{aligned}$$

(с) Допустим противное. Покажем, что

1) $\mathbf{q}^n = \mathbf{0}$ при некотором $n > 1$;

2) если $\mathbf{q}^m = \mathbf{0}$ при $m > 1$, то с необходимостью $\mathbf{q}^{m-1} = \mathbf{0}$.

Эти свойства, конечно, приведут к противоречию, поскольку $\mathbf{q}^1 = \mathbf{q}$ не есть нуль (иначе мы бы получили $\mathbf{p}\mathbf{q} - \mathbf{q}\mathbf{p} = \mathbf{0} \neq \mathbf{1}$).

Пусть $n \geq 1$. Тогда $\mathbf{p}\mathbf{q}^n = \mathbf{q}^n\mathbf{p} + n\mathbf{q}^{n-1}$ и, значит,

$$n\|\mathbf{q}^{n-1}\| = \|\mathbf{p}\mathbf{q}^n - \mathbf{q}^n\mathbf{p}\| \leq 2\|\mathbf{p}\|\|\mathbf{q}\|\|\mathbf{q}^{n-1}\|,$$

так что если $\|\mathbf{q}^{n-1}\| \neq 0$, то $2\|\mathbf{p}\|\|\mathbf{q}\| \geq n$. Следовательно, с необходимостью $\mathbf{q}^n = \mathbf{0}$ при достаточно большом n , т. е. выполнено условие 1.

Пусть теперь $\mathbf{q}^m = \mathbf{0}$ для некоторого $m > 1$. Тогда

$$(\mathbf{p}\mathbf{q} - \mathbf{q}\mathbf{p})\mathbf{q}^{m-1} = -\mathbf{q}\mathbf{p}\mathbf{q}^{m-1} = \mathbf{q}^{m-1} = \mathbf{q}^{m-1}\mathbf{p}\mathbf{q} = \mathbf{q}^{m-1}(\mathbf{p}\mathbf{q} - \mathbf{q}\mathbf{p}).$$

При этом $-\mathbf{q}\mathbf{p}\mathbf{q}^{m-1} = -\mathbf{q}^{m-1}\mathbf{p}\mathbf{q} - (m-2)\mathbf{q}^{m-1}$. Поэтому

$$-\mathbf{q}^{m-1}\mathbf{p}\mathbf{q} - (m-2)\mathbf{q}^{m-1} = \mathbf{q}^{m-1}\mathbf{p}\mathbf{q} = \mathbf{q}^{m-1}$$

и, значит, $2\mathbf{q}^{m-1}\mathbf{p}\mathbf{q} = -(m-2)\mathbf{q}^{m-1} = 2\mathbf{q}^{m-1}$, т. е. $m\mathbf{q}^{m-1} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{q}^{m-1} = \mathbf{0}$. Иначе говоря, мы получили условие 2. $\square$

72. Пусть $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Доказать *неравенство Пуанкаре*

$$[Ef'(X)]^2 \leq Df(X) \leq E[f'(X)]^2 \quad \text{для всех гладких функций } f, \\ \text{удовлетворяющих условию } E[f(X)]^2 < \infty.$$

Уточнить это неравенство, показав, что $E[f'(X)]^2$ можно заменить на

$$\frac{E[f'(X)]^2 + |Ef'(X)|^2}{2}.$$

(См. задачу II.13.65.)

Решение. Нижняя оценка следует из того, что $Ef'(X) = EXf(X)$ и

$$|EXf(X)|^2 = |EX[f(X) - Ef(X)]|^2 \leq EX^2 Df(X) = Df(X).$$

Верхняя оценка доказывается так. Пусть Y — независимая копия величины X . Тогда

$$Df(X) = Ef(X)[f(X) - f(Y)].$$

По формуле Ньютона—Лейбница

$$f(X) - f(Y) = \int_0^1 f'(\sqrt{t}X + \sqrt{1-t}Y)(\sqrt{1-t}X - \sqrt{t}Y) \frac{dt}{2\sqrt{t(1-t)}},$$

где величины $X_t = \sqrt{t}X + \sqrt{1-t}Y$ и $Y_t = \sqrt{1-t}X - \sqrt{t}Y$ независимы (при всех t) и распределены как $\mathcal{N}(0, 1)$. Считая, что $E[f'(X)]^2 < \infty$ (иначе оценка будет тривиальной), по теореме Фубини получаем

$$Df(X) = \int_0^1 E f'(X_t) Y_t f(X) \frac{dt}{2\sqrt{t(1-t)}}.$$

Теорема Фубини применима в рассматриваемом случае, поскольку

$$[E|f'(X_t)Y_t f(X)|]^2 \leq E|f'(X_t)|^2 Y_t^2 \cdot E|f(X)|^2 = E|f'(X)|^2 \cdot E|f(X)|^2 < \infty.$$

Учитывая далее, что $X = \sqrt{t}X_t + \sqrt{1-t}Y_t$, находим, что при любых $x \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} E(Y_t f(X)|X_t = x) &= E Y_t f(\sqrt{t}x + \sqrt{1-t}Y_t) = \\ &= \sqrt{1-t} E f'(\sqrt{t}x + \sqrt{1-t}Y_t) = \sqrt{1-t} E(f'(X)|X_t = x), \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$Df(X) = \int_0^1 E f'(X_t) f'(X) \frac{dt}{2\sqrt{t}}.$$

Для вывода верхней оценки в неравенстве Пуанкаре осталось заметить, что

$$|E f'(X_t) f'(X)| \leq \sqrt{E|f'(X_t)|^2} \sqrt{E|f'(X)|^2} = E|f'(X)|^2 \quad \text{и} \quad \int_0^1 \frac{dt}{2\sqrt{t}} = 1.$$

Неравенство Пуанкаре можно уточнить, используя неравенство Гёбелейна из задачи II.13.65:

$$|\text{cov}(f'(X_t), f'(X))| \leq |\text{cov}(X_t, X)| \sqrt{Df'(X_t)} \sqrt{Df'(X)} = \sqrt{t} Df'(X),$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} Df(X) &= \int_0^1 \text{cov}(f'(X_t), f'(X)) \frac{dt}{2\sqrt{t}} + [E f'(X)]^2 \int_0^1 \frac{dt}{2\sqrt{t}} \leq \\ &\leq \frac{Df'(X)}{2} + [E f'(X)]^2 = \frac{E[f'(X)]^2 + |E f'(X)|^2}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

Замечание. Верхнюю оценку в неравенстве Пуанкаре можно также вывести с помощью полиномов Эрмита из задачи II.13.62.

73. Показать, что *неравенство Пуанкаре* из задачи II.13.72 дает полную характеристику распределения $\mathcal{N}(0, 1)$ в том смысле, что если

для некоторой величины X , $EX = 0$, $EX^2 = 1$, имеем

$$Df(X) \leq E[f'(X)]^2 \text{ для всех гладких функций } f, E[f(X)]^2 < \infty, \quad (*)$$

то $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Решение. Пусть вначале X удовлетворяет условию (*). Тогда для любой гладкой функции g , $E[g(X)]^2 < \infty$, имеем $D[X + zg(X)] \leq E[1 + zg'(X)]^2$ для всех $z \in \mathbb{R}$. Последнее равносильно тому, что $az^2 + 2bz \geq 0$ при каждом $z \in \mathbb{R}$, где

$$\begin{aligned} a &= E[g'(X)]^2 - Dg(X), \\ b &= Eg'(X) - \text{cov}(X, g(X)) = Eg'(X) - EXg(X). \end{aligned}$$

Последнее возможно только при $Eg'(X) = EXg(X)$. Полагая $g(x) = \cos tx$ и $g(x) = \sin tx$ (при $t \in \mathbb{R}$), получим уравнение на характеристическую функцию $\varphi = \varphi(t)$ величины X :

$$\varphi'(t) = -t\varphi(t),$$

откуда находим $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$ и, значит, $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. $\square$

74. Доказать *информационное неравенство*, утверждающее, что

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \ln \frac{f(x)}{g(x)} dx > 0$$

для любых двух таких плотностей f и g , что $\lambda(x: f(x) \neq g(x)) \neq 0$, где λ — мера Лебега. (Предполагается, что $0 \cdot \ln 0/0 = 0 \cdot \ln 0/a = 0$ и $a \cdot \ln a/0 = \infty$ при $a > 0$.)

Вывести отсюда, что

$$\inf_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \ln f(x) dx$$

по всем таким плотностям f , что $\int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) dx = 1$, достигается (только) на

$$\varphi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Решение. Для простоты будем считать, что $f(x), g(x) > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$ (общий случай рассматривается с незначительными изменениями). Информационное неравенство теперь следует из того, что

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \ln \frac{g(x)}{f(x)} dx < \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\frac{g(x)}{f(x)} - 1 \right) dx = 0,$$

поскольку $\ln z < z - 1$ при $z \geq 0$, $z \neq 1$ (причем $\ln 1 = 1 - 1$) и

$$\lambda\left(x: \frac{g(x)}{f(x)} \neq 1\right) = \lambda(x: g(x) \neq f(x)) \neq 0.$$

Вторая часть задачи вытекает из того, что вследствие информационного неравенства

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x) \log f(x) dx + \frac{1}{2} + \ln \sqrt{2\pi} &= \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \log f(x) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) dx + \ln \sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \log \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx \begin{cases} > 0, & \lambda(x: f(x) \neq \varphi(x)) \neq 0, \\ = 0, & \lambda(x: f(x) \neq \varphi(x)) = 0. \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

75. (См. [49].) Пусть $\{X_1, X_2, \dots\}$ — равномерно интегрируемое семейство случайных величин. Показать, что (при $n \rightarrow \infty$)

$$X_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1) \Leftrightarrow \mathbb{E}[X_n e^{itX_n} - ite^{itX_n}] \rightarrow 0 \text{ для всех } t \in \mathbb{R}.$$

Решение. Семейство величин $\{X_n\}_{n \geq 1}$ плотно, так как

$$\sup_n \mathbb{P}(\varepsilon |X_n| > 1) \leq \sup_n \varepsilon \mathbb{E}|X_n| I(\varepsilon |X_n| > 1) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \downarrow 0.$$

Следовательно, по теореме Прохорова оно относительно компактно, т. е. из любой последовательности $(n') \subset (n)$ можно выделить подпоследовательность $(n'') \subset (n')$, для которой $X_{n''}$ сходятся по распределению к некоторой величине X при $n'' \rightarrow \infty$.

Таким образом, достаточно проверить, что любое такое X распределено по закону $\mathcal{N}(0, 1)$. Имеем

$$\varphi'(t) + t\varphi(t) = 0, \quad \varphi(0) = 1,$$

где φ — характеристическая функция величины X . Действительно, вследствие равномерной интегрируемости X_n имеем

$$\lim_n \mathbb{E}[iX_n e^{itX_n} + te^{itX_n}] = 0 = \mathbb{E}[iX e^{itX} + te^{itX}] = \varphi'(t) + t\varphi(t).$$

Единственное решение указанного дифференциального уравнения $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$, т. е. $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Обратное утверждение доказывается аналогично. $\square$

76. Пусть функции $R = R(s, t)$ и $K = K(s, t)$, $s, t \in T$, являются неотрицательно определенными. Показать, что этим же свойством обладают

функции $aR + bK$ при $a, b > 0$ и RK , а также функция $C = C(u, v)$, $u, v \in T^2$, заданная формулой $C(u, v) = R(u)K(v)$.

Вывести отсюда, что для любой аналитической функции

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R}, a_n \geq 0,$$

функция $f \circ R = f(R)$ неотрицательно определена.

Решение. Достаточно рассмотреть случай конечного T . Пусть (X_t) и (Y_t) , $t \in T$, — независимые гауссовские системы,

$$EX_t = EY_t = 0, \quad R(s, t) = EX_s X_t, \quad K(s, t) = EY_s Y_t.$$

Тогда ковариационные функции систем $(\sqrt{a}X_t + \sqrt{b}Y_t)$, $(X_t Y_t)$ и $(Z_u) = (X_s Y_t)$, $u = (s, t)$, соответственно равны $aR + bK$, RK и C . Отсюда легко получаются искомые свойства. $\square$

77. Пусть $R = R(s, t)$ — симметричная неотрицательно определенная функция на $\mathbb{R}^2$, а X — такая случайная величина, что $E\sqrt{R(X, X)} < \infty$. Доказать, что $0 \leq ER(X, Y) < \infty$, когда Y — независимая копия величины X .

Решение. Подберем центрированную гауссовскую систему

$$\{Z_t\}_{-\infty < t < \infty},$$

для которой $R(s, t) = EZ_s Z_t$, $s, t \in \mathbb{R}^2$. По неравенству Коши—Буняковского для всех действительных s и t имеем

$$|R(s, t)| = |EZ_t Z_s| \leq \sqrt{EZ_s^2} \sqrt{EZ_t^2} = \sqrt{R(s, s)} \sqrt{R(t, t)}$$

(значения $R(t, t)$ и $R(s, s)$ неотрицательны, так как функция R неотрицательно определена). Поэтому

$$E|R(X, Y)| \leq E\sqrt{R(X, X)}\sqrt{R(Y, Y)} = E\sqrt{R(X, X)}E\sqrt{R(Y, Y)} < \infty.$$

Пусть $(X_n)_{n \geq 1}$ — независимые копии величины X . Для всех $n \geq 1$ имеем

$$ER(X, Y) = ER_n \geq -ER_n^-,$$

где

$$R_n = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} R(X_i, X_j).$$

Семейство $\{R_n^-\}_{n \geq 1}$ равномерно интегрируемо (см. задачу II.6.29), так что достаточно показать, что $R_n^- \xrightarrow{P} 0$ (откуда $ER_n^- \rightarrow 0$ и, значит,

$\lim ER_n \geq 0$). Имеем

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j=1}^n R(X_i, X_j) - \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n R(X_i, X_i) \geq \\ &\geq -\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n R(X_i, X_i). \end{aligned}$$

поскольку в силу неотрицательной определенности функции R справедливо неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n R(x_i, x_j) \geq 0,$$

для любых $x_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$. Таким образом, надо лишь показать, что

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n R(X_i, X_i) \xrightarrow{p} 0 \quad (*).$$

Обозначим $U_i = R(X_i, X_i)$, $1 \leq i \leq n$. Согласно условию $\{U_i\}_{i=1}^n$ — н. о. р. неотрицательные случайные величины, $E\sqrt{U_1} < \infty$. Вследствие задачи П.6.105 имеем

$$E \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n U_i I(U_i \leq n^2) = \frac{EU_1 I(U_1 \leq n^2)}{n} \rightarrow 0,$$

причем

$$\begin{aligned} P(U_i > n^2 \text{ для некоторого } i \in [1, n]) &\leq nP(U_1 > n^2) \leq \\ &\leq E\sqrt{U_1} I(U_1 > n^2) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Из последних двух соотношений следует условие (*). $\square$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Аннотированный указатель основных обозначений и важных понятий комбинаторики и теории вероятностей, используемых в книге

§ 1. Элементы комбинаторики

Начало становления «исчисления вероятностей» было самым непосредственным образом связано с комбинаторными приемами подсчетов числа тех комбинаций, которые приводят к осуществлению того или иного рассматриваемого события. Эти приемы занимают значительное место в современной теории вероятностей, в частности и в особенности в той ее части, которая имеет дело с конечными пространствами элементарных исходов («элементарная теория вероятностей»). Комбинаторные методы составляют существенную часть дискретной математики, включая такие ее разделы, как теория графов, теория алгоритмов.

Приведем суммарным образом некоторые основные понятия комбинаторики и некоторые ее результаты, используемые как в основном тексте книг «Вероятность — 1» и «Вероятность — 2», так и в приводимых в настоящей книге задачах.

• Пусть $\mathbf{A}$ — некоторая *совокупность*, состоящая из конечного числа N элементов $a_1, \dots, a_N$ ($|\mathbf{A}| = N$). Если все эти элементы *различны*, то эту совокупность называют *множеством* и обозначают

$$\mathbf{A} = \{a_1, \dots, a_N\}.$$

В этой записи *порядок* следования элементов не играет никакой роли, важен лишь *состав*. Так, совокупности $\{1, 2, 3\}$ и $\{2, 3, 1\}$ определяют одно и то же множество, состоящее из «точек» $\{1\}$, $\{2\}$ и $\{3\}$.

С каждым множеством $\mathbf{A} = \{a_1, \dots, a_N\}$ связываются два типа *выборки* размера n (иногда говорят — *последовательностей* длины n):

$$(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) \quad \text{и} \quad [a_{i_1}, \dots, a_{i_n}],$$

где $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, N\}$ и элементы $a_{i_j} \in \mathbf{A}$, причем не исключается, что при различных j они могут совпадать.

Обозначение $(a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$ используется для *упорядоченных* выборок, т. е. выборок, в которых важен *порядок* следования элементов.

Через $[a_{i_1}, \dots, a_{i_n}]$ обозначаются *неупорядоченные* выборки, т. е. выборки, в которых важен лишь их *состав*, а порядок записи элементов не важен.

Так, выборки (a_4, a_1, a_3, a_1) и (a_1, a_1, a_4, a_3) , имеющие один и тот же состав, но отличающиеся порядком следования элементов, рассматриваются как *разные*. Выборки же $[a_4, a_1, a_3, a_1]$ и $[a_1, a_1, a_4, a_3]$ рассматриваются как разные формы записи одной и той же выборки.

В тех случаях, когда выборки $(\dots)$ и $[\dots]$ образуются из множества $\mathbf{A}$ по принципу «выбор без возвращения», все их элементы различны и, естественно, $n \leq N$.

В случае же «выбора с возвращением» элементы в $(\dots)$ и $[\dots]$ могут повторяться и, вообще говоря, допускается, что n может быть произвольным.

Разбиением $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_n\}$, $n \leq N$, множества $\mathbf{A}$ с $|\mathbf{A}| = N$ называется всякая система, состоящая из подмножеств $D_i \subseteq \mathbf{A}$, $1 \leq i \leq n$, таких, что все $D_i \neq \emptyset$, $D_i \cap D_j = \emptyset$, $i \neq j$, и $D_1 + \dots + D_n = \mathbf{A}$. Множества D_i называются *атомами*, или *классами* разбиения $\mathcal{D}$.

• Подсчет *числа выборов*, образованных из элементов множества $\mathbf{A} = \{a_1, \dots, a_N\}$.

Комбинаторные числа	Их интерпретация
(a) $(N)_n \equiv N(N-1)\dots(N-n+1)$ («число размещений» из N по n , $1 \leq n \leq N$)	число <i>упорядоченных</i> выборов $(\dots)$ размера n , образованных из элементов множества $\mathbf{A}$ с $ \mathbf{A} = N$ по принципу «выбор без возвращения»
(b) $C_N^n \equiv \frac{(N)_n}{n!} \left(= \frac{N!}{n!(N-n)!} \right)$ («число сочетаний» из N по n , биномиальные коэффициенты)	число <i>неупорядоченных</i> выборов $[\dots]$ размера n , образованных из элементов множества $\mathbf{A}$ с $ \mathbf{A} = N$ по принципу «выбор без возвращения»
(c) N^n	число <i>упорядоченных</i> выборов $(\dots)$ размера $n \geq 1$, образованных из элементов множества $\mathbf{A}$ с $ \mathbf{A} = N$ по принципу «выбор с возвращением»
(d) C_{N+n-1}^n	число <i>неупорядоченных</i> выборов $[\dots]$ размера $n \geq 1$, образованных из элементов множества $\mathbf{A}$ с $ \mathbf{A} = N$ по принципу «выбор с возвращением»

По поводу других комбинаторных интерпретаций вышеприведенных чисел см. задачи в §§ 1, 2 главы I. В частности, согласно задаче I.1.3, «число упорядоченных последовательностей (...) длины N , состоящих из n единиц и $N - n$ нулей, равно C_N^n ». Этот результат особенно важен в связи с биномиальным распределением в элементарной теории вероятностей.

Пример 1. Пусть $\mathbf{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $|\mathbf{A}| = 4$, $n = 2$.

(а) $(4)_2 = 4(4 - 1) = 12$. Соответствующие 12 упорядоченных выборок суть:

$$(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_1, a_4), (a_2, a_1), (a_2, a_3), (a_2, a_4), \\ (a_3, a_1), (a_3, a_2), (a_3, a_4), (a_4, a_1), (a_4, a_2), (a_4, a_3).$$

(b) $C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$. Соответствующие 6 неупорядоченных выборок суть:

$$[a_1, a_2], [a_1, a_3], [a_1, a_4], [a_2, a_3], [a_2, a_4], [a_3, a_4].$$

(с) $4^2 = 16$. К 12 выборкам из (а) добавляются еще выборки (a_1, a_1) , (a_2, a_2) , (a_3, a_3) и (a_4, a_4) .

(d) $C_{4+2-1}^2 = C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = 10$. К 6 выборкам из (b) добавляются еще выборки $[a_1, a_1]$, $[a_2, a_2]$, $[a_3, a_3]$ и $[a_4, a_4]$.

• Подсчет числа подмножеств и разбиений множества $\mathbf{A} = \{a_1, \dots, a_N\}$.

Комбинаторные числа	Их интерпретация
(е) 2^N	число всех подмножеств множества $\mathbf{A}$ (включая пустое множество $\emptyset$ и само множество $\mathbf{A}$ с $ \mathbf{A} = N$)
(i) $C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}$	число различных подмножеств $D \subseteq \mathbf{A}$, состоящих из n элементов ($ D = n$, $ \mathbf{A} = N$, $0 \leq n \leq N$; в случае $n = 0$ $D = \{\emptyset\}$ и $C_N^0 = 1$)
(g) $C_N(n_1, \dots, n_r) = \frac{N!}{n_1! \dots n_r!}$ («мультиномиальные», или «полиномиальные» коэффициенты, $n_1 + \dots + n_r = N$)	число различных разбиений $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_r\}$ множества $\mathbf{A}$ с $ \mathbf{A} = N$ на r подмножеств $D_1, \dots, D_r$, $r \leq n$, с $ D_1 = n_1, \dots, D_r = n_r$, $n_1 + \dots + n_r = N$

Комбинаторные числа	Их интерпретация
(h) $D_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) =$ $= \frac{N!}{(1!)^{\lambda_1} \dots (N!)^{\lambda_N} (\lambda_1)! \dots (\lambda_N)!}$ (все $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^N i\lambda_i = N$)	число «блоковых» разбиений множества $\mathbf{A}$ с $ \mathbf{A} = N$ вида $\mathcal{D} = \{D_{11}, \dots, D_{1\lambda_1}; \dots$ $\dots; D_{N1}, \dots, D_{N\lambda_N}\},$ где «блок» $\llbracket D_{i1}, \dots, D_{i\lambda_i} \rrbracket$ состоит из λ_i множеств, каждое из которых содержит i элементов ($ D_{ik} = i$, $1 \leq k \leq \lambda_i$); если $\lambda_i = 0$, то соответствующий блок не определяется и считается в разбиении $\mathcal{D}$ отсутствующим
(i) $S_N^n = \sum D_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ (сумма — по $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ таким, что $\sum_{i=1}^N \lambda_i = n$, $\sum_{i=1}^N i\lambda_i = N$ и все $\lambda_i \geq 0$)	число всевозможных разбиений $\mathcal{D}$ множества $\mathbf{A}$ с $ \mathbf{A} = N$ таких, что каждое из них содержит в точности n классов

Числа S_N^n , $1 \leq n \leq N$, называются *числами Стирлинга второго рода*.²

(j) $B_N = \sum_{n=1}^N S_N^n$	число всевозможных разбиений множества $\mathbf{A}$ с $ \mathbf{A} = N$

Числа B_N называются *числами Белла*.

(По поводу чисел, введенных в (i)–(j), см. задачи в § 2 главы I.)

Пример 2. Снова пусть $\mathbf{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $N = |\mathbf{A}| = 4$, $n = 2$.

(е) $2^4 = 16$. Этими шестнадцатью подмножествами являются следующие множества:

$\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_4\},$
 $\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_4\}, \{a_2, a_3\}, \{a_2, a_4\}, \{a_3, a_4\},$
 $\{a_1, a_2, a_3\}, \{a_1, a_2, a_4\}, \{a_1, a_3, a_4\}, \{a_2, a_3, a_4\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}.$

(f) $C_4^2 = 6$. Соответствующие подмножества, состоящие из двух элементов, суть:

$\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_4\}, \{a_2, a_3\}, \{a_2, a_4\}, \{a_3, a_4\}.$

² По поводу чисел Стирлинга первого рода см. далее с. 626.

(г) Пусть $r = 2$, $n_1 = 1$, $n_2 = 3$, тогда $C_4(1, 3) = \frac{4!}{1!3!} = 4$. Соответствующие разбиения:

$$\begin{aligned} \{a_1\} \text{ и } \{a_2, a_3, a_4\}, & \quad \{a_2\} \text{ и } \{a_1, a_3, a_4\}, \\ \{a_3\} \text{ и } \{a_1, a_2, a_4\}, & \quad \{a_4\} \text{ и } \{a_1, a_2, a_3\}. \end{aligned}$$

$$(h) \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 0; \sum_{i=1}^4 i\lambda_i = 4,$$

$$D_4(2, 1, 0, 0) = \frac{4!}{(1!)^2(2!)^1(3!)^0(4!)^0 2!1!0!0!} = 6.$$

Соответствующими «блоковыми» разбиениями являются:

$$\begin{aligned} \llbracket \{a_1\}, \{a_2\} \rrbracket \text{ и } \llbracket \{a_3\}, \{a_4\} \rrbracket, & \quad \llbracket \{a_1\}, \{a_3\} \rrbracket \text{ и } \llbracket \{a_2\}, \{a_4\} \rrbracket, \\ \llbracket \{a_1\}, \{a_4\} \rrbracket \text{ и } \llbracket \{a_2\}, \{a_3\} \rrbracket, & \quad \llbracket \{a_2\}, \{a_3\} \rrbracket \text{ и } \llbracket \{a_1\}, \{a_4\} \rrbracket, \\ \llbracket \{a_2\}, \{a_4\} \rrbracket \text{ и } \llbracket \{a_1\}, \{a_3\} \rrbracket, & \quad \llbracket \{a_3\}, \{a_4\} \rrbracket \text{ и } \llbracket \{a_1\}, \{a_2\} \rrbracket. \end{aligned}$$

(и) $S_4^2 = D_4(0, 2, 0, 0) + D_4(1, 0, 1, 0) = 3 + 4 = 7$. Соответствующие разбиения: $\{a_1\}$ и $\{a_2, a_3, a_4\}$,

$$\begin{aligned} \{a_2\} \text{ и } \{a_1, a_3, a_4\}, & \quad \{a_3\} \text{ и } \{a_1, a_2, a_4\}, & \quad \{a_4\} \text{ и } \{a_1, a_2, a_3\}, \\ \{a_1, a_2\} \text{ и } \{a_3, a_4\}, & \quad \{a_1, a_3\} \text{ и } \{a_2, a_4\}, & \quad \{a_1, a_4\} \text{ и } \{a_2, a_3\}. \end{aligned}$$

Аналогичный подсчет показывает, что, например,

$$S_4^1 = 1, \quad S_4^3 = 6, \quad S_4^4 = 1,$$

$$S_5^1 = 1, \quad S_5^2 = 15, \quad S_5^3 = 25, \quad S_5^4 = 10, \quad S_5^5 = 1,$$

$$S_6^1 = 1, \quad S_6^2 = 31, \quad S_6^3 = 90, \quad S_6^4 = 65, \quad S_6^5 = 15, \quad S_6^6 = 1.$$

(j) Из (и) следует, что при $N = 4$

$$B_4 = S_4^1 + S_4^2 + S_4^3 + S_4^4 = 1 + 7 + 6 + 1 = 15,$$

$$B_5 = 1 + 15 + 25 + 10 + 1 = 52,$$

$$B_6 = 1 + 31 + 90 + 65 + 15 + 1 = 203.$$

Для случая $N = 4$ соответствующие пятнадцать разбиений таковы:

$$\begin{aligned} \{a_1, a_2, a_3, a_4\}; & \quad \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_4\}; \\ \{a_1\} \text{ и } \{a_2, a_3, a_4\}; & \quad \{a_2\} \text{ и } \{a_1, a_3, a_4\}; \\ \{a_3\} \text{ и } \{a_1, a_2, a_4\}; & \quad \{a_4\} \text{ и } \{a_1, a_2, a_3\}; \\ \{a_1, a_2\} \text{ и } \{a_3, a_4\}; & \quad \{a_1, a_3\} \text{ и } \{a_2, a_4\}; & \quad \{a_1, a_4\} \text{ и } \{a_2, a_3\}; \\ \{a_1\}, \{a_2\} \text{ и } \{a_3, a_4\}; & \quad \{a_1\}, \{a_3\} \text{ и } \{a_2, a_4\}; & \quad \{a_1\}, \{a_4\} \text{ и } \{a_2, a_3\}; \\ \{a_2\}, \{a_3\} \text{ и } \{a_1, a_4\}; & \quad \{a_2\}, \{a_4\} \text{ и } \{a_1, a_3\}; & \quad \{a_3\}, \{a_4\} \text{ и } \{a_2, a_3\}. \end{aligned}$$

• Комбинаторные методы играют большую роль не только при подсчете числа тех или иных благоприятствующих комбинаций в элементарной теории вероятностей. Они в успехом применяются при установлении разного рода соотношений, примером которых может быть следующее равенство:

$$n^N = \sum_{k=1}^n S_N^k (n)_k,$$

где $1 \leq n \leq N$ и S_N^k — числа Стирлинга второго рода. (Отметим, что $S_N^1 = S_N^N = 1$ и полагают $S_N^0 = 0$, $S_N^N = 0$ для $n > N$.)

Идея комбинаторного доказательства этого соотношения основана на том, что и левая, и правая его части дают одно и то же число некоторых возможностей, но подсчитанное разными способами.

Применительно к рассматриваемому соотношению это осуществляется следующим образом.

Пусть A и B — два множества с числом элементов $|A| = N$ и $|B| = n$ соответственно. Рассмотрим функции $y = f(x)$, определенные для $x \in A$ и принимающие значения $y \in B$. Поскольку каждому из N значений x может быть поставлено в соответствие любое из n значений y , то общее число функций, осуществляющих отображение A в B , очевидно, равно n^N .

Подсчитаем теперь это же число функций другим способом, рассматривая для каждого $y \in B$ соответствующие прообразы $f^{-1}(y) = \{x: f(x) = y\}$. Имея это в виду, выберем некоторое множество $C \subseteq B$ с $|C| = k$, где $1 \leq k \leq n$, и пусть функция $y = f(x)$ такова, что множество ее значений есть в точности множество C . Поскольку $|C| = k$, то прообразы образуют разбиение множества A на k классов с тем свойством, что на каждом таком классе функция принимает одно и то же значение. Число таких разбиений равно S_N^k , и поскольку число возможных функций, определенных на этих разбиениях из k классов и принимающих k значений из C , равно $(k)_k = k!$, то общее число функций со значениями в C равно $S_N^k k!$.

Множество C с $|C| = k$ может быть выбрано C_n^k способами. Следовательно, общее число функций $y = f(x)$, определенных для $x \in A$ и со значениями в B с $|A| = N$ и $|B| = n$, равно

$$\sum_{k=1}^n C_n^k S_N^k k! = \sum_{k=1}^n S_N^k (n)_k.$$

Поскольку — подсчитанное первым способом — это число равно n^N , то приведенное соотношение доказано. (Большое число примеров и задач

на применение идей «двойного подсчета» и вообще изложение многих результатов комбинаторики можно найти, например, в [51], [47], [16], [17], [22].)

§ 2. Вероятностные структуры и понятия

В основе всех вероятностно-статистических рассуждений лежит *вероятностное пространство*, или *вероятностная модель* (см. В1.П.1),

$$(\Omega, \mathcal{F}, P),$$

где

Ω — пространство элементарных исходов ω ,

$\mathcal{F}$ — σ -алгебра подмножеств,

P — вероятностная мера на множествах из $\mathcal{F}$, т. е. σ -аддитивная функция множеств $A \in \mathcal{F}$ такая, что $0 \leq P(A) \leq 1$, $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$.

• Наряду с понятием σ -алгебры, входящей как существенный элемент в определение вероятностного пространства, в теории вероятностей приходится также оперировать с другими разнообразными *системами подмножеств*: алгебрами, сепарабельными σ -алгебрами, монотонными классами, π -системами, λ -системами, π - λ -системами, совокупностями цилиндрических множеств и др. См. В1.П.2.

• События (множества) A и B называются *независимыми*, если $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Две системы $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ подмножеств из $\mathcal{F}$ называются *независимыми*, если любые множества $A \in \mathcal{G}_1$ и $B \in \mathcal{G}_2$ являются независимыми.

Множества $A_1, \dots, A_n$ называются *независимыми*, если для любых $k = 1, \dots, n$ и $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k}).$$

Соответственно определяется и независимость систем $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n$ подмножеств из $\mathcal{F}$.

• Через $(E, \mathcal{E})$ обозначается *измеримое пространство*, т. е. множество E с выделенной на нем σ -алгеброй $\mathcal{E}$.

Важнейшими примерами измеримых пространств являются (В1.П.2):

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ — числовая прямая $\mathbb{R}$ с борелевской σ -алгеброй $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (часто обозначаемой $\mathcal{B}$);

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ — пространство $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ с σ -алгеброй $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \dots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$;

$(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$ — пространство $\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \times \dots$ с σ -алгеброй $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$, порожденной цилиндрическими множествами;

$(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T))$, где T — произвольное множество, есть пространство $\mathbb{R}^T$ (пространство действительных функций, определенных на T) с σ -алгеброй $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$, порожденной цилиндрическими множествами;

$(C, \mathcal{B}(C))$ — пространство C непрерывных функций (например, на $[0, 1]$ или на $[0, \infty)$) с σ -алгеброй $\mathcal{B}(C)$, порожденной открытыми множествами (или, что здесь то же самое, цилиндрическими множествами);

$(D, \mathcal{B}(D))$ — пространство D функций (например, на $[0, 1]$), являющихся непрерывными справа (для всех $t < 1$) и имеющих пределы слева (для любого $t > 0$) с σ -алгеброй $\mathcal{B}(D)$, порожденной открытыми множествами (в метрике Скорохода) (или, что здесь то же самое, цилиндрическими множествами).

• *Случайная величина* $X = X(\omega)$ — это действительная функция, заданная на $(\Omega, \mathcal{F})$, со значениями в $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, которая является $\mathcal{F}$ -измеримой, т. е. такой, что

$$\{\omega: X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

для любого борелевского множества B из $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Простейшим (однако важным) примером случайной величины является *индикатор* множества: $X(\omega) = I_A(\omega)$, где $A \in \mathcal{F}$ и

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$$

Случайный элемент. Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ и $(E, \mathcal{E})$ — два измеримых пространства и $X = X(\omega)$ — функция на Ω со значениями в E . Говорят, что $X(\omega)$ — случайный элемент, если функция $X(\omega)$ является $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ -измеримой, т. е. для любого $B \in \mathcal{E}$ множество $\{\omega: X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$.

n-мерный случайный вектор $(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ — это упорядоченный набор случайных величин $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$.

Случайная последовательность, или *случайный процесс с дискретным временем*, $X = (X_n(\omega))_{n \geq 1}$, — это последовательность случайных величин $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega), \dots$

Случайный процесс $X = (X_t(\omega))_{t \in T}$ (с временным множеством $T \subseteq \mathbb{R}$) — это набор случайных величин $X_t(\omega)$ с $t \in T$.

• *Функция распределения* $F=F(x)$ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ — всякая $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -измеримая функция, обладающая следующими свойствами:

- 1) $F(x)$ — неубывающая функция;
- 2) $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$;
- 3) $F(x)$ непрерывна справа и имеет пределы слева в каждой точке $x \in \mathbb{R}$.

Если $X = X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, то вероятностная мера P_X на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, определенная формулой

$$P_X(B) = P\{\omega: X(\omega) \in B\}$$

(правильнее, но более громоздко было бы писать $P(\{\omega: X(\omega) \in B\})$), называется *распределением вероятностей случайной величины* $X = X(\omega)$. Функция $F_X(x) = P_X((-\infty, x])$, являющаяся функцией распределения на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, называется *функцией распределения случайной величины* $X = X(\omega)$.

Если $X = (X_t(\omega))_{t \in T}$ — случайный процесс, то вероятности $(t_1 < \dots < t_n, t_i \in T)$

$$P_{t_1, \dots, t_n}(B) = P\{\omega: (X_{t_1}(\omega), \dots, X_{t_n}(\omega)) \in B\}, \quad B \in \mathcal{B}(T),$$

называются *конечномерными распределениями вероятностей процесса* X . Функции

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P\{\omega: X_{t_1}(\omega) \leq x_1, \dots, X_{t_n}(\omega) \leq x_n\}$$

называются *конечномерными функциями распределения процесса* X .

• Если в качестве базовой меры на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ брать меру Лебега $\lambda = \lambda(dx)$, то «разложение Лебега» (см. (29) в В1.III.9 или (3) в В2.VII.6) приводит к следующему результату: любая функция распределения $F = F(x)$ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ представляется в виде

$$F(x) = aF_{\text{abc}}(x) + bF_{\text{sing}}(x),$$

где $a \geq 0, b \geq 0, a + b = 1$,

$F_{\text{abc}}(x) = \int_{-\infty}^x f(y) \lambda(dy)$ — абсолютно непрерывная функция распределения с (измеримой по Борелю) плотностью $f = f(y)$ ($f(y) \geq 0, \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \lambda(dy) = 1$) и

$F_{\text{sing}}(x)$ — *сингулярная* функция распределения (т. е. такая, что соответствующая ей мера P_{sing} на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ является сингулярной по отношению к мере Лебега λ , $P_{\text{sing}} \perp \lambda$).

В свою очередь сингулярная функция $F_{\text{sing}}(x)$ может быть представлена в виде

$$F_{\text{sing}}(x) = d \cdot F_{\text{d-sing}}(x) + c \cdot F_{\text{c-sing}}(x),$$

где $d \geq 0$, $c \geq 0$, $d + c = 1$, $F_{\text{d-sing}}(x)$ есть дискретная функция распределения, характеризующаяся тем, что носитель соответствующей ей меры $P_{\text{d-sing}}$ сосредоточен не более чем в счетном числе точек, и $F_{\text{c-sing}}(x)$ — непрерывная функция распределения, для которой носитель соответствующей меры $P_{\text{c-sing}}$ есть несчетное множество нулевой лебеговской меры λ . (Примером функции $F_{\text{c-sing}}(x)$ является канторова функция; см. п. 1 в В1.П.3.)

Напомним, что *носитель* меры μ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ определяется как множество

$$\text{supp}(\mu) = \{x \in \mathbb{R}: \mu\{y: |y - x| \leq r\} > 0, \forall r > 0\}.$$

Из приведенных разложений вытекает следующее *каноническое представление* (см. задачу П.3.17) всякой функции распределения $F = F(x)$ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$:

$$F = \alpha_1 F_{\text{d}} + \alpha_2 F_{\text{abc}} + \alpha_3 F_{\text{sc}},$$

где F_{d} ($= F_{\text{d-sing}}$) — дискретная, F_{abc} — абсолютно непрерывная, а F_{sc} ($= F_{\text{c-sing}}$) — непрерывная сингулярная функции распределения и $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$, с $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$.

§ 3. Аналитический аппарат и средства теории вероятностей

- Важной характеристикой случайной величины $X = X(\omega)$, определенной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, является ее математическое ожидание EX .

Если $X = X(\omega)$ — неотрицательная случайная величина, то *математическое ожидание* EX определяется как интеграл Лебега от $X(\omega)$ по мере P :

$$EX = \int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega).$$

Если $X = X(\omega)$ — произвольная случайная величина ($X = X^+ - X^-$, где $X^+ = \max(X, 0)$, $X^- = -\min(X, 0)$), то говорят, что ее математическое ожидание EX *существует*, или *определено*, если хотя бы одна

из величин EX^+ или EX^- конечна (т. е. $\min(EX^+, EX^-) < \infty$). В этом случае по определению полагают

$$EX = EX^+ - EX^-.$$

Говорят, что математическое ожидание EX *конечно* (или что случайная величина X *интегрируема*), если $EX^+ < \infty$ и $EX^- < \infty$, т. е. $E|X| < \infty$, поскольку $|X| = X^+ + X^-$. (См. В1.П.6.)

• Важными аналитическими средствами теории вероятностей являются разнообразные теоремы о предельных переходах под знаком интеграла Лебега (теорема о монотонной сходимости, лемма Фату, теорема Лебега о мажорируемой сходимости), понятие равномерной интегрируемости, неравенства (Чебышева, Коши–Буняковского, Иенсена, Ляпунова, Гёльдера, Минковского и др.), теорема Радона–Никодима, теорема Фубини, теорема о замене переменных в интеграле Лебега. (См. В1.П.6.)

• *Дисперсией* случайной величины $X = X(\omega)$ называется величина

$$DX = E(X - EX)^2.$$

Величина $\sigma = +\sqrt{DX}$ называется *стандартным (линейным) отклонением* X (от среднего значения EX).

Если (X, Y) — пара случайных величин, то их *ковариацией* называется величина

$$\text{cov}(X, Y) = E(X - EX)(Y - EY)$$

(предполагается, что математические ожидания определены).

Если $0 < DX < \infty$, $0 < DY < \infty$, то величина

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{DXDY}}$$

называется *коэффициентом корреляции* случайных величин X и Y .

Если X — случайная величина, то математическое ожидание EX^n (если оно определено) называется *моментом порядка n* или *n -м моментом* этой случайной величины. Величины $E(X)_n = EX(X - 1) \dots (X - n + 1)$ называют *факториальными моментами порядка n* .

• Если $F = F(x)$ — функция распределения, то функция

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x) \quad \left(= \int_{\mathbb{R}} \cos tx dF(x) + i \int_{\mathbb{R}} \sin tx dF(x) \right), \quad t \in \mathbb{R},$$

называется *характеристической функцией* распределения F .

В том случае, когда $F = F_X$ — функция распределения случайной величины X , функция

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF_X(x), \quad t \in \mathbb{R},$$

называется *характеристической функцией случайной величины* $X = X(\omega)$. (См. В1.П.12.) При этом $\varphi_X(t) = \mathbb{E}e^{itX}$.

• Если X — неотрицательная случайная величина с функцией распределения $F_X = F_X(x)$, то функция

$$\hat{F}_X(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dF_X(x), \quad \lambda > 0,$$

называется *преобразованием Лапласа* (функции распределения F_X или случайной величины X). При этом $\hat{F}_X(\lambda) = \mathbb{E}e^{-\lambda X}$.

Таблицы наиболее употребительных дискретных распределений вероятностей и распределений, имеющих плотности, приведены в В1.П.3.

• При изучении вероятностных свойств дискретных случайных величин зачастую весьма эффективен метод *производящих функций*. Этот метод хорошо известен и в других разделах математики и является удобным средством изучения свойств числовых последовательностей с трудно обозримой структурой.

В теории вероятностей производящая функция $G(s)$ случайной величины X , принимающей значения $0, 1, 2, \dots$ с вероятностями $p_0, p_1, p_2, \dots$ ($p_k \geq 0, \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$), определяется формулой

$$G(s) = \mathbb{E}s^X = \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k \right), \quad |s| \leq 1.$$

По производящей функции $G(s)$ случайной величины X однозначно восстанавливается ее распределение $(p_k)_{k \geq 0}$:

$$p_k = \mathbb{P}\{X = k\} = \frac{G^{(k)}(0)}{k!}.$$

Если имеется *векторная* дискретная случайная величина $X = (X_1, \dots, X_d)$, компоненты X_i которой принимают значения в множестве $N = \{0, 1, 2, \dots\}$, то ее производящая функция $G(s)$ с $s = (s_1, \dots, s_d)$ определяется следующим образом:

$$G(s_1, \dots, s_d) = \mathbb{E}s_1^{X_1} \dots s_d^{X_d} = \sum_{k_1, \dots, k_d=0}^{\infty} p_{k_1, \dots, k_d} s_1^{k_1} \dots s_d^{k_d},$$

где $p_{k_1, \dots, k_d} = \mathbb{P}\{X_1 = k_1, \dots, X_d = k_d\}$, $|s_k| \leq 1$, $k = 1, \dots, d$.

Если величины $X_1, \dots, X_d$ независимы, то

$$G(s_1, \dots, s_d) = G_1(s_1) \dots G_d(s_d),$$

где $G_k(s_k) = \mathbf{E}s_k^{X_k}$, $k = 1, \dots, d$.

Данное выше определение производящей функции $G(s)$ случайной величины X предполагало, что X принимает неотрицательные значения в множестве $N = \{0, 1, 2, \dots\}$. Для разных нужд целесообразно обобщить это понятие и на тот случай, когда X принимает как положительные, так и отрицательные значения, т. е. пусть $\mathbf{P}\{X = k\} = p_k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и $\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k = 1$.

Определим для такой случайной величины X ее производящую функцию $G(s)$ (аналогично случаю $k = 0, 1, 2, \dots$) формулой

$$G(s) = \mathbf{E}s^X = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k s^k$$

(для тех s , для которых $\mathbf{E}|s^X| < \infty$).

Типичным случаем, когда возникает необходимость в обращении к таким производящим функциям, является случай *разности* двух случайных величин $X = X_1 - X_2$, где X_1 и X_2 принимают значения в множестве $N = \{0, 1, 2, \dots\}$, имея $G_{X_1}(s)$ и $G_{X_2}(s)$ своими производящими функциями.

Если X_1 и X_2 независимы, то

$$G_X(s) = G_{X_1}(s) G_{X_2}\left(\frac{1}{s}\right).$$

В частности, если X_i имеет распределение Пуассона с параметром λ_i , $i = 1, 2$, то $G_{X_i}(s) = e^{-\lambda_i(1-s)}$ и производящая функция $G_X(s)$ величины $X = X_1 - X_2$ задается формулой

$$G_X(s) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1 s + \frac{\lambda_2}{s}} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \cdot e^{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} (t + \frac{1}{t})},$$

где $t = s \sqrt{\lambda_1 / \lambda_2}$.

Из анализа известно, что для $x \in \mathbb{R}$

$$e^{x(t + \frac{1}{t})} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t^k I_k(2x),$$

где $I_k(2x)$ есть модифицированная функция Бесселя первого рода порядка k (см., например, [10, т. 5, с. 820–825]):

$$I_k(2x) = x^k \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{2r}}{r! \Gamma(k+r+1)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

(По-другому можно сказать, что для каждого $x \in \mathbb{R}$ производящая функция последовательности $(I_k(2x))_{k=0, \pm 1, \dots}$ задается формулой $e^{x(t + \frac{1}{t})}$.)

Таким образом, находим, что распределение вероятностей случайной величины $X = X_1 - X_2$ определяется формулой

$$P\{X = k\} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{k/2} I_n(2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}),$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

По поводу других примеров, связанных с подсчетом и применением производящих функций см., например, задачи П.6.43, П.6.49 и П.6.50.

- Как уже было отмечено раньше, производящие функции играют значительную роль в различных разделах математики и, в частности, в дискретной математике и комбинаторике.

В сущности, именно производящие функции лежат в основе *алгебраических* методов решения комбинаторных задач, давая, тем самым, начало тому направлению в комбинаторике, которое естественно называть *алгебраической комбинаторикой*.

Вкратце суть дела здесь в том, что со многими комбинаторными операциями и комбинаторными интерпретациями можно связать определенные алгебраические операции и алгебраические интерпретации.

В качестве примера того, как для комбинаторных подсчетов можно использовать алгебраические свойства производящих функций, рассмотрим следующую комбинаторную задачу, связанную с лотерейными билетами. Будем предполагать, что эти билеты имеют шестизначные номера от 000000 до 999999. Требуется найти вероятность того, что у купленного случайным образом билета сумма первых трех цифр равна сумме последних трех. Ясно, что это — чисто комбинаторная задача на подсчет соответствующего числа благоприятствующих комбинаций. В данном примере это число комбинаций можно было бы попытаться найти перебором. Но (как мы увидим далее) это число равно 55 250, что говорит о трудоемкости отыскания этого числа таким методом, если под руками, конечно, нет компьютерных средств.

Метод производящих функций в этой задаче с шестизначными номерами билетов и в аналогичных задачах с $2n$ цифрами приводит к ответу весьма быстро. Именно, пусть $X = (X_1, \dots, X_6)$ — вектор, состоящий из независимых случайных величин таких, что $p_k = P\{X_i = k\} = 1/10$ для $k = 0, 1, \dots, 9$.

Производящая функция

$$G_{X_i}(s) = \sum_{k=0}^9 p_k s^k = \frac{1}{10}(1 + s + \dots + s^9) = \frac{1}{10} \frac{1-s^{10}}{1-s}.$$

В силу независимости

$$G_{X_1+X_2+X_3}(s) = G_{X_1}(s) G_{X_2}(s) G_{X_3}(s) = \frac{1}{10^3} \left(\frac{1-s^{10}}{1-s} \right)^3,$$

и точно такой же ответ для $G_{X_4+X_5+X_6}(s)$.

Рассмотрим теперь случайную величину $Y = (X_1 + X_2 + X_3) - (X_4 + X_5 + X_6)$.

Понятно, что в силу независимости

$$G_Y(s) = G_{X_1+X_2+X_3}(s) G_{X_4+X_5+X_6}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{10^6} \frac{1}{s^{27}} \left(\frac{1-s^{10}}{1-s} \right)^6.$$

У производящей функции

$$G_Y(s) = \sum_k q_k s^k$$

коэффициент q_0 (при s^0) есть вероятность $P\{Y=0\}$, что и есть интересующая нас вероятность того, что сумма первых трех цифр совпадает с суммой последних трех.

Разлагая $(1-s^{10})^6$, $(1-s)^{-6}$ и $\frac{1}{s^{27}} \left(\frac{1-s^{10}}{1-s} \right)^6$ в степенные ряды (по степеням s^k , $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), можно найти (после простых, но все же достаточно громоздких вычислений с «числами сочетаний»), что

$$q_0 = \frac{55252}{10^6} = 0,05525.$$

В общем случае под *производящей функцией произвольной* числовой последовательности $a = (a_n)_{n \geq 0}$ понимается (формальный) степенной ряд, т. е. алгебраическое выражение вида

$$G_a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

для $x \in \mathbb{R}$.

Если этот ряд имеет ненулевой радиус сходимости, то он действительно определяет *функцию*, свойства которой могут много сказать о свойствах последовательности $a = (a_n)_{n \geq 0}$. К вопросам сходимости таких рядов приходится часто обращаться, однако в общей теории производящих функций считается, что формальный ряд $G_a(x)$ есть

своего рода «перекодировка» последовательности $a = (a_n)_{n \geq 0}$, устанавливающая биективное соответствие

$$(a_n) \leftrightarrow G_a(x).$$

При этом соглашении понятно, что если также $(b_n) \leftrightarrow G_b(x)$ и c — константа, то

$$(a_n + cb_n) \leftrightarrow G_a(x) + cG_b(x).$$

Одним из наиболее важных свойств соответствия « $\leftrightarrow$ » является свойство

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} \right)_{n \geq 0} \leftrightarrow G_a(x) G_b(x),$$

означающее, что конволюции (свертке) последовательностей $a = (a_n)_{n \geq 0}$ и $b = (b_n)_{n \geq 0}$ соответствует умножение производящих функций. Нетрудно видеть, что введенные формальные операции (сложения, умножения на скаляры и перемножения формальных рядов) обладают свойствами ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности, превращая, тем самым, формальные ряды в *алгебраическую* структуру. (Подробнее см. [51], [22], [16], [17].)

Наряду со степенным рядом $G_a(x)$, построенным по последовательности (a_n) , полезно рассматривать также *экспоненциальную производящую функцию*

$$E_a(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

(Здесь ряд снова понимается как формальный степенной ряд.) Как и в случае производящих функций, имеет место взаимно однозначное соответствие

$$(a_n) \leftrightarrow E_a(x)$$

и выполнены свойства

$$(a_n + cb_n) \leftrightarrow E_a(x)(cE_b(x)),$$

$$\left(\sum_{i=0}^n C_n^i a_i b_{n-i} \right)_{n \geq 0} \leftrightarrow E_a(x) E_b(x).$$

Обратимся к некоторым примерам. Если последовательность $(a_n)_{n \geq 0}$ такова, что $a_n = 1$, $n \geq 0$, то производящая функция имеет вид

$$G_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \left(= \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1 \right)$$

и справедлива формула

$$[G_a(x)]^N = \left[\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right]^N = \sum_{n=0}^{\infty} C_{N+n-1}^n x^n,$$

которую можно получить следующими рассуждениями.

Рассмотрим $(1 + x + x^2 + \dots)^N$. Сколькими способами здесь можно получить x^n ? Запишем это выражение в виде произведения:

$$(1 + x + x^2 + \dots)^N = \\ = (1 + x + x^2 + \dots)(1 + x + x^2 + \dots) \dots (1 + x + x^2 + \dots).$$

Если из первой суммы в скобках берется x^{n_1} , из второй — x^{n_2} , ..., из N -й — x^{n_N} , то должно быть $x^{n_1} x^{n_2} \dots x^{n_N} = x^n$. Число возможных наборов $(n_1, n_2, \dots, n_N)$ с $n_1 + n_2 + \dots + n_N = n$ и $n_i \geq 0$ в точности есть число неотрицательных решений системы $n_1 + n_2 + \dots + n_N = n$ и оно равно C_{N+n-1}^n (см. задачу I.1.6). Таким образом, производящей функцией последовательности $(C_{N+n-1}^n)_{n \geq 0}$ является функция $(1 - x)^{-N}$, $|x| < 1$.

Отсюда можно, например, заключить, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} C_{N+n-1}^n = 2^N.$$

Производящей функцией последовательности $(C_N^n)_{n \geq 0}$ с $C_N^n = 0$ при $n > N$ является функция $(1 + x)^N$:

$$(1 + x)^N = \sum_{n=0}^N C_N^n x^n.$$

(Доказательство можно получить аналогично рассмотренному выше случаю для последовательности $(C_{N+n-1}^n)_{n \geq 0}$.)

Рассматривая выражение

$$(1 + x)^N (1 + x)^M = (1 + x)^{N+M}$$

и раскладывая левую и правую части по степеням x , а затем приравняв коэффициенты при x^k , легко находим, что

$$\sum_{j=0}^N C_N^j C_M^{k-j} = C_{N+M}^k.$$

(Это равенство известно как «свертка Вандермонда», или гипергеометрическое тождество.) Приведенное доказательство хорошо иллюстрирует, как метод производящих функций позволяет устанавливать разного рода комбинаторные соотношения.

В заключение темы «производящие функции» обратимся к рассмотренным выше числам Стирлинга второго рода S_N^n и числам Белла B_N . Напомним, что число S_N^n — это число всевозможных разбиений $\mathcal{D}$ множества $\mathbf{A}$ с N элементами таких, что каждое разбиение $\mathcal{D}$ содержит в точности n классов. Число Белла $B_N = \sum_{n=1}^N S_N^n$ — это число всевозможных разбиений множества $\mathbf{A}$ с $|\mathbf{A}| = N$.

В § 1 «Элементы комбинаторики» была приведена формула $n^N = \sum_{k=1}^n S_N^k(n)_k$ и дано ее комбинаторное доказательство. (Напомним, что $S_N^1 = S_N^N = 1$, $S_N^0 = 0$ и $S_N^n = 0$ для $n > N$.)

Из этой формулы вытекает, что для каждого $N \geq 1$ полином

$$P_N(x) = x^N - \sum_{n=1}^N S_N^n(x)_n, \quad x \in \mathbb{R},$$

имеет корни $x = 1, \dots, N$. Поскольку $x = 0$ также есть корень, то, следовательно, $P_N(x) \equiv 0$. Таким образом, для всех $N \geq 1$ и $x \in \mathbb{R}$

$$x^N = \sum_{n=1}^N S_N^n(x)_n.$$

Если считать, что $S_N^0 = 0$ для $N \geq 1$, и полагать также $S_0^0 = 1$ и $(x)_0 = 1$, то видим, что

$$x^N = \sum_{n=0}^N S_N^n(x)_n$$

для всех $N = 0, 1, 2, \dots$ и $x \in \mathbb{R}$.

Учитывая это, находим, что

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{N \geq 0} S_N^n \frac{y^N}{N!} \right) (x)_n &= \sum_{N \geq 0} \frac{y^N}{N!} \left(\sum_{n \geq 0} S_N^n(x)_n \right) = \\ &= \sum_{N \geq 0} \frac{(yx)^N}{N!} = e^{yx} = (e^y)^x = (1 + (e^y - 1))^x = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (e^y - 1)^n (x)_n, \end{aligned}$$

поскольку по формуле Тейлора $(1+z)^x = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} (x)_n$.

Сравнивая левую и правую части в приведенной цепочке равенств, видим, что экспоненциальная производящая функция чисел Стирлинга

второго рода $(S_N^n)_{N \geq 0}$ задается для всех $n \geq 0$ следующей формулой:

$$\sum_{N \geq 0} S_N^n \frac{y^N}{N!} = \frac{1}{n!} (e^y - 1)^n$$

($S_0^0 = 1$, $S_N^0 = 0$ для $N \geq 1$ и $S_N^n = 0$ для $N < n$).

Аналогичным образом можно найти и производящую функцию последовательности $(S_N^n)_{n \geq 0}$:

$$\sum_{n \geq 0} S_N^n x^n = e^{-x} \sum_{m \geq 0} \frac{m^N x^m}{m!}.$$

Действительно,

$$x^n e^x = \sum_{i \geq 0} \frac{x^{i+n}}{i!} = \sum_{m \geq 0} (m)_n \frac{x^m}{m!},$$

поскольку $(m)_n = 0$ при $m \leq n - 1$. Используя формулу $m^N = \sum_{n \geq 0} S_N^n (m)_n$, находим, что

$$\begin{aligned} e^x \sum_{n \geq 0} S_N^n x^n &= \sum_{n \geq 0} S_N^n x^n e^x = \sum_{n \geq 0} S_N^n \left(\sum_{m \geq 0} (m)_n \frac{x^m}{m!} \right) = \\ &= \sum_{m \geq 0} \frac{x^m}{m!} \left(\sum_{n \geq 0} S_N^n (m)_n \right) = \sum_{m \geq 0} \frac{m^N x^m}{m!}, \end{aligned}$$

что и доказывает требуемую формулу.

Если положить $x = 1$, то приходим к формуле Добинского для чисел Белла

$$B_N = e^{-1} \sum_{m \geq 0} \frac{m^N}{m!}.$$

При определении чисел Стирлинга второго рода S_N^n мы исходили из их комбинаторного смысла как числа всевозможных разбиений множества $\mathbf{A}$, состоящего из N элементов, таких, что каждое из них содержит в точности n классов. Затем было показано, что $x^N = \sum_{n=0}^N S_N^n (x)_n$ при каждом $N \geq 0$.

Алгебраически числа Стирлинга первого рода $(s_N^n)_{0 \leq n \leq N}$ можно определять из соотношений

$$(x)_N = \sum_{n=0}^N s_N^n x^n. \quad (*)$$

Комбинаторный же смысл этих чисел состоит в следующем. Пусть $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_N)$ — перестановка (подстановка) чисел $(1, \dots, N)$. Обозначим через c_N^n число подстановок, имеющих n циклов. (У подстановки $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 2, & 1, & 4, & 5, & 3 \end{pmatrix}$ имеется два цикла.) Можно убедиться в том, что справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$c_N^n = c_{N-1}^{n-1} + (N-1)c_{N-1}^n$$

(с $c_0^0 = 1$), из которых вытекает, что

$$\sum_{n=0}^N c_N^n x^n = x(x+1)\dots(x+N-1).$$

Сопоставляя эту производящую функцию для чисел $c_N^0, c_N^1, \dots, c_N^N$ с приведенной выше производящей функцией (*) для чисел Стирлинга первого рода $s_N^0, s_N^1, \dots, s_N^N$, видим, что

$$c_N^n = (-1)^{N-n} s_N^n.$$

Таким образом, числа Стирлинга первого рода s_N^n совпадают с точностью до знака с числом подстановок чисел $(1, \dots, N)$, имеющих n циклов.

Если X — дискретная случайная величина, принимающая значения в множестве $N = \{0, 1, 2, \dots\}$, то ее *производящая функция* была определена формулой $G(s) = \mathbf{E}s^X$, $|s| \leq 1$. Обозначая $p_k = \mathbf{P}\{X = k\}$, находим, что степенной ряд

$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$$

является производящей функцией числовой последовательности $(p_k)_{k \geq 0}$.

Родственным понятием является также понятие *производящей функции моментов* (см. задачу II.6.49)

$$M(s) = \mathbf{E}e^{sX}$$

(математическое ожидание $\mathbf{E}e^{sX}$ заведомо определено и конечно, если, например, $-1 < s < 0$). В том случае, когда все моменты $m^{(k)} = \mathbf{E}X^k$, $k \geq 1$, конечны, из приведенного определения $M(s)$ следует, что (формальный) ряд

$$M(s) = \sum_{k=0}^{\infty} m^{(k)} \frac{s^k}{k!}$$

является экспоненциальной производящей функцией последовательности моментов $(m^{(k)})_{k \geq 0}$. Наряду с моментами $m^{(k)} = EX^k$ в теории вероятностей рассматривают, как уже отмечалось выше, также *факториальные моменты*

$$(m)_k = E(X)_k \equiv EX(X-1)\dots(X-k+1)$$

и *биномиальные моменты*

$$b_{(k)} = E \frac{(X)_k}{k!} = \frac{(m)_k}{k!}$$

(название объясняется тем, что $b_{(k)} = EC_X^k$, поскольку $C_X^k = (X)_k/k!$).

Последовательностям факториальных моментов $((m)_k)_{k \geq 0}$ и биномиальных моментов $(b_{(k)})_{k \geq 0}$ отвечают соответственно экспоненциальная производящая функция

$$(M)(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (m)_k \frac{s^k}{k!}$$

и производящая функция

$$B(s) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{(k)} s^k.$$

Понятно, что

$$M(s) = G(e^s), \quad (M)(s) = B(s) = G(s+1).$$

Полезно отметить, что из приведенных ранее формул

$$x^N = \sum_{n=0}^{\infty} S_N^n(x)_n, \quad (x)_N = \sum_{n=0}^{\infty} s_N^n x^n,$$

где S_N^n и s_N^n — числа Стирлинга второго и первого рода, вытекают следующие формулы связи между моментами $m^{(n)} = EX^n$ и факториальными моментами $(m)_n = E(X)_n$, $n \geq 0$:

$$m^{(N)} = \sum_{n=0}^N S_N^n (m)_n, \quad (m)_N = \sum_{n=0}^N s_N^n m^{(n)}.$$

• Полезно отметить, что многие широко известные в математическом анализе *числа* (например, числа Бернулли, Эйлера и др.) и *полиномы* (Бернулли, Эйлера, Эрмита, Аппеля и др.) определяются именно с помощью производящих функций.

(а) Числа Бернулли $b_0, b_1, b_2, \dots$ и полиномы Бернулли $B_0(x), B_1(x), B_2(x), \dots$ определяются (своими) экспоненциальными производящими функциями по формулам:

$$\frac{s}{e^s - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{s^n}{n!} \quad \text{и} \quad \frac{se^{xs}}{e^s - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{s^n}{n!}.$$

(Некоторые частные случаи: $b_0 = 1, b_1 = -\frac{1}{2}, b_2 = \frac{1}{6}, b_4 = -\frac{1}{30}, b_6 = \frac{1}{42}, b_8 = -\frac{1}{30}$ и $B_0(x) = 1, B_1(x) = x - \frac{1}{2}, B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}, B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$; см., например, [5].) Все нечетные числа Бернулли (кроме $b_1 = -\frac{1}{2}$) равны нулю. Из других свойств отметим следующие:

- (i) $b_N = \sum_{n=0}^N C_N^n b_{N-n}, N = 2, 3, \dots$;
- (ii) все числа b_N являются рациональными числами;
- (iii) $B_N(0) = b_N, B_N(1) = (-1)^N b_N, N \geq 0$;
- (iv) $B_N(x) = \sum_{n=0}^N C_N^n b_n x^{N-n}, N \geq 1$;
- (v) $B'_N(x) = N B_{N-1}(x), N \geq 1$.

(б) Числа Эйлера $e_0, e_1, e_2, \dots$ и полиномы Эйлера $E_0(x), E_1(x), E_2(x), \dots$ определяются (своими) экспоненциальными производящими функциями по формулам:

$$\frac{2e^s}{e^{2s} + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} e_n \frac{s^n}{n!} \quad \text{и} \quad \frac{2e^{xs}}{e^s + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{s^n}{n!}.$$

Поскольку $\frac{2e^s}{e^{2s} + 1} = \frac{1}{\operatorname{ch} s}$, то можно сказать, что экспоненциальной производящей функцией чисел Эйлера $e_0, e_1, e_2, \dots$ является функция $\frac{1}{\operatorname{ch} s}$.

Из приведенных определений вытекает, что

- (i) $e_N = 2^N E_N\left(\frac{1}{2}\right), N \geq 0$;
- (ii) $E_N(x) = \sum_{n=0}^N C_N^n E_n \frac{1}{2^n} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{N-n}, N \geq 0$;
- (iii) $E'_N(x) = N E_{N-1}(x), N \geq 1$;
- (iv) все числа Эйлера с нечетными индексами равны нулю, а с четными индексами суть целые числа.

Частные случаи чисел Эйлера: $e_0 = 1$, $e_2 = -1$, $e_4 = 5$, $e_6 = -61$, $e_8 = 1385$; см. [5].

(с) *Полиномы Эрмита* несколько по-разному вводятся в анализе и в теории вероятностей.

В анализе полиномы Эрмита $\text{He}_n(x)$, $n \geq 0$, вводятся, как правило, по формулам

$$\text{He}_n(x) = (-1)^n \frac{D^n \psi(x)}{\psi(x)},$$

где $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Соответствующая экспоненциальная производящая функция ($s \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$) допускает простое выражение:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \text{He}_n(x) \frac{s^n}{n!} = e^{2sx - s^2/2}.$$

В теории вероятностей обычно оперируют с (несколько иными) полиномами Эрмита

$$\text{H}_n(x) = (-1)^n \frac{D^n \varphi(x)}{\varphi(x)}, \quad n \geq 0,$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ — плотность стандартного нормального $\mathcal{N}(0, 1)$ -распределения. (Отметим, что в § 11 главы II эти полиномы $\text{H}_n(x)$ были обозначены $\text{He}_n(x)$.)

Соответствующая полиномам $\text{H}_n(x)$, $n \geq 0$, экспоненциальная производящая функция ($s \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$) имеет такой вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \text{H}_n(x) \frac{s^n}{n!} = e^{sx - s^2/2}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\text{H}_n(x) = 2^{-n/2} \text{He}_n(2^{-1/2}x).$$

Частные значения:

$$\begin{aligned} \text{He}_0(x) &= 1, & \text{H}_0(x) &= 1, \\ \text{He}_1(x) &= 2x, & \text{H}_1(x) &= x, \\ \text{He}_2(x) &= 4x^2 - 2, & \text{H}_2(x) &= x^2 - 1, \\ \text{He}_3(x) &= 8x^3 - 12x, & \text{H}_3(x) &= x^3 - 3x. \end{aligned}$$

В связи с броуновским движением $B = (B_t)_{t \geq 0}$ в теории случайных процессов часто используются полиномы Эрмита $\text{H}_n(x, t)$, $n \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$,

$t \in \mathbb{R}_+$, определяемые следующей экспоненциальной производящей функцией ($s \in \mathbb{R}$):

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x, t) \frac{s^n}{n!} = e^{2sx - \frac{s^2}{2}t}.$$

(Вместо $H_n(x, t)$ часто пишут $He_n(x, t)$.) Интерес к введению этих объектов обусловлен, в частности, тем, что для (стандартного) броуновского движения $B = (B_t)_{t \geq 0}$ процессы

$$(H_n(B_t, t))_{t \geq 0}, \quad n \geq 0, \quad \text{и} \quad \left(e^{2sB_t - \frac{s^2}{2}t}\right)_{t \geq 0}$$

являются мартингалами (относительно фильтрации, порожденной броуновским движением).

(d) Пусть X — случайная величина такая, что ее производящая функция

$$G(s) = \mathbb{E}e^{sX}$$

конечна для $|s| < \lambda$, где λ — некоторое положительное число.

Введем функцию

$$A(s, x) = \frac{e^{sx}}{G(s)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad |s| < \lambda.$$

(В актуарной и финансовой математике функция $x \rightsquigarrow \frac{e^{sx}}{G(s)}$ носит название преобразования Эшера; см. В2.VII.11.)

По функции $A(s, x)$ определим *полиномы Аппеля* (называемые также *полиномами Шеффера*) $Q_0(x), Q_1(x), \dots$ из разложения

$$A(s, x) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(x) \frac{s^k}{k!}.$$

Иначе говоря, $A(s, x) = \frac{e^{sx}}{\mathbb{E}e^{sX}}$ есть производящая функция последовательности полиномов $(Q_k(x))_{k \geq 0}$.

Если X — случайная величина, имеющая равномерное распределение на $[0, 1]$, то ее производящая функция имеет вид

$$G(s) = \mathbb{E}e^{sX} = \frac{e^s - 1}{s}.$$

Следовательно, в этом случае

$$A(s, x) = \frac{se^{sx}}{e^s - 1}$$

и полиномы Аппеля $Q_k(x)$ есть не что иное, как полиномы Бернулли $B_k(x)$.

Если X — бернуллиевская случайная величина с $P\{X = 1\} = P\{X = 0\} = 1/2$, то ее производящая функция имеет вид

$$G(s) = Ee^{sX} = \frac{e^s + 1}{2}.$$

Следовательно,

$$A(s, x) = \frac{2e^{sx}}{e^s + 1}$$

и, значит, полиномы Аппеля в этом случае совпадают с полиномами Эйлера.

Если X — случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0, 1)$, то ее производящая функция имеет вид

$$G(s) = e^{s^2/2}$$

и, значит,

$$A(s, x) = e^{xs - s^2/2}.$$

Тем самым, в этом случае полиномы Аппеля $Q_k(x)$ совпадают с полиномами Эрмита $H_k(x)$.

Обозначим $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots$ кумулянты (семиинварианты) случайной величины X . Тогда можно убедиться в том, что

$$Q_0(x) = 1,$$

$$Q_1(x) = x - \varkappa_1,$$

$$Q_2(x) = (x - \varkappa_1)^2 - \varkappa_2,$$

$$Q_3(x) = (x - \varkappa_1)^3 - 3\varkappa_2(x - \varkappa_1) - \varkappa_3.$$

В случае, когда $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, кумулянты $\varkappa_1 = 0, \varkappa_2 = 1, \varkappa_3 = \varkappa_4 = \dots = 0$, и видим, что

$$Q_0(x) = H_0(x) = 1,$$

$$Q_1(x) = H_1(x) = x,$$

$$Q_2(x) = H_2(x) = x^2 - 1,$$

$$Q_3(x) = H_3(x) = x^3 - 3x.$$

Заметим, что для однозначного определения полиномов $Q_k(x)$, $k = 1, \dots, n$, достаточно на самом деле требовать лишь, чтобы $E|X|^n < \infty$. При этом справедливы следующие (так называемые аппелевы) соотношения ($Q_0(x) \equiv 1$):

$$Q'_k(x) = kQ_{k-1}(x), \quad 1 \leq k \leq n.$$

• Условным математическим ожиданием неотрицательной случайной величины X относительно σ -подалгебры $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ называется неотрицательная (вообще говоря, расширенная, т. е. со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$) случайная величина $E(X | \mathcal{G}) = E(X | \mathcal{G})(\omega)$ такая, что

- 1) $E(X | \mathcal{G}) - \mathcal{G}$ -измерима,
- 2) для любого $A \in \mathcal{G}$

$$E[XI_A] = E[E(X | \mathcal{G})I_A].$$

Для произвольных случайных величин $X (= X^+ - X^-)$ условное математическое ожидание X относительно σ -подалгебры $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ считается определенным, если P -почти наверное

$$\min[E(X^+ | \mathcal{G})(\omega), E(X^- | \mathcal{G})(\omega)] < \infty,$$

и задается формулой

$$E(X | \mathcal{G})(\omega) = E(X^+ | \mathcal{G})(\omega) - E(X^- | \mathcal{G})(\omega).$$

В случае, когда $X(\omega) = I_A(\omega)$ — индикатор множества $A \in \mathcal{F}$, условное математическое ожидание $E(I_A | \mathcal{G}) = E(I_A | \mathcal{G})(\omega)$ обозначается $P(A | \mathcal{G})$ или $P(A | \mathcal{G})(\omega)$ и называется условной вероятностью события A относительно σ -подалгебры $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.

Если $\mathcal{G}$ есть σ -алгебра, порожденная некоторым случайным элементом $Y = Y(\omega)$ (для наглядности эту σ -алгебру обозначают $\mathcal{G}_Y$ или $\sigma(Y)$), то соответствующие $E(X | \mathcal{G}_Y)$ и $P(A | \mathcal{G}_Y)$ принято обозначать $E(X | Y)$ и $P(A | Y)$ и называть *условным математическим ожиданием X относительно Y* и *условной вероятностью события A относительно Y* . (См. В1.П.7.)

• Как и в математическом анализе, в теории вероятностей оперируют с разными видами сходимости случайных величин ($X_n \xrightarrow{P} X$ — сходимость по вероятности; $X_n \rightarrow X$ (P -п. н.) — сходимость почти наверное, или почти всюду; $X_n \xrightarrow{d} X$ — сходимость по распределению (обозначаемая также $X_n \xrightarrow{\text{law}} X$, $\text{Law}(X_n) \rightarrow \text{Law}(X)$, $\text{Law}(X_n) \xrightarrow{w} \text{Law}(X)$); $X_n \xrightarrow{L^p} X$ — сходимость в среднем порядка $p > 0$; $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$, $\omega \in \Omega$, — поточечная сходимость; $n \geq 1$. (См. главу II, § 10.)

• Многие исследования в теории вероятностей относятся к изучению свойств «с вероятностью единица», или свойств «почти наверное». Сюда относятся, например, законы «нуля или единицы», сходимость рядов почти наверное, усиленный закон больших чисел, закон повторного логарифма (см. главу IV.). Важную роль при этом играет *лемма Бореля–Кантелли*:

Пусть $A_1, A_2, \dots$ — последовательность событий (множеств), $\{A_n \text{ б. ч.}\}$ ($\equiv \overline{\lim}_n A_n \equiv \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$) — множество тех $\omega \in \Omega$, которые бесконечное число раз (бесконечно часто) встречаются в последовательности $A_1, A_2, \dots$. Тогда

(а) если $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, то вероятность $P\{A_n \text{ б. ч.}\} = 0$;

(б) если $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ и события $A_1, A_2, \dots$ независимы, то вероятность $P\{A_n \text{ б. ч.}\} = 1$.

Литература

1. *Биллингслей П.* Эргодическая теория и информация. М.: Мир, 1969.
2. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. 2-е изд. М.: Наука, 1986.
3. *Булinsky А. В., Ширяев А. Н.* Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2003.
4. *Висков О. В.* Алгебраическая характеристика нормального распределения // ТВП. 1985. Т. 30, вып. 1. С. 125—127.
5. *Градиштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
6. *Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р.* Характеризационные задачи математической статистики. М.: Наука, 1972.
7. *Лейпник Р.* Логнормальное распределение и неединственность решения проблемы моментов // ТВП. 1981. Т. 26, вып. 4. С. 863—865.
8. *Линник Ю. В., Эйдлин В. Л.* Замечание об аналитических преобразованиях нормальных векторов // ТВП. 1968. Т. 13, вып. 4. С. 751—754.
9. *Lawler G. F.* Intersections of Random Walks. Boston: Birkhäuser, 1991.
10. Математическая энциклопедия: В 5 т. / Гл. ред. И. М. Виноградов. М.: Советская энциклопедия, 1977—1985.
11. *Нёве Ж.* Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969.
12. *Очан Ю. С.* Обобщенный интеграл // Матем. сб. 1951. Т. 28, вып. 70(2). С. 293—336.
13. *Петров В. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987.
14. *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. 2-е изд. М.: Мир, 1979.
15. *Розовский Л. В.* Одно экстремальное свойство равномерного распределения и некоторые его следствия // ТВП. 1999. Т. 44, № 3. С. 646—650.
16. *Сачков В. Н.* Комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1977.
17. *Сачков В. Н.* Вероятностные методы в комбинаторном анализе. М.: Наука, 1978.
18. *Судаков В. Н., Цирельсон Б. С.* Экстремальные свойства полупространств для сферически инвариантных мер // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1974. Т. 41. С. 14—24.
19. *Стилвелл Дж.* Математика и ее история. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
20. *Фукс А., Иоффе А., Тойгельс Дж.* Математическое ожидание отношения суммы квадратов к квадрату суммы: точные и асимптотические результаты // ТВП. 2001. Т. 46, вып. 2. С. 297—310.

21. Хинчин А. Я. Цепные дроби. 3-е изд. М.: Физматлит, 1961.
22. Холл М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970.
23. Шилов Г. Е. Математический анализ. Специальный курс. М.: Физматлит, 1961.
24. Ширяев А. Н. Вероятность-1. М.: МЦНМО, 2004. 520 с.
25. Ширяев А. Н. Вероятность-2. М.: МЦНМО, 2004. 408 с.
26. Ширяев А. Н. Задачи по теории вероятностей. М.: МЦНМО, 2006. 416 с.
27. Яськов П. А. Асимптотическое поведение плотности бернуллиевских сверток $\sum \pm n^{-\alpha}$ при $1/2 < \alpha \leq 1$ // УМН. 2011. Т. 66, вып. 6(402). С. 191–192.
28. Alexandroff P., Urysohn P. Uber nulldimensionale punktmengen // Math. Ann. 98 (1928). P. 89–106.
29. Apostol T. M. A proof that euler missed: evaluating the easy way // Math. Intel. 1983. Vol. 5. P. 59–60.
30. Banach S. Sur l'équation fonctionnelle $f(x + y) = f(x) + f(y)$ // Fundamenta Mathematicae. 1920. Vol. 1. P. 123–124.
31. Baernstein II A., Taylor B. A. Spherical rearrangements, subharmonic functions, and $*$ -functions in n -space // Duke Math. J. 1976. Vol. 43, № 2. P. 245–268.
32. Barndorff-Nielsen O. On the rate of growth of the partial maxima of a sequence of i.i.d. random variables // Math. Scand. 1961. Vol. 9. P. 383–394.
33. Becker H. Some examples of Borel-inseparable pairs of coanalytic sets // Mathematika. 1986. Vol. 33, № 1. P. 72–79.
34. Bennet G. Probability inequalities for the sum of independent random variables // J. Amer. Statist. Assoc. 1962. Vol. 57. P. 33–45.
35. Bertrand J. Calcul des Probabilités. Paris, 1889.
36. Biane P., Pitman J., Yor M. Probability laws related to the Jacobi theta and Riemann zeta functions, and Brownian excursions // Bulletin of the American Mathematical Society (N.S.) 2001. Vol. 38, № 4. P. 435–465.
37. Bisgaard T. M., Sasvá ri Z. Characteristic functions and moment sequences: positive definiteness in probability. Nova Publishers, 2000.
38. Blatter Ch. Zur Riemannschen Geometrie im Grossen auf dem Möbiusband. Compositio Mathematica 15(1962–1964). P. 88–107.
39. Blinnikov S., Moessner R. Expansions for nearly Gaussian distributions // Astron. Astrophys. Suppl. Ser. 1998. Vol. 130, № 1. P. 193–205.
40. Bohr H. A. Almost periodic functions. NY: Chelsea, 1947.
41. Borell Ch. The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space // Invent. Math. 1975. Vol. 30, № 2. P. 207–216.
42. Botsko M. W. An elementary proof of Lebesgue's differentiation theorem. Am. Math. Monthly. 2003. Vol. 110, № 9. P. 834–838.
43. Brouwer L. E. J. On the structure of perfect sets of points // Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen Proceedings. 1910. Vol. 12. P. 785–794.

44. *Bruckner A. M., Bruckner J. B., Thomson B. S.* Real analysis. NJ: Prentice-Hall, 1997.
45. *Bulinski A., Spodarev E., Timmermann F.* Central limit theorems for the excursion set volumes of weakly dependent random fields // *Bernoulli* 2012. Vol. 18, № 1. P. 100–118.
46. *Burkholder D. L.* Sufficiency in the undominated case // *Ann. Math. Statist.* 1961. Vol. 32, № 4. P. 1191–1200.
47. *Cameron P. J.* Combinatorics. Topics, Techniques, Algorithms. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994.
48. *Chaumont L., Yor M.* Exercises in Probability. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003.
49. *Chen L. H. Y.* Two central limit problems for dependent random variables // *Z. Wahrsch. Verw. Geb.* 1978. Bd. 43. S. 223–243.
50. *Chow Y. S., Studden W. J.* Monotonicity of the variance under truncation and variations of Jensen's inequality // *Ann. Math. Statist.* 1969. Vol. 40, № 3. P. 1106–1108.
51. *Constantine G. M.* Combinatorial Theory and Statistical Design. New York: Wiley, 1987.
52. *Darling D. A.* The influence of the maximum term in the addition of independent random variables // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1952. Vol. 73, № 1. P. 95–107.
53. *Dudley R. M.* Real analysis and probability. Cambridge University Press, 2004.
54. *Houdré C., Villa J.* An example of infinite dimensional quasi-helix // *Contemporary Mathematics*, Amer. Math. Soc. 2003. Vol. 336. P. 195–201.
55. *Levy P.* Theorie de l'Addition des Variables Aleatoires. Paris: Gautier-Villars, 1937.
56. *Davis P. J.* Leonhard Euler's Integral: A Historical Profile of the Gamma Function: In Memoriam: Milton Abramowitz // *American Mathematical Monthly.* 1959. Vol. 66, № 10. P. 849–869.
57. *Dugué D.* Analyticité et convexité des fonctions caractéristiques // *Ann. Inst. H. Poincaré.* 1951. Vol. 12. P. 45–46.
58. *Dragomir S. S.* Refinements of Buzano's and Kurepa's inequalities in inner product spaces // *Facta universitatis: Ser. Math. Inform.* 2005. Vol. 20. P. 65–73.
59. *Efron B., Johnstone I. M.* Fisher's Information in Terms of the Hazard Rate // *Ann. Statist.* 1990. Vol. 18, № 1. P. 38–62.
60. *Feng C., Li L., Shen J.* On the Borell–Cantelli lemma and its generalization // *Comptes Rendus Mathématique.* 2009. Vol. 347. P. 1313–1316.
61. *Feng Ch., Li L., Shen J.* Some inequalities in functional analysis, combinatorics, and probability theory // *Electron. J. Comb.* 2010. Vol. 17. R58.

62. *Fernique X.* Régularité des trajectoires de fonctions aléatoires gaussiennes // Lectures Notes in Math. Springer-Verlag, 1975. Vol. 480. P. 1–96.
63. *Freiweid R. C., McDowell R., McHigh E. F. (Jr.)* Borel sets of exact class // Colloq. Math. 1979. Vol. 41, № 2. P. 187–191.
64. *Fort M. K. Jr.* A note on pointwise convergence // Proc. Amer. Math. Soc. 1951. Vol. 2. P. 34–35.
65. *Gebelein H.* Das statistische Problem der Korrelation als Variations und Eigenwertproblem und sein Zusammenhang mit der Ausgleichsrechnung // Ztschr. angew. Math. und Mech. 1941. Bd. 21. S. 364–379.
66. *Glynn P. W.* Upper bounds on Poisson tail probabilities // Operations Research Letters. Vol. 6(1), № 914. 1987. P. 9–14.
67. *Gordon L.* A Stochastic Approach to the Gamma Function // Amer. Math. Monthly. 1994. Vol. 101, № 9. P. 858–865.
68. *Graves Ch.* On the principles which regulate interchange of symbols in certain symbolic equations // Proc. Royal Irish academy 1853–1857. Vol. 6. P. 144–152.
69. *Hausdorff F.* Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig: Veit, 1914.
70. *Heathcote C. R., Pitman J. W.* An inequality for characteristic functions // Bull. of Austral. Math. Soc. 1972. Vol. 6. P. 1–9.
71. *Hoeffding W.,* Probability inequalities for sums of bounded random variables // J. Amer. Statist. Assoc. 1963. Vol. 58. P. 13–30.
72. *Kabluchko Z., Munk A.* Exact convergence rate for the maximum of standardized gaussian increments // Elect. Comm. in Probab. 2008. Vol. 13. P. 302–310.
73. *Kagan A., Mallows C. L., Shepp L. A., Vanderbei R. J., Vardi Y.* Symmetrization of binary random variables // Bernoulli. 1999. Vol. 5, № 6. P. 1013–1020.
74. *Kawata T.* Fourier analysis in probability theory. New York; London: Academic Press, 1972.
75. *Koralov L. B., Sinai Y. G.* Theory of probability and random processes. Springer, 2007.
76. *Kullback S.* An application of characteristic functions to the distribution problem of statistics // Ann. Math. Statist. 1934. Vol. 5, № 4. P. 263–307.
77. *Lad F. R., Taylor W. F. C.* The moments of the Cantor distribution // Stat. & Probab. Letters. 1992. Vol. 13. P. 307–310.
78. *Landau H. J., Shepp L. A.* On the supremum of a Gaussian process // Sankhya Ser. A. 1970. Vol. 32. P. 369–378.
79. *Lax P. D.* Change of variables in multiple integrals // Amer. Math. Monthly. 1999. Vol. 106. P. 497–501.
80. *Lukacs E.* A characterization of the normal distribution // Ann. Math. Statist. 1942. Vol. 13, № 1. P. 91–93.

81. *Lukacs E.* Developments in Characteristic Function Theory. New York: Macmillan, 1983.
82. *Mattner L.* Bernstein's theorem, inversion formula of Post and Widder, and the uniqueness theorem for Laplace transforms // *Exp. Math.* 1993. Vol. 11. P. 137–140.
83. *McKean H. P.* Geometry of Differential Space // *Ann. Prob.* 1973. Vol. 1, № 2. P. 197–206.
84. *Merkle M.* Reciprocally convex functions // *J. Math. Anal. Appl.* 2004. Vol. 293. P. 210–218.
85. *Mittall Y.* Limiting behaviour of maxima in stationary Gaussian sequences // *Ann. Prob.* 1974. Vol. 2, № 2. P. 231–242.
86. *Muiliwijk J.* Note on a theorem of M. N. Murthy and V. K. Sethi // *Sankhya Ser. B.* 1966. Vol. 28. P. 183.
87. *Pickands J.* An iterated logarithm law for the maximum in a stationary Gaussian sequence // *Z. Wahrsch. Verw. Geb.* 1969. Bd. 12. S. 344–353.
88. *Maharam D.* From finite to countable additivity // *Portugaliae Mathematica.* 1987. Vol. 44, № 3. P. 265–282.
89. *Offner C. D.* Zeros and growth of entire functions of order 1 and maximal type with an application to the random signs problem // *Math. Zeit.* 1980. Vol. 175. P. 189–217.
90. *Olshen R. A., Savage L. J.* A generalized unimodality // *J. Appl. Prob.* 1968. Vol. 7. P. 21–34.
91. *Overdijk D. A., Simons F. H., Thiemann J. G. F.* A comment on unions of rings // *Indag. Math.* 1979. Vol. 41. P. 439–441.
92. *Pollard D.* Asymptotia. In preparation.
93. *Pratt J. W.* On interchanging limits and integrals // *Ann. Math. Statist.* 1960. Vol. 31, № 1. P. 74–77.
94. *Purkayastha S.* Simple proofs of two results on convolutions of unimodal distributions // *Statist. Prob. Lett.* 1998. Vol. 39, № 2. P. 97–100.
95. *Pták V.* A combinatorial lemma on the existence of convex means and its application to weak compactness // *Proc. Sympos. Pure Math.* 1963. Vol. VII. P. 437–450.
96. *Ramachandran B.* Advanced theory of characteristic functions. Calcutta: Statistical Publishing Society, 1967.
97. *Rosenbaum P., Rubin D.* The central role of the propensity score in observational studies for causal effects // *Biometrika.* 1983. Vol. 70, № 1. P. 41–50.
98. *Schechtman G.* Concentration results and applications // *Handbook of the Geometry of Banach Spaces.* Vol. 2. Amsterdam: North-Holland, 2003. P. 1603–1634.
99. *Schilling R., Song R., Vondraček Z.* Bernstein Functions: Theory and Applications. Walter de Gruyter, 2010.

100. *Sellke T.* Generalized gauss-chebyshev inequalities for unimodal distributions // *Metrika*. 1996. Vol. 43, № 1. P. 107–121.
101. *Sheffe H.* A useful convergence theorem for probability distributions // *Ann. Math. Statist.* 1947. Vol. 18, № 3. P. 434–438.
102. *Sierpinski W.* Sur une propriété topologique des ensembles dénombrables dense en soi // *Fund. Math.* 1920. Vol. 1. P. 11–16.
103. *Stein Ch. M.* Estimation of the mean of a multivariate normal distribution // *Ann. Statist.* 1981. Vol. 9, № 6. P. 1135–1151.
104. *Stieltjes T.-J.* Recherches sur les fractions continues // *Ann. de la faculté des sciences de Toulouse Sér. 1*. 1894. Vol. 8, № 4. P. 1–122.
105. *Stuart A.* Gamma-distributed products of independent random variables // *Biometrika*. 1962. Vol. 49, № 3–4. P. 564–565.
106. *Spin Glasses: A Challenge for Mathematicians.* Springer, 2011.
107. *Veraar M.* Correlation inequalities and applications to vector-valued gaussian random variables and fractional brownian motion // *Potential Anal.* 2009. Vol. 30. P. 341–370.
108. *Wall C. R.* Terminating decimals in the Cantor ternary set // *Fibonacci Quarterly*. 1990. Vol. 28, № 2. P. 98–101.
109. *Williams E. J.* Cauchy-distributed functions and a characterization of the cauchy distribution // *Ann. Math. Statist.* 1969. Vol. 40, № 3. P. 1083–1085.
110. *Williams D.* Probability with Martingales. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991.

Предметный указатель

- $(N)_n$ 5
 $(x)_n$ 30
 $[x]_n$ 30
 $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$ 168
 $\tilde{\mathcal{F}}$ 184
 $\tilde{\mathcal{F}}^P$ 184
 $\mathcal{C} \ominus \mathcal{C}$ 208
 $\mathcal{C} \oplus \mathcal{C}$ 208
 $\mathcal{F}^P$ 184
 $D(\xi | \mathcal{D})$ 101
 $\text{kur}(X)$ 394
 $\text{skw}(X)$ 394
 $\mu(\xi)$ 65
 $\mu(F_\xi)$ 65
 $\rho^*(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 351
 σ -алгебра достаточная 336
 $\zeta(\alpha)$ 211
 $A \triangle B$ 62
 A^+ 529
 $C = C[a, b]$ 169
 C_N^n 6
- автомодельность броуновского движения 548
атом 219
— разбиения 609
- бета-функция неполная 393
бискция 45
биномиальные моменты 628
биномиальный коэффициент 6
борелевский изоморфизм 339
- вариационный ряд 141
вариация 201
вероятностное пространство полное 183
- универсальное 417
вершина распределения 307
выборка бутстраповская 322
— неупорядоченная 609
— случайная 322
— упорядоченная 608
- гамма-функция 393
- дзета-функция Римана 211
дисперсия 618
— условная относительно разбиения 101
дробная производная 518
- задача о встречах 24
— о совпадениях 24
— о супружеских парах 52
закон «нуля или единицы» для гауссовских систем 561
— арксинуса 119, 120
— больших чисел Хинчина 378
- идемпотентность операций $\cap$ и $\cup$ 5
изометрическое неравенство Леви 551
индикатор множества 615
интеграл Дирихле 291
— Лебега 281
— в смысле главного значения 288
— — обобщенный 287
— Ньютона 293
— Римана 279, 281
— — обобщенный 293
интегрирование с помощью подстановки в $\mathbb{R}$ 238

- в $\mathbb{R}^n$ 240
- информация Фишера 246
- инъекция 45
- класс разбиения 609
- ковариация 618
- количество информации 105
- конечномерные распределения
 - вероятностей процесса 616
- функции распределения процесса 616
- константа Эйлера 473
- конус 303
- коэффициент корреляции 618
 - — векторов максимальный 348
 - надежности доверительного интервала 565
- коэффициенты мультиномиальные 43
 - полиномиальные 43
- коэффициенты перемешивания 352
- критерий Бернштейна 501
 - Витали 253
 - согласия хи-квадрат 95
 - Хинчина 390, 487
- латинский квадрат 54
- лемма Бореля—Кантелли 633
 - Пратта 254
 - Фату 255
 - — для условных математических ожиданий 330
 - Фату для множеств 149
 - Шеффе 254
 - Шпернера 181
- лестничные индексы 311
 - моменты 311
- локальное время 126, 204
- математическое ожидание 617
- матрица псевдообратная 529
- медиана 65
 - случайной величины 78
- мера атомическая 219
 - диффузная 219
 - неатомическая 219
 - считающая 277
- множество 608
 - Витали 210
 - Смита—Вольтерра— Кантора 293
 - совершенное 209
- мода распределения 307
- модель Изинга одномерная 47
- момент биномиальный 262, 628
 - факториальный 261, 628
 - — порядка n 618
- мультиномиальные коэффициенты 43
- надграфик функции 303
- независимость систем подмножеств 614
 - событий 614
- неравенство c_r - 305
 - Бара—Эссеена 523
 - Белла 74
 - Бонферрони 22
 - Бореля 553
 - Буля 14
 - Ван дер Корпта 499
 - Гёльдера обратное 248
 - Гебелейна 593
 - Гиббса 86
 - Гронуолла—Беллмана 298
 - Гумбеля 22
 - информационное 604
 - Йенсена для условных математических ожиданий 325
 - Каена—Селберга 15
 - Клозера—Хорна—Шимони—Хольта 74
 - Крамера 523
 - Куниаса 14
 - Минковского обратное 248

- Пуанкаре 602, 603
- Райкова 494
- Рао—Крамера 564
- Фреше 22
- Хантера—Ворсли 15
- Чебышёва, двумерный аналог 80
- Чжуна—Эрдёша взвешенное 14
- Юнга 244, 300
- носитель меры 617
- оператор перехода 137
- отклонение стандартное 618
- отношение правдоподобия 132
- оценка Бернштейна 82
- эффективная 564
- парадокс Бертрана 217
- перестановочная система событий 147
- плотность множества 183
- полиномиальные коэффициенты 43
- полиномы Аппеля 631
- Бернулли 629
- Шеффера 631
- Эйлера 629
- Эрмита 630
- пополнение σ -алгебры 183
- предел по вероятности верхний и нижний 425
- по распределению верхний и нижний 425
- преобразование Буля 317
- Лапласа 265, 619
- — неотрицательной случайной величины 501
- Лежандра 300
- Эшера 631
- принцип отражения для броуновского движения 572
- производная дробная 518
- производящая функция случайной величины 619
- — числовой последовательности 622
- — экспоненциальная 623
- производящая функция случайной величины 261
- пространство борелевское 338
- измеримое 614
- польское 169
- процесс Орнштейна—Уленбека 549
- путь неубывающий 6, 44
- разбиение множества 609
- разложение Гаусса—Эрмита 589
- Грама—Шарлье 589
- Лебега 197
- Эджворта 589
- размах случайного блуждания 111
- распределение $\arcsin$ 572
- Вейбулла 357, 375
- вероятностей 616
- Гумбеля 375
- двойное экспоненциальное 357, 375
- Дирихле 404
- логарифмически нормальное 384
- обратно-биномиальное 395
- Парето дискретное 396
- Паскаля 395
- случайной величины 616
- Фреше 375
- расширенная числовая прямая 168
- римановские суммы нижние и верхние 279
- свертка Вандермонда 624
- биномиальная 50
- мультиномиальная 44
- семейство мер доминируемое 336
- символ Кронекера 39
- симметрическая разность 62
- система событий перестановочная 147

- скошенность распределения 395
- случайная величина 615
 - последовательность 615
- случайная величина
 - логарифмически нормальная 384
 - расширенная 342
- случайный вектор 615
 - процесс 615
 - — с дискретным временем 615
 - элемент 615
- события независимые 614
- соотношение Парсеваля 510
- соотношения Гейзенберга—Вейля 600
- статистика Бозе—Эйнштейна 28
 - Максвелла—Больцмана 26
 - порядковая 141, 360
 - ранговая 141
- существенный супремум 221
- схема Бернулли со случайной вероятностью успеха 387
- сходимость почти равномерная 440
- сюръекция 45
- телеграфный сигнал дискретный 111
- теорема Адамара 596
 - Беппо Леви 255
 - Витали—Хана—Сакса 152
 - Егорова 439
 - Зингера 260
 - Крамера 595
 - Куратовского 339
 - Ла Валле Пуссена 250
 - Лебега о дифференцировании монотонной функции 201
 - Ломницкого—Улама 422
 - Лузина 440
 - Марцинкевича 475
 - Мерсера 538
 - о замене переменных в интеграле Лебега в $\mathbb{R}^n$ 240
 - Пифагора 465
 - Пойа 525
 - Пуанкаре 16
 - Хелли 503
 - Шёнберга 488
- тета-функция Якоби 474
- тождество биномиальное 30
 - Вандермонда 30
 - гипергеометрическое 624
- Нёрлунда 30
- Пуанкаре 16
- Спицера 314
- треугольник Паскаля 50
- триангуляции диагональные 8
- уравнение восстановления 421
 - Колмогорова прямое 93
 - Фоккера—Планка 93
- условная энтропия 104
- факториал неполный 5
- факториальный момент порядка n 618
- факториальный момент 261, 628
- формула Байеса обобщенная 336
 - Бонферрони 20
 - включения-исключения для вероятностей 392
 - — для вероятности объединения событий 16, 70
 - — для вероятности пересечения событий 16
 - — для индикаторов трех событий 64
 - — для максимума случайных величин 392
 - Добинского 626
 - Лапласа 416
 - Леви 573
 - Лейбница 29
 - обращения многомерная 482
 - Планшереля 508

- Пуанкаре 16
- суммирования Пуассона 473
- Хёфдинга 592
- Эйлера для дзета-функции Римана 211
- — для функции Эйлера 212
- функция 45
 - Бесселя 620
 - вполне монотонная 501
 - гамма- 393
 - Дирихле 237, 334
 - концентрации 383
 - Леви броуновская 579
 - почти периодическая 500
 - производящая случайной величины 619
 - — числовой последовательности 622
 - — экспоненциальная 623
 - Радемахера 468
 - распределения 616
 - характеристическая 618
 - Эйлера 212
 - характеристическая функция 618
- числа Белла 611
 - Бернулли 629
 - Каталана 7
 - Стирлинга второго рода 611
 - — первого рода 626
 - Стирлинга, свойство двойственности 39
 - Фибоначчи 41
 - Эйлера 629
- число размещений 609
 - сочетаний 609
- эквивалентность случайных величин 427
- экспонента стохастическая 297
- энтропия 103
 - условная 104
- ядро Фейера 500

Указатель имен

- Аппель (Appell P.) 631
Арнольд В. И. 35
Бар (van Bahr B.) 523
Башелье (Bachelier L.) 91
Белл (Bell J. S.) 74
Белл (Bell) 611, 625, 626
Беллман (Bellman R.) 298
Бернштейн С. Н. 82, 501
Бертран (Bertrand J.) 217
Бессель (Bessel F.) 620
Бессель (Bessel F.) 346
Бозе (Bose S. N.) 28
Больцман (Boltzmann L.) 26
Бонферрони (Bonferroni C. E.) 20, 22
Борель (Borel É.) 553, 633
Буль (Boole G.) 14
Вандермонд (Vandermonde A.-T.) 30, 44, 50
Вейбулл (Weibull W.) 357
Вейбулл (Weibull) 375
Висков О. В. 595
Витали (Vitali G.) 152
Гиббс (Gibbs J. W.) 86
Гронуолл (Gronwall T. H.) 298
Гумбель (Gumbel E.) 22
Гумбель (Gumbel E. J.) 375
Изинг (Ising E.) 47
Каталан (Catalan E.) 7
Кронекер (Kronecker L.) 39
Куниас (Kounias E. G.) 14
Лаплас (Laplace P.-S.) 26, 49, 265
Лебер (Lebesgue H.) 281
Леви Б. (Levi B.) 255
Лейбниц (Leibniz G. W.) 29
Максвелл (Maxwell J. C.) 26
Нёрлунд (Nørlund N. E.) 30
Орнштейн (Ornstein L.) 549
Паскаль (Pascal B.) 50
Планк (Planck M. K.) 93
Пратт (Pratt) 254
Пуанкаре (Poincaré H.) 16, 550
Пуассон (Poisson S. D.) 89
Райков Д. А. 494
Риман (Riemann B.) 211, 281
Сакс (Saks S.) 152
Суслин М. Я. 180
Уленбек (Uhlenbeck G. E.) 549
Фату (Fatou P. J. L.) 149, 255
Фибоначчи (Fibonacci; Leonardo da Pisa) 41
Фоккер (Fokker A. D.) 93
Фреше (Fréchet M.) 22, 375
Хан (Hahn H.) 152
Чебышёв П. Л. 80
Эйлер (Euler L.) 211, 212, 629
Эйнштейн (Einstein A.) 28, 91
Эссеен (Esseen C.-G.) 523

Оглавление

Предисловие	3
Глава I	
Элементарная теория вероятностей	5
§ 1. Вероятностная модель эксперимента с конечным числом исходов	5
§ 2. Некоторые классические задачи и распределения	30
§ 3. Условные вероятности. Независимость	55
§ 4. Случайные величины и их характеристики	62
§ 5. Схема Бернулли. I. Закон больших чисел	80
§ 6. Схема Бернулли. II. Предельные теоремы (локальная, Му- авра—Лапласа, Пуассона)	86
§ 7. Оценка вероятности «успеха» в схеме Бернулли	94
§ 8. Условные вероятности и математические ожидания относи- тельно разбиений	100
§ 9. Случайное блуждание. I. Вероятность разорения и средняя продолжительность при игре с бросанием монеты	106
§ 10. Случайное блуждание. II. Принцип отражения. Закон арк- синуса	113
§ 11. Мартингалы. Некоторые применения к случайному блужда- нию	127
§ 12. Марковские цепи. Эргодическая теорема. Строго марков- ское свойство	135
Глава II	
Математические основания теории вероятностей	143
§ 1. Вероятностная модель эксперимента с бесконечным числом исходов. Аксиоматика Колмогорова	143
§ 2. Алгебры и σ -алгебры. Измеримые пространства	157
§ 3. Способы задания вероятностных мер на измеримых про- странствах	184
§ 4. Случайные величины. I	220
§ 5. Случайные элементы	230
§ 6. Интеграл Лебега. Математическое ожидание	234
§ 7. Условные вероятности и математические ожидания относительно σ -алгебр	320

§ 8. Случайные величины. II	344
§ 9. Построение процесса с заданными конечномерными распределениями	417
§ 10. Разные виды сходимости последовательностей случайных величин	423
§ 11. Гильбертово пространство случайных величин с конечным вторым моментом	462
§ 12. Характеристические функции	472
§ 13. Гауссовские системы	526
Приложение	608
§ 1. Элементы комбинаторики	608
§ 2. Вероятностные структуры и понятия	614
§ 3. Аналитический аппарат и средства теории вероятностей	617
Литература	635
Предметный указатель	641
Указатель имен	646